

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ФГБОУ ВО Пензенская ГСХА

Н.М. Семикова

МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Пенза 2015

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ФГБОУ ВО Пензенская ГСХА

Кафедра физики и математики

Н.М. Семикова

МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Методические указания и задания
для самостоятельной работы**

Пенза 2015

УДК 519.2(075)
ББК 22.171(я7)
С 30

Рецензент – старший преподаватель кафедры «Организация и информатизация производства» Пензенской ГСХА О. В. Ментюкова.

Печатается по решению методической комиссии экономического факультета ФГБОУ ВО Пензенская ГСХА от 21 мая 2015 года, протокол № 78.

Семикова, Наталья Михайловна.

С30 Математика. Математический анализ: методические указания и задания для самостоятельной работы / Н.М. Семикова. – Пенза: РИО ПГСХА, 2015. – 110 с.

Методические указания и задания предназначены для выполнения самостоятельной работы по математике студентами, обучающимися по направлениям 38.03.02 «Менеджмент» и 38.03.01 «Экономика» (квалификация – бакалавр).

Методические указания содержат краткие теоретические сведения по основным темам курса математического анализа, решения типовых задач, контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения, что позволяет использовать пособие для аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов.

© ФГБОУ ВО
Пензенская ГСХА, 2015
© Н.М. Семикова, 2015

ВВЕДЕНИЕ

Математический анализ – это совокупность разделов математики, которые занимаются изучением функций и их обобщений методами дифференциального и интегрального исчисления. Он является основой для изучения других математических курсов, дает необходимый математический аппарат для изложения экономических дисциплин.

Данное пособие является методической разработкой для студентов, обучающихся по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент» при изучении раздела «Математический анализ» дисциплины Б.2.1 «Математика», и по направлению подготовки 38.03.01 «Экономика» при изучении дисциплины Б.2.3 «Математический анализ».

Методическое пособие предоставляет возможность организовать самостоятельную работу студентов, направленную на формирование следующих компетенций:

ОК-15 «Овладение методами количественного анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования» (для направления подготовки 38.03.02 «Менеджмент»);

ПК-1 «Способность собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов»;

ПК-2 «Способность на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов»;

ПК-3 «Способность выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами» (для направления подготовки 38.03.01 «Экономика»).

Данное пособие включает в себя следующие темы: «Предел и непрерывность функции», «Производная и дифференциал функции», «Применение производной к исследованию функции», «Неопределенный интеграл», «Определенный интеграл», «Функции нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения», «Числовые ряды» и задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов, ко-

торые могут быть использованы в качестве расчетно-графической работы.

Каждая тема содержит краткие теоретические сведения, методические рекомендации по использованию основных теорем и формул, подробно разобранные примеры решения задач, контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами.

Для контроля освоения раздела «Математический анализ» рекомендуется использовать задания для самостоятельной работы, включающие 30 вариантов, которые представлены в пособии.

Рекомендуется следующий порядок работы над материалом каждой темы:

- изучение литературы по теме;
- разбор примеров решения задач;
- подготовка ответов на контрольные вопросы;
- самостоятельное решение задач.

Тема 1 ПРЕДЕЛ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Литература

[1], глава 10, § 10.1–10.8

[2], глава 6, § 6.1–6.8

Предел функции

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для любого, сколь угодно малого, положительного числа ε существует положительное число δ , такое, что при всех x , отличных от a и удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$ (1.1)

Если $f(x)$ стремится к числу A при x , стремящемся к a , и при этом $x < a$ ($x > a$), то A называется *левым (правым) пределом функции* $f(x)$ при x , стремящемся к a .

Символическая запись: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0),$
 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0).$

Левый и правый пределы называются *односторонними пределами функции*.

Основные теоремы о пределах

1. $\lim_{x \rightarrow a} c = c, c = const$ (предел постоянной величины есть величина постоянная);
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x);$
3. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x);$
- 3*. $\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x), \quad c = const;$
- 3**. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^n = (\lim_{x \rightarrow a} f(x))^n$ (предел степени функции равен степени предела этой функции);

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x)}, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) \neq 0;$$

5. Функция не может иметь более одного предела;

6. Предел непрерывной функции при $x \rightarrow a$ равен частному значению этой функции при $x = a$, если это значение существует, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1.2)$$

Итак, при нахождении предела функции подставляем в функцию вместо x его предельное значение.

