

Тема: Построение мультипликативной модели временного ряда

Общий вид мультипликативной модели выглядит так: $Y = T \cdot S \cdot E$

Модель предполагает, что каждый уровень временного ряда может быть представлен как произведение трендовой T , сезонной S и случайной E компонент.

Построение мультипликативной модели сводится к расчету значений T , S и E для каждого уровня ряда. Процесс построения модели включает в себя следующие шаги.

Шаг 1. Выравнивание исходного ряда методом скользящей средней.

Шаг 2. Расчет значений сезонной компоненты S .

Шаг 3. Устранение сезонной компоненты из исходных уровней ряда и получение выровненных данных $T \cdot E$.

Шаг 4. Аналитическое выравнивание уровней ($T \cdot E$) и расчет значений T с использованием полученного уравнения тренда.

Шаг 5. Расчет полученных по модели значений ($T \cdot S$).

Шаг 6. Расчет абсолютных и/или относительных ошибок.

Рассмотрим методику построения мультипликативной модели временного ряда на примере.

Пример 1. Пусть имеются поквартальные данные о прибыли компании за последние 4 года (табл.1).

Таблица 1. Прибыль компании, тыс. долл.

Год	Квартал			
	I	II	III	IV
1	72	100	90	64
2	70	92	80	58
3	62	80	68	48
4	52	60	50	30

График данного временного ряда (рис.1) свидетельствует о наличии сезонных колебаний (период колебаний равен 4) и общей убывающей тенденции уровней ряда. Прибыль компании в весенне-летний период выше, чем в осенне-зимний период.

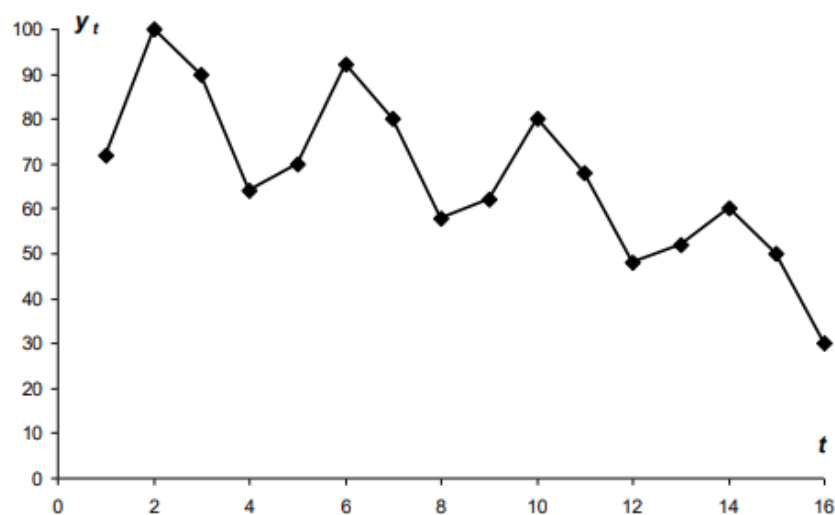


Рисунок 1 –Прибыль компании

Поскольку амплитуда сезонных колебаний уменьшается можно предположить наличие мультипликативной модели. Определим ее компоненты.

Шаг 1. Проведем выравнивание исходных уровней ряда методом скользящей средней. Методика, применяемая на этом шаге, полностью совпадает с методикой построения аддитивной модели. Результаты расчетов представлены в табл. 2.

Таблица 2 –Расчет оценок сезонной компоненты в мультипликативной модели

Номер квартала, t	Прибыль компании, y_t	Итого за четыре квартала	Скользящая средняя за четыре квартала	Центрированная скользящая средняя	Оценка сезонной компоненты
1	2	3	4	5	6
1	72	—	—	—	—
2	100	326	81,5	—	—
3	90	324	81	81,25	1,10769231
4	64	316	79	80	0,8
5	70	306	76,5	77,75	0,90032154
6	92	300	75	75,75	1,21452145
7	80	292	73	74	1,08108108
8	58	280	70	71,5	0,81118881
9	62	268	67	68,5	0,90510949
10	80	258	64,5	65,75	1,21673004
11	68	248	62	63,25	1,07509881
12	48	228	57	59,5	0,80672269
13	52	210	52,5	54,75	0,94977169
14	60	192	48	50,25	1,19402985
15	50	—	—	—	—
16	30	—	—	—	—

Шаг 2. Найдем оценки сезонной компоненты как частное от деления фактических уровней ряда на центрированные скользящие средние (гр.6 табл.2). Используем эти оценки для расчета сезонной компоненты S (табл.3). Для этого найдем средние за каждый квартал оценки сезонной компоненты S_i .

