

НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ ПАРНОЙ РЕГРЕССИИ

ВОПРОСЫ

1. Основные виды нелинейных регрессий.
2. Коэффициент эластичности.
3. Линеаризация нелинейных моделей.
4. Корреляция для нелинейной регрессии.

1. Основные виды нелинейных регрессий

Нелинейная регрессия – уравнение регрессии с нелинейной функцией зависимости .

Выбор вида уравнения нелинейной регрессии на этапе спецификации осуществляется с помощью трех основных методов:

- *графического,*
- *аналитического,*
- *экспериментального.*

• **Графический метод** основан на построении корреляционного поля.

• **Аналитический метод** основан на изучении материальной природы связи между изучаемыми величинами. Выбор производится на основании опыта предыдущих исследований, соображений профессионально-теоретического характера, литературных источников.

• **Экспериментальный метод** основан на сравнении величин остаточных дисперсий, рассчитанных для разных моделей:

$$\sigma_{ост}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2$$

Предпочтение отдается уравнению с наименьшей величиной остаточной дисперсии.

Виды уравнений нелинейной регрессии:

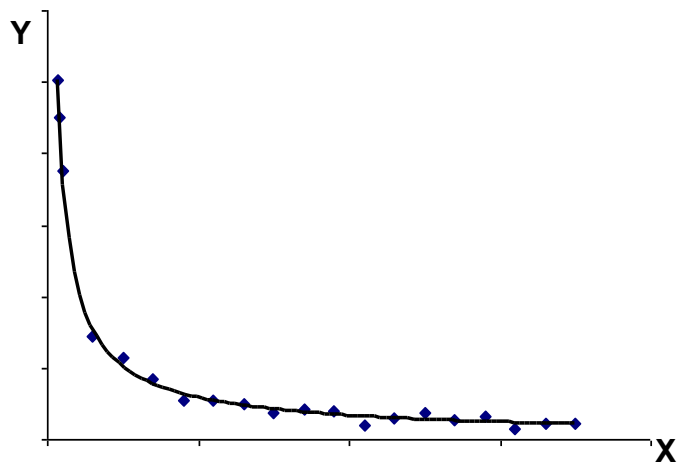
- *гиперболическая: $\hat{y} = a + b / x$;*
- *степенная: $\hat{y} = a x^b$;*
- *показательная: $\hat{y} = a b^x$;*
- *экспоненциальная: $\hat{y} = e^{a + bx}$;*
- *логарифмическая: $\hat{y} = a + b \ln x$;*
- *полиномиальные разных степеней:*
 - квадратичная: $\hat{y} = a + bx + cx^2$;*
 - кубическая: $\hat{y} = a + bx + cx^2 + dx^3$ и т.д.*

Степенное уравнение регрессии

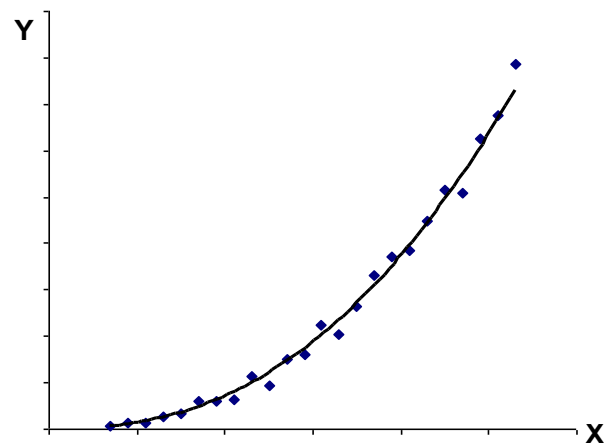
вида: $\hat{y} = a x^b, \quad (1)$

где a и b параметры уравнения регрессии, подлежащие оценке.

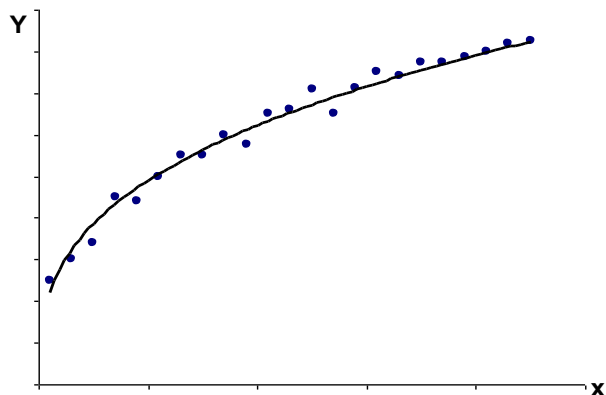
В зависимости от числовых значений параметров a и b степенная функция может изображаться графиками различного вида.