Раскрытие неопределенностей

Иногда при непосредственной подстановке вместо x его предельного значения, получаем выражения вида $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; $0 \cdot \infty$; 1^∞ ; 0^0 ; ∞^0 , которые называются *неопределенностями*. Они раскрываются по соответствующим правилам.

1. Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ следует:

а) разложить числитель и знаменатель на простейшие множители для дальнейшего их сокращения;

б) при наличии иррациональных выражений умножаем числитель и знаменатель на сопряженное выражение (для получения формул сокращенного умножения) и опять сокращаем одинаковые множители.

2. Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ делим числитель и знаменатель на переменную в высшей степени для сведения бесконечно большой величины к бесконечно малой величине, предел которой равен нулю.

Неопределённости вида $[\infty - \infty]$, $[0 \cdot \infty]$ сводятся путём алгебраических преобразований к неопределёностям вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

3. Часто употребляются и так называемые замечательные пределы.

При наличии тригонометрических выражений используют *первый замечательный предел*:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1.3)$$

Следствия: а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \sin kx}{kx} = k;$

б)
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cdot \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1; \end{aligned}$$

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} kx}{x} = k.$

Неопределённость вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ раскрывается с помощью *второго замечательного предела* и следствий из него.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e, \quad (1.4)$$

где e – основание натуральных логарифмов, т.е.

$$\log_e N = \ln N, \quad e \approx 2,71...$$

Другая форма записи второго замечательного предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e. \quad (1.5)$$

Следствия: а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^x = e^k;$

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{kx} = e^k;$

в) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^{nx} = e^{kn}.$

Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 , если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (1.6)$$

Условие непрерывности функции (1.6) означает выполнение трех условий:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в её окрестности, т.е. существует $f(x_0)$;

2) функция $f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow x_0$:

2а) существует конечный $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$;

2б) существует конечный $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$;

2в) $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$;

3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке, т.е. выполняется равенство (1.6).

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва этой функции*.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва первого рода* функции $y = f(x)$, если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы), т.е. $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$ и $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2$. При этом:

а) если $A_1 = A_2$, то точка x_0 называется *точкой устранимого разрыва*;

б) если $A_1 \neq A_2$, то точка x_0 называется *точкой неустранимого (конечного) разрыва*.

Величину $\Delta = |A_1 - A_2|$ называют *скачком функции* в точке разрыва первого рода.

Точка разрыва x_0 называется *точкой разрыва второго рода* функции $y = f(x)$, если, по крайней мере, один из односторонних пределов (справа или слева) не существует или равен бесконечности.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Вычислить пределы:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2+x-x^2}{x+x^2}$ при $x_0 = 2$, $x_0 = -1$, $x_0 = \infty$;
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x}$;
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x-4}$.

Решение.

$$1a) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+x-x^2}{x+x^2} = \frac{2+2-2^2}{2+2^2} = 0.$$

Так как данная функция непрерывна в точке $x = 2$, а знаменатель при $x = 2$ отличен от нуля, то, чтобы найти её предел при $x \rightarrow 2$, достаточно аргумент x заменить его предельным значением.

1б) При $x = -1$ знаменатель и числитель дроби равны нулю, значит, имеет место неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для вычисления предела следует разложить числитель и знаменатель на множители по формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1, x_2 – корни многочленов.

$$2 + x - x^2 = 0; \quad D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 9,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2}; \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

$$2 + x - x^2 = -(x - 2)(x + 1)$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2+x-x^2}{x+x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-(x-2)(x+1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x+2}{x} = \frac{-(-1)+2}{-1} = -3.$$

1в) При $x \rightarrow \infty$ числитель и знаменатель следует разделить на x^2 – наивысшую степень x в данной дроби, далее применить основные теоремы о пределах и свойствах бесконечно малых величин:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+x-x^2}{x+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{0+0-1}{0+1} = -1,$$

где $\frac{2}{x^2}$; $\frac{1}{x}$ – бесконечно малые, предел их равен нулю.

2. Для вычисления данного предела следует умножить и разделить числитель и знаменатель дроби на 2 и воспользоваться свойствами пределов и формулой (1.3)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot 2}{3 \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3} = 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

3. Воспользовавшись свойствами степеней и свойствами пределов, надо преобразовать подпредельное выражение, а затем воспользоваться формулой (1.4)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x-4} = \left[1^\infty\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^{-4} = e^{\frac{3}{2}} \cdot (1+0)^{-4} = e^{\frac{3}{2}}.$$

Пример 1.2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x+9}}{x}$.

Решение.