Взаимопогашаемость сезонных воздействий в мультипликативной модели выражается в том, что **сумма значений сезонной компоненты по всем кварталам должна быть равна числу периодов в цикле, т.е. четырем, так как в нашем случае число периодов одного цикла (год) равно четырем кварталам.**

Таблица 3 - Расчет значений сезонной компоненты
в мультипликативной модели

	Год	Квартал			
		I	II	III	IV
	1	–	–	1,107692	0,8
	2	0,900322	1,214521	1,081081	0,811188811
	3	0,905109	1,21673	1,075099	0,806722689
	4	0,949772	1,19403	–	–
Итого за квартал		2,755203	3,625281	3,263872	2,4179115
Средняя		0,918401	1,208427	1,087957	0,8059705
Скорректированная		0,91366	1,202189	1,082341	0,801809924

Для данной модели имеем:

$0,918 + 1,208 + 1,088 + 0,806 = 4,021$ (сумма средних оценок сезонной компоненты).

Рассчитаем корректирующий коэффициент:

$$k = 4 / 4,021 = 0,995.$$

Определим скорректированные значения сезонной компоненты, умножив ее средние оценки на корректирующий коэффициент k :

$$S_i = \bar{S}_i \cdot k$$

где $i = 1, 2, 3, 4$.

Проверим условие равенства 4 суммы значений сезонной компоненты:

$$0,914 + 1,202 + 1,082 + 0,802 = 4.$$

Получим следующие значения сезонной компоненты:

I квартал: $S_1 = 0,914$;

II квартал: $S_2 = 1,202$;

III квартал: $S_3 = 1,082$;

IV квартал: $S_4 = 0,802$.

Занесем полученные значения в табл.4 для соответствующих кварталов каждого года.

Шаг 3. Разделим каждый уровень исходного ряда на соответствующее значение сезонной компоненты. Получим: $T * E = Y / S$ (гр.4 табл.4), которые содержат только тенденцию и случайную компоненту.

Таблица 4 – Расчет выровненных значений T и ошибок E

t	y	S	$T \cdot E = Y/S$	T	$T \cdot S$	$E = y/(T \cdot S)$	$E' = y - (T \cdot S)$	E^2
1	72	0,91366	78,803936	87,7919	80,21194	0,897622	-8,21194405	67,43603
2	100	1,202189	83,181598	85,01865	102,2085	0,978392	-2,20848394	4,877401
3	90	1,082341	83,153079	82,2454	89,01758	1,011036	0,9824209	0,965151
4	64	0,80181	79,819416	79,47215	63,72156	1,00437	0,27844443	0,077531
5	70	0,91366	76,614938	76,69889	70,07671	0,998905	-0,07670757	0,005884
6	92	1,202189	76,52707	73,92564	88,87259	1,03519	3,12740725	9,780676
7	80	1,082341	73,913848	71,15239	77,01116	1,03881	2,9888393	8,93316
8	58	0,80181	72,336346	68,37914	54,82707	1,057872	3,17292783	10,06747
9	62	0,91366	67,858945	65,60589	59,94147	1,034342	2,05852892	4,237541
10	80	1,202189	66,545278	62,83264	75,5367	1,059088	4,46329844	19,92103
11	68	1,082341	62,826771	60,05938	65,00474	1,046078	2,99525769	8,971569
12	48	0,80181	59,864562	57,28613	45,93259	1,04501	2,06741122	4,274189
13	52	0,91366	56,913954	54,51288	49,80623	1,044046	2,1937654	4,812607
14	60	1,202189	49,908959	51,73963	62,20081	0,964618	-2,20081036	4,843566
15	50	1,082341	46,196155	48,96638	52,99832	0,943426	-2,99832392	8,989946
16	30	0,80181	37,415351	46,19312	37,03811	0,809977	-7,03810539	49,53493

Шаг 4. Определим компоненту T в мультипликативной модели. Для этого рассчитаем параметры линейного тренда, используя уровни $(T \cdot E)$.

Результаты аналитического выравнивания этого ряда представлены ниже.

Константа	90,565154
Коэффициент регрессии	-2,773252
Стандартная ошибка коэффициента	0,225557
R^2	0,91524

Уравнение тренда имеет следующий вид: $T = 90,59 - 2,773 t$.

