

Дифференциальные уравнения второго порядка линейные неоднородные с постоянными коэффициентами

Задача 1. Найти частное решение уравнения  $y'' + 4y = 4\sin 2x - 8\cos 2x$ , удовлетворяющее начальным условиям  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ .

Решение. Общее решение  $y$  данного уравнения равно сумме общего решения  $y_{одн}$  однородного уравнения и какого-либо частного решения  $\bar{y}$  данного уравнения, то есть  $y = y_{одн} + \bar{y}$ .

Для нахождения  $y_{одн}$  составим характеристическое уравнение  $k^2 + 4 = 0$ , имеющее комплексные корни  $k_1 = 2i$  и  $k_2 = -2i$ . В этом случае общее решение однородного уравнения ищем в виде  $y_{одн} = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ , где  $\alpha \pm \beta i$  – комплексные корни характеристического уравнения. Подставив  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ , имеем  $y_{одн} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ :

Для нахождения частного решения  $\bar{y}$  неоднородного дифференциального уравнения воспользуемся следующей теоремой: *если правая часть неоднородного уравнения есть функция  $f(x) = e^{\alpha x} (a \cos \beta x + b \sin \beta x)$  и числа  $\alpha \pm \beta i$  не являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение  $\bar{y} = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ . Если же числа являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение  $\bar{y} = x e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$ .*

Применяя эту теорему при  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 2$ , имеем:  $\bar{y} = x(A \cos 2x + B \sin 2x)$ .

Дважды дифференцируя последнее равенство, находим  $\bar{y}''$ :  $\bar{y}'' = (4B - 4Ax) \cos 2x + (-4A - 4Bx) \sin 2x$ .

Подставив в данное уравнение  $\bar{y}$  и  $\bar{y}''$ , получим:  $4B \cos 2x - 4A \sin 2x = 4 \sin 2x - 8 \cos 2x$ , откуда  $A = -1$ ,  $B = -2$ .

Следовательно,  $\bar{y} = -x(\cos 2x + 2 \sin 2x)$  и  $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - x(\cos 2x + 2 \sin 2x)$ .

Найдем  $y'$ :

$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x - \cos 2x - 2 \sin 2x - x(-2 \sin 2x + 4 \cos 2x)$ .

Используя начальные условия, получим систему

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ 2C_2 - 1 = 0, \text{ откуда } C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Следовательно,  $y = \frac{1}{2} \sin 2x - x(\cos 2x + 2 \sin 2x)$  есть искомое частное решение данного дифференциального уравнения.

## Задача 2

Решить методом вариации произвольных постоянных уравнение  $y'' + 2y' - 3y = e^x$ .

Решение. Решая однородное уравнение  $y'' + 2y' - 3y = 0$ ,  $k^2 + 2k - 3 = 0$ , откуда корни характеристического уравнения  $k_1 = -3$  и  $k_2 = 1$ , получаем частное решение  $y_1 = e^{-3x}$ ,  $y_2 = e^x$ . Общее решение однородного уравнения имеет вид:  $y_{одн} = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x$ , где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения  $y = y_{одн} + \bar{y}$ , где частное решение  $\bar{y}$  неоднородного уравнения берется в виде  $y_{одн}$ , считая  $C_1$  и  $C_2$  функциями от  $x$ , т.е.  $\bar{y} = C_1(x)e^{-3x} + C_2(x)e^x$ .

Для нахождения  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$  решаем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Т.к.  $y_1' = -3e^{-3x}$ ,  $y_2' = e^x$ , то система имеет вид:

$$\begin{cases} C_1' e^{-3x} + C_2' e^x = 0, \\ -3C_1' e^{-3x} + C_2' e^x = e^x. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим  $4C_1' e^{-3x} = -e^x$ , откуда

$$C_1' = -\frac{e^x}{4e^{-3x}} = -\frac{1}{4}e^{4x}, \text{ тогда } C_2' = -\frac{C_1' e^{-3x}}{e^x} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Интегрируя, получаем: } C_1 = -\frac{1}{4} \int e^{4x} dx = -\frac{1}{16} e^{4x}, \quad C_2 = \frac{1}{4} \int dx = \frac{1}{4} x.$$

Постоянные интегрирования берем равными нулю.

$$\text{Итак, } \bar{y} = -\frac{1}{16} e^{4x} \cdot e^{-3x} + \frac{1}{4} x e^x, \text{ т.ч. } \bar{y} = -\frac{1}{16} e^x + \frac{1}{4} x e^x.$$

Общее решение данного уравнения соответственно равно:

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x - \frac{1}{16} e^x + \frac{1}{4} x e^x.$$

Разобрать законспектировать

Решить свою задачу из расчетной работы под буквой в)

Ниже приведены задания

2. Найти частные решения данных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих указанным начальным условиям:

2.1. а)  $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$ ,  $y(0) = -1$ ,

$$\text{б) } xy'' - y' - x^2 = 0, \quad y(1) = \frac{4}{3}, \quad y'(1) = 3,$$

$$\text{в) } y'' - 2y' - 8y = 16x^2 + 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$$

$$2.2. \text{ а) } xy' - 3y = x^4 e^x, \quad y(1) = e,$$

$$\text{б) } 2yy'' = 1 + (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1,$$

$$\text{в) } y'' - 6y' + 9y = e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4.$$

$$2.3. \text{ а) } (1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2, \quad y(-2) = 5,$$

$$\text{б) } 2yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2,$$

$$\text{в) } y'' + 4y' + 4y = 2e^x, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = -2.$$

$$2.4. \text{ а) } y' + y = \frac{e^{-x}}{1 + x^2}, \quad y(0) = 2,$$

$$\text{б) } y'' = xe^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

$$\text{в) } y'' - 5y' + 6y = 2\cos x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{1}{2}.$$

$$2.5. \text{ а) } y' - y\sin x = e^{-\cos x} \sin 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3,$$

$$\text{б) } (x^2 + 1)y'' = 2xy', \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3,$$

$$\text{в) } y'' + 2y' - 8y = 3\sin x, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -\frac{3}{2}.$$

$$2.6. \text{ а) } y' + 2xy = 2xe^{-x^2}, \quad y(0) = 5,$$

$$\text{б) } y'' = xe^x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -6,$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 5y = 2x^2 e^x, \quad y(0) = 2, \quad y''(0) = 3.$$

$$2.7. \text{ а) } y' - 4xy = x, \quad y(0) = \frac{3}{4},$$

$$\text{б) } y'' + y = 4e^x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = -3,$$

$$\text{в) } 2y'' - 3y^2 = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1.$$

$$2.8. \text{ а) } (xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0, \quad y(0) = 0,$$

$$\text{б) } 2(y')^2 = (y-1)y'', \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

$$\text{в) } y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = -\frac{1}{5}.$$

$$2.9. \text{ а) } y'tg x - y = a, \quad y(0) = 0,$$

$$\text{б) } yy'' = (y')^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + 10y = -\sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{3}{4}.$$

$$2.10. \text{ а) } yy' = \frac{1-2x}{y}, \quad y(0) = 1,$$

$$\text{б) } y'y'' = 1, \quad y(0) = \frac{1}{3}, \quad y'(0) = 1,$$

$$\text{в) } y'' - 6y' + 9y = \cos 2x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = \frac{1}{3}.$$

$$2.11. \text{ а) } y' \sin x = y \ln y, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e,$$

$$\text{б) } y''y^3 = 1, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 5y = 2e^{3x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = \frac{3}{4}.$$

$$2.12. \text{ а) } y - xy' = b(1 + x^2 y'), \quad y(1) = 1,$$

$$\text{б) } y''y^3 + 1 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 3y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$$

$$2.13. \text{ а) } (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, \quad y(1) = 0,$$

$$\text{б) } y''y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0,$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = -x^2 + 3x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = \frac{4}{3}.$$

$$2.14. \text{ а) } y' + 2xy = 3x^2 e^{-x^2}, \quad y(0) = 0,$$

$$\text{б) } xy'' - y' - x^2 = 0, \quad y(1) = \frac{4}{3}, \quad y'(1) = 3,$$

$$\text{в) } y'' - 6y' + 9y = e^{3x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$2.15.\text{a) } y' \sin x - y \cos x = 1, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

$$\text{б) } (y - 2)y'' = 2(y')^2, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1,$$

$$\text{в) } y'' + 2y' + y = 9e^{2x} + x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$$

$$2.16.\text{a) } y' \sin^2 x + y = \operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1,$$

$$\text{б) } y'' = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2,$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = 2(\sin 2x + x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

$$2.17.\text{a) } (1+x^2)y' + y = \operatorname{arctg} x, \quad y(0) = 1,$$

$$\text{б) } xy'' - 2y' = 2x^4, \quad y(1) = \frac{1}{5}, \quad y'(1) = 4,$$

$$\text{в) } y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(3-4x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$2.18.\text{a) } y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x, \quad y(0) = -1,$$

$$\text{б) } xy'' = \ln x + 1, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0,$$

$$\text{в) } y'' - 3y' + 2y = x + 1 + e^{-2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$2.19.\text{a) } y' + 2y \operatorname{tg} 2x = \sin 4x, \quad y(0) = 0,$$

$$\text{б) } y'' = \frac{x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$\text{в) } y'' + y = -\sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$2.20.\text{a) } y' + y = -e^{2x}y^2, \quad y(0) = 1,$$

$$\text{б) } xy'' + y' = 4x^3, \quad y(1) = \frac{1}{4}, \quad y'(1) = 2,$$

$$\text{в) } y'' + y' - 6y = x^2 - 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$2.21.\text{a) } xy' + 2y = \frac{1}{x}, \quad y(3) = 1,$$

$$\text{б) } y'' + y' \operatorname{tg} x = \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0,$$

$$\text{в) } y'' - 3y' = x + \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -\frac{1}{9}.$$

$$2.22.\text{a) } xy' + y = \frac{2x}{1+x^2}, \quad y(1) = 0,$$

$$\text{б) } xy'' - y' = x^2 \cos x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{в) } y'' - y = 2(1-x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

$$2.23.\text{a) } y' \cos x - 2y \sin x = 2, \quad y(0) = 3,$$

$$\text{б) } x^3 y'' = 4 \ln x, \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = 0,$$

$$\text{в) } y'' - 3y' - 4y = 17 \sin x, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0.$$

$$2.24.\text{a) } y' \cos x + y \sin x = 1, \quad y(0) = 2,$$

$$\text{б) } y'' - e^y y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

$$\text{в) } y'' - 4y' + 4y = e^{3x} + 25 \sin x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

$$2.25.\text{a) } xy' + y = -x^2 y^2, \quad y(1) = 1,$$

$$\text{б) } y'y'' = 2y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

$$\text{в) } y'' - y = 9xe^{2x}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -5.$$