$a) a > 0; \quad b < 0$
(обратная зависимость)



$б) a > 0; \quad b > 1$
(прямая зависимость)



$в) a > 0; \quad 0 < b < 1$ (монотонно возрастающая прямая зависимость)

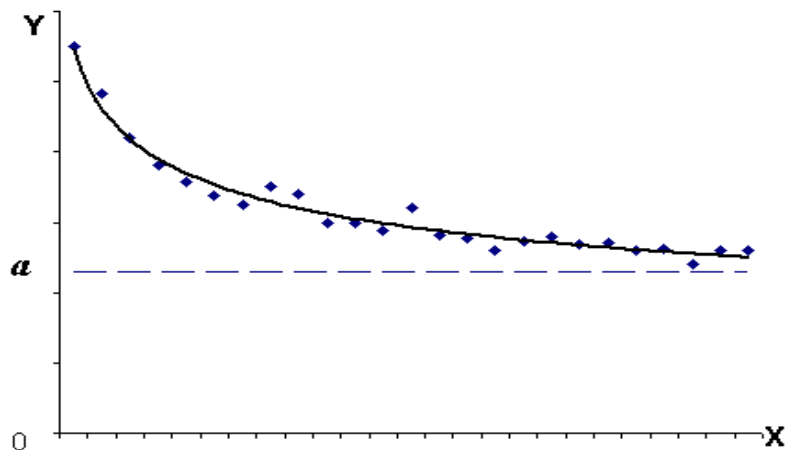
Рисунок 1 – Графическое изображение степенной зависимости

- ✓ График на рис. 1а, может отображать зависимость спроса на товар (Y) от его цены (X).
- ✓ График на рис. 1б может описывать зависимость объема спроса (Y) от доходов потребителей (X). (*функция Энгеля*).
- ✓ График 1в может моделировать *производственную функцию*, отражающую зависимость между объемом выпуска продукции (Y) и одним из основных факторов производства (X) – трудом, капиталом и др.

Гиперболическое уравнение регрессии вида:

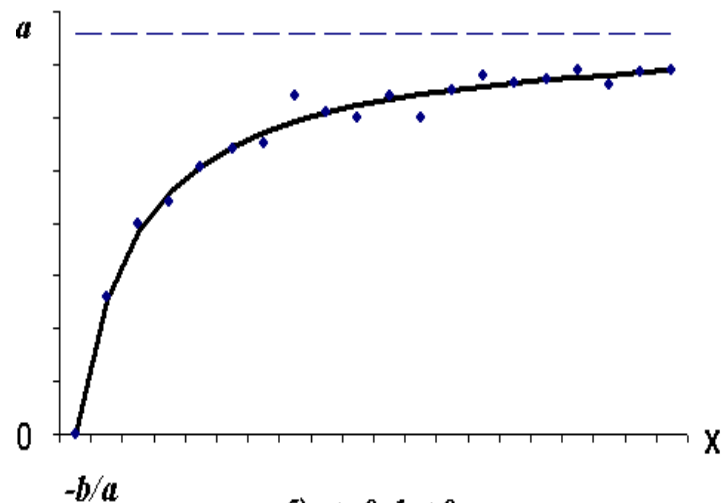
$$\hat{y} = a + \frac{b}{x} \quad (2)$$

Это уравнение применяется в тех случаях, когда неограниченное увеличение независимой переменной X асимптотически приближает зависимую переменную Y к некоторому пределу (в данном случае к параметру a).



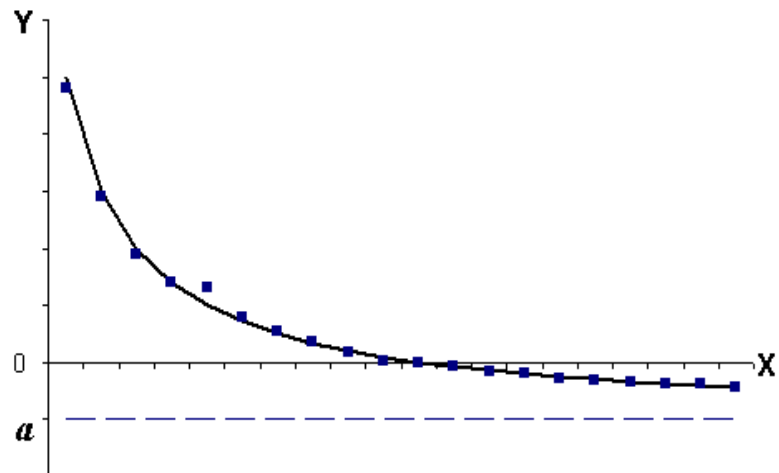
a) $a > 0; b > 0$

(обратная зависимость, которая при $x \rightarrow \infty$ характеризуется нижней асимптотой)



б) $a > 0; b < 0$

(медленно возрастающая функция с верхней асимптотой $y = a$ при $x \rightarrow \infty$)



в) $a < 0; b > 0$

(обратная зависимость, при которой уменьшение Y замедляется при $x \rightarrow \infty$)

Рисунок 2 – Графики гиперболической зависимости

Кривая на рис. 2а может отражать зависимость между объемом выпуска продукции X и себестоимостью единицы продукции Y .