В данном примере имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение, т.е. на $3 + \sqrt{x+9}$. Отсюда,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x+9}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 - \sqrt{x+9})(3 + \sqrt{x+9})}{x(3 + \sqrt{x+9})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9 - x - 9}{x(3 + \sqrt{x+9})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(3 + \sqrt{x+9})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3 + \sqrt{x+9}} = \frac{-1}{3 + \sqrt{9}} = \frac{-1}{6}. \end{aligned}$$

Пример 1.3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 3x$.

Решение.

Неопределенность вида $0 \cdot \infty$. Представим функцию $\varphi(x) = x \cdot \operatorname{ctg} 3x$ в виде дроби, которая в точке $x = 0$ дает неопределен-

ность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, после чего преобразуем её так, чтобы можно было воспользоваться первым замечательным пределом (1.3).

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 3x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \cos 3x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\sin 3x} \cdot \cos 3x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 3x}{x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \cos 3x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Пример 1.4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x}$.

Решение.

Положим $\arcsin 5x = y$, тогда $5x = \sin y$, откуда $x = \frac{1}{5} \sin y$.

Если $x \rightarrow 0$, то $y \rightarrow 0$, следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\frac{1}{5} \sin y} = 5 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\sin y} = 5.$$

Пример 1.5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{5x-1}$.

Решение.

При $x \rightarrow \infty$ $5x-1 \rightarrow \infty$. Выясним, как ведет себя основание функции при $x \rightarrow \infty$, раскрывая неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{2x}{x} - \frac{3}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{2 - \frac{3}{x}} = \frac{2}{2} = 1, \text{ так как } \frac{1}{x}, \frac{3}{x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Значит, в данном примере имеем неопределенность вида $[1^\infty]$. Приведем данный предел ко второму замечательному пределу (1.4), выделяя в основании слагаемое равное 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3} \right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+1}{2x-3} - 1 \right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2x+1-2x+3}{2x-3} \right)^{5x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x-3}\right)^{5x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4}{2x-3}\right)^{\frac{2x-3}{4}} \right]^{(5x-1) \frac{4}{2x-3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{20x-4}{2x-3}}.$$

Вычислим отдельно предел показателя степени:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20x-4}{2x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{20 - \frac{4}{x}}{2 - \frac{3}{x}} = \frac{20}{2} = 10, \text{ так как } \frac{4}{x}, \frac{3}{x} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-3}\right)^{5x-1} = e^{10}.$

Пример 1.6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \sin 5x}.$

Решение.

Имеем неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$. Воспользуемся формулой триго-

нометрии: $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, а затем применим первый замечательный предел.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 2x}{x \cdot \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x \right)^2}{x \cdot \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 4x^2}{5x^2} = \frac{8}{5}.$$

Пример 1.7. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + \sin 4x}{\sin 5x - \sin x}.$

Решение.

Здесь неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, так как $\sin 0 = 0$. Используем

формулы тригонометрии: $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ и

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$. А затем учтем, что $\cos 0 = 1$, и

воспользуемся первым замечательным пределом.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x + \sin 4x}{\sin 5x - \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin 5x \cdot \cos x}{2 \sin 2x \cdot \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{5x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \frac{5}{2}.\end{aligned}$$

Пример 1.8. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\cos \frac{\pi x}{6}}$.

Решение.

При подстановке вместо x предельного значения 3, получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$, так как $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. Сделаем замену: $3-x=t$, тогда $x=3-t$, при $x \rightarrow 3$ $t \rightarrow 0$. Затем воспользуемся формулой приведения $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ и первым замечательным пределом.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{\cos \frac{\pi x}{6}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cos \frac{\pi(3-t)}{6}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{6}\right)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{6}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\pi t}{6}}{\sin \frac{\pi t}{6}} \cdot \frac{6}{\pi} \right) = \frac{6}{\pi}.\end{aligned}$$

Пример 1.9. Функция y задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента x :

$$y = \begin{cases} x+2, & \text{если } x \leq -2; \\ x^2-4, & \text{если } -2 < x < 1; \\ 4-2x, & \text{если } x \geq 1. \end{cases}$$

Требуется: 1) найти точки разрыва функции, если они существуют; 2) найти предел функции y при приближении аргумента x к точке разрыва слева и справа; 3) найти скачок функции в точке разрыва.

Решение.