Подставив в это уравнение значения $t = 1, \dots, 16$, найдем уровни T для каждого момента времени (5 гр. в табл.4).

График уравнения тренда приведен на рис.2.

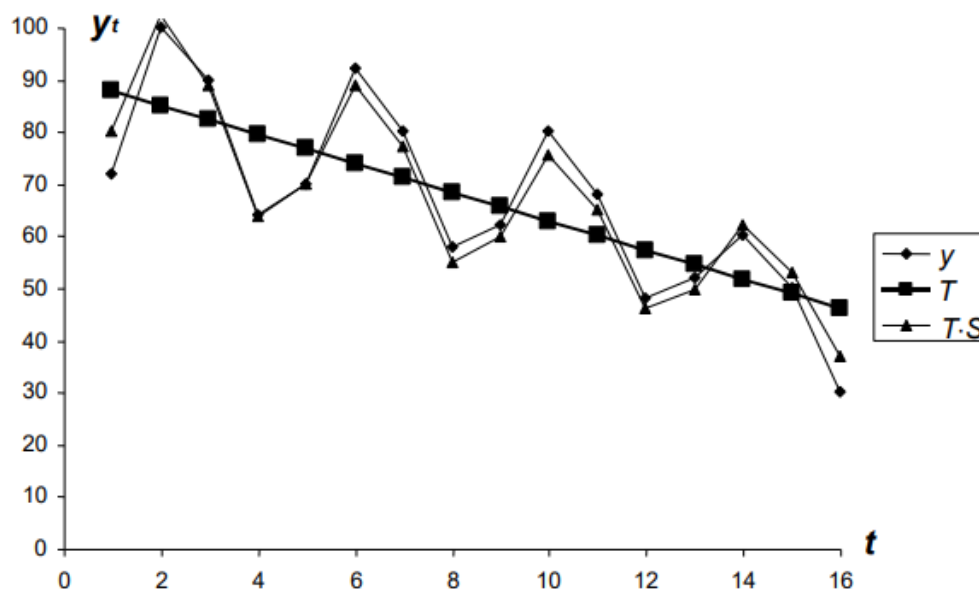


Рисунок 2 – Прибыль компании (фактические и выровненные значения)

Шаг 5. Найдем уровни ряда по мультипликативной модели, умножив уровни T на значения сезонной компоненты для соответствующих кварталов.

Шаг 6. Расчет ошибки в мультипликативной модели проводится по формуле $E = Y : (T \cdot S)$

Численные значения ошибки приведены в гр.7 табл.4.

Для того, чтобы сравнить мультипликативную модель с другими моделями временного ряда, можно по аналогии с аддитивной моделью использовать сумму квадратов абсолютных ошибок.

Абсолютные ошибки в мультипликативной модели определяются как

$$E = y_t - (T \cdot S)$$

В данной модели сумма квадратов абсолютных ошибок составляет 207,73. Общая сумма квадратов отклонений фактических уровней этого ряда от среднего значения равна 5023.

Таким образом, доля объясненной дисперсии уровней ряда равна:

$$\left(1 - \frac{207,73}{5023}\right) \cdot 100 = 0,959 \text{ или } 95,9\%.$$

Предположим, необходимо сделать прогноз ожидаемой прибыли по данным примера 1 компании за первое полугодие ближайшего следующего года.

Прогнозное значение F_t уровня временного ряда в мультипликативной модели в соответствии с соотношением $Y = T \cdot S \cdot E$ – это произведение трендовой и сезонной компонент.

Для определения трендовой компоненты за каждый квартал воспользуемся уравнением тренда $T = 90,57 - 2,273 \cdot t$.

Получим:

$$T_{17} = 90,57 - 2,273 \cdot 17 = 43,420;$$

$$T_{18} = 90,57 - 2,273 \cdot 18 = 40,647.$$

Значения сезонной компоненты равны:

$$S_1 = 0,914 \text{ (I квартал);}$$

$$S_2 = 1,202 \text{ (II квартал).}$$

Таким образом,

$$F_{17} = T_{17} \cdot S_1 = 43,420 \cdot 0,914 = 39,671;$$

$$F_{18} = T_{18} \cdot S_2 = 40,647 \cdot 1,202 = 48,865.$$

Прогноз ожидаемой прибыли компании на первое полугодие ближайшего следующего года составит: $(39,671 + 48,865) = 88,536$ тыс. долл.