График на рис. 2б может описывать зависимость между доходом X и спросом на товар Y (например, на товары первой необходимости или товары относительной роскоши). Это так называемые *функции Торнквиста*. В этом случае $x = -b/a$ – минимально необходимый уровень дохода.

Важным приложением графика 2в является ***кривая Филлипса***, характеризующая соотношение между уровнем безработицы X и процентом прироста заработной платы Y . При этом точка пересечения кривой с осью Ox определяет естественный уровень безработицы.

Квадратичная функция: $\hat{y} = a + bx + cx^2$
целесообразна к применению, если для определенного интервала значений независимой переменной меняется характер связи рассматриваемых величин: обратная связь меняется на прямую (рис.3а) или прямая на обратную (рис.3б)

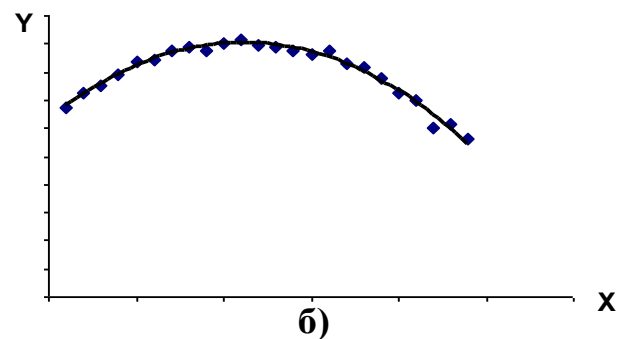
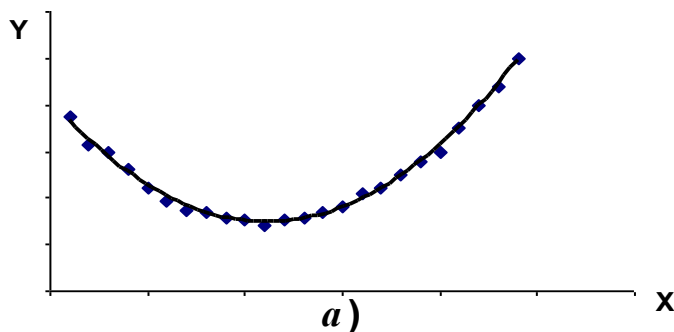


Рисунок 3 – Графики квадратичной зависимости

Можно определить значение независимой переменной X , при котором достигается минимальное (или максимальное) значение зависимой переменной. Для этого приравнивается к 0 первая производная квадратичной функции:

$$y'_x = b + 2cx = 0. \quad \text{Откуда} \quad x = -b / 2c.$$

Квадратичная функция применяется для характеристики зависимости урожайности от количества внесенных удобрений либо от количества осадков.

Часто используют отдельные сегменты параболы.

В практике регрессионного анализа крайне редко используют полиномы выше третьего порядка, что связано с требованиями однородности исследуемой совокупности: чем выше порядок полинома, тем больше изгибов имеет кривая и соответственно менее однородна совокупность по зависимой переменной.

2. Коэффициент эластичности

Общая формула расчета коэффициента эластичности:

$$\mathcal{E} = y'_x \frac{x}{y}$$

где y'_x – первая производная переменной Y по переменной X .

Для степенной функции получаем:

$$\mathcal{E} = \left(ax^b\right)' \frac{x}{ax^b} = abx^{b-1} \frac{x}{ax^b} = \frac{abx^b}{ax^b} = b$$

В степенной функции вида (1) параметр ***b*** определяет ***эластичность*** зависимой переменной ***Y*** по независимой переменной ***X***,

т. е. величина ***b*** показывает на сколько процентов изменится в среднем ***Y***, если ***X*** изменится на 1%.

Например, если зависимость спроса Y на некоторый товар от его цены X характеризуется уравнением:

$$\hat{y} = 83,2 x^{-1,2},$$

то с увеличением цены на 1% спрос снижается (знак «−») в среднем на 1,2%.

Коэффициенты эластичности для некоторых функций

Вид функции	Первая производная	Коэффициент эластичности
$y=a+bx$	b	$\mathcal{E}=bx/(a+bx)$
$y=a+bx+cx^2$	$b+2cx$	$\mathcal{E}=(b+2cx)x/(a+bx+cx^2)$
$y=a+b/x$	$-b/x^2$	$\mathcal{E}=-b/(ax+b)$
$y=ax^b$	abx^{b-1}	$\mathcal{E}=b$
$y=ab^x$	$a \cdot b^x \ln b$	$\mathcal{E}=x \cdot \ln b$

Из таблицы видно, что для всех функций (кроме степенной) коэффициент эластичности зависит от значения фактора x .

Поэтому обычно рассчитывают *средний коэффициент эластичности* по формуле:

$$\overline{\varepsilon} = y'_x \frac{\overline{x}}{\overline{y}}$$

Средний коэффициент эластичности показывает, на сколько процентов в среднем по совокупности изменится результат Y от своей средней величины при изменении фактора X на 1% от своего среднего значения.

3. Линеаризация нелинейных моделей

Нелинейные регрессии делятся на два класса:

➤ *регрессии, нелинейные относительно включенных в анализ объясняющих переменных, но линейные по оцениваемым параметрам.*

Например, полиномы различных степеней, гиперболическая функция.

➤ *регрессии, нелинейные по оцениваемым параметрам.*

Например, степенная, показательная, экспоненциальная функции.

Для оценки параметров нелинейных моделей используется подход, основанный на *линеаризации модели*, который заключается в том, что с помощью математических преобразований нелинейные регрессии сводятся к линейным соотношениям между преобразованными переменными.

1. Нелинейность по переменным устраняется путем
замены переменной.

Например,

гиперболическое уравнение регрессии

$$y = a + \frac{b}{x}$$

Обозначим: $z = 1/x$.

Имеем парную линейную регрессию: $\hat{y} = a + bz$.

Оценка параметров полученного линейного уравнения может быть дана МНК. Для расчетов необходимо получить массив данных, обратных объясняющей переменной X .

2. Нелинейность по параметру часто устраняется путем *логарифмического преобразования* уравнения.

Например, показательное уравнение регрессии:

$$y = a b^x$$

Прологарифмируем левую и правую части уравнения по натуральному основанию и преобразуем полученное равенство:

$$\ln y = \ln (a b^x)$$

$$\ln y = \ln a + \ln b^x$$

$$\ln y = \ln a + x \ln b$$

Введем промежуточные переменные:

$$\ln y = Y; \quad \ln a = A; \quad \ln b = B$$

С учетом введенных обозначений имеем парную линейную регрессию: $Y = A + Bx$.

В качестве объясняемой переменной здесь выступает не исходная переменная y , а $Y = \ln y$.

В расчетах необходимо брать не исходный массив переменной y , а массив предварительно полученных ее логарифмов. В результате расчетов с помощью МНК будут получены не коэффициенты a и b , а их логарифмы: $A = \ln a$; $B = \ln b$.

Откуда можно получить значения параметров a и b :

$$a = e^A, \quad b = e^B.$$

Таблица – Нелинейные регрессии и их линеаризация

Регрессия	Линеаризация
$y = a b^x$	$\ln y = \ln a + x \ln b$
$y = e^{a + b x}$	$\ln y = a + b x$
$y = a x^b$	$\ln y = \ln a + b \ln x$
$y = a + b x + c x^2$	$y = a + b x_1 + c x_2$ (где $x_1 = x$, $x_2 = x^2$)

4. Корреляция для нелинейной регрессии

Тесноту связи для нелинейной регрессии оценивает индекс корреляции, который определяется по формуле:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sigma_{ост.}^2}{\sigma_y^2}}$$

где

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 -$$

общая дисперсия переменной Y

$$\sigma_{ост.}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 -$$

остаточная дисперсия, определяемая
исходя из уравнения регрессии

Отсюда:

$$\rho_{xy} = \sqrt{1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2}}$$

Величина индекса корреляции находится в границах: $0 \leq \rho_{xy} \leq 1$.

Чем ближе ρ_{xy} к 1, тем теснее связь изучаемых признаков, и тем более надежно найдено уравнение регрессии.

Известно, что

$$R^2 = 1 - \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum (y_i - \bar{y})^2};$$

Поэтому, $\rho^2_{xy} = R^2$

Величину R^2 для нелинейных связей называют *индексом детерминации*.

Индекс детерминации используется для проверки значимости в целом уравнения нелинейной регрессии по F -критерию Фишера:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - m - 1}{m},$$

где n – число наблюдений,

m – число параметров при независимых переменных (X).

Пример:

1) Для степенной функции $y = a x^b$
 $m = 1$,

получаем формулу F -критерия:

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot (n - 2)$$

2) Для квадратной функции:

$$y = a + bx + cx^2 \quad (m=2);$$

$$F_{\text{факт}} = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{n - 3}{2}$$

Оценка значимости индекса корреляции проводится также, как и оценка значимости коэффициента корреляции для линейной регрессии.