Данная функция определена и непрерывна в интервалах $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$ и $(1, +\infty)$. При $x = -2$ и $x = 1$ меняется аналитическое

выражение функции, и только в этих точках функция может иметь разрыв. Определим односторонние пределы в точке $x = -2$:

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} y = \lim_{x \rightarrow -2-0} (x+2) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} y = \lim_{x \rightarrow -2+0} (x^2 - 4) = 0.$$

Односторонние пределы существуют, конечны и совпадают. Функция в этой точке непрерывна. Определим односторонние пределы в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} y = \lim_{x \rightarrow 1-0} (x^2 - 4) = -3; \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} y = \lim_{x \rightarrow 1+0} (4 - 2x) = 2.$$

Так как односторонние пределы функции y в точке $x = 1$ не равны между собой, то в этой точке функция имеет разрыв первого рода.

Скачок функции $\Delta = |2 - (-3)| = 5$. График функции показан на рисунке 1.

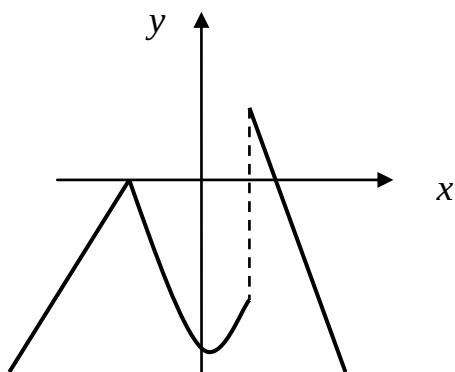


Рисунок 1 – График функции из примера 1.9

Пример 1.10. Исследовать на непрерывность функцию $y = \frac{3x}{x+2}$.

Решение.

Область определения функции $D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Так как функция элементарная, то она непрерывна на области определения, т.е. на множестве $(-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$. В точке $x = -2$ функция не существует, значит, $x = -2$ — точка разрыва. Классифицируем точку разрыва. Для этого вычислим односторонние пределы функции в точке $x = -2$.

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{3x}{x+2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{3x}{x+2} = -\infty.$$

При этом числитель $3x \rightarrow -6 < 0$, а знаменатель в первом случае стремится к нулю, оставаясь отрицательным, а во втором — стремится к нулю, оставаясь положительным.

Так как односторонние пределы равны бесконечности, то $x = -2$ – точка разрыва 2-го рода.

Контрольные вопросы

1. Что называется пределом функции непрерывного аргумента?
2. Сформулируйте основные теоремы о пределах функции.
3. Какая переменная величина называется бесконечно малой, бесконечно большой? Какова зависимость между ними?
4. Сформулируйте и напишите первый и второй замечательные пределы.
5. Укажите основные приемы раскрытия неопределенностей.
6. Дайте определение непрерывности функции $y = f(x)$ в точке и области.
7. Что называется точкой разрыва функции?
8. Дайте определения односторонних пределов функции в точке.

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Вычислить пределы:

- | | |
|---|--|
| а) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 7);$ | д) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4};$ |
| б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 1}{2x^3 + 6x^2 - 5};$ | е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - x + 1}{5x^3 + 2x^2 - 1};$ |
| в) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 + 3x - 1};$ | ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 4}{3x^2 + x + 2};$ |
| г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 + 2x^2 - 3}{3x};$ | з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 4x - 2}{x^3 - 3x^2 + 4}.$ |

1.2. Вычислить пределы:

- | | |
|---|--|
| а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x};$ | в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{1/x};$ |
| б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{2x^2};$ | г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x.$ |

1.3. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{x+1}}{x}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x+1}}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{1 - \sqrt{1 + \operatorname{tg} x}}$;

г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 - \sqrt{x+4}}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{\sin 4x}$;

е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{1-\sqrt{x}}$;

ж) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$;

з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+1} \right)$.

1.4. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 5x)$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} (1-3x)^{\frac{x-2}{6x}}$;

б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-5}{2x+1} \right)^{x-1}$;

г) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{2x^2-3} \right)^{4x^2+1}$.

1.5. Вычислить пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2+13x+3}{3x^2+7x-6}$;

б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2+8x+8}{3x^2+5x-2}$.

1.6. Дана функция $y = \frac{2x}{x-1}$ и два значения аргумента

$x_1 = 1, x_2 = 2$.

а) Проверить, является ли данная функция непрерывной или разрывной при данных значениях аргумента.

б) Найти односторонние пределы в точках разрыва.

в) Построить график функции на интервале $[-6; 6]$.

1.7. Дана функция. Найти её точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва.

а) $y = \frac{3}{x+1}$; б) $y = \frac{1}{x^2-4}$; в) $y = \frac{3x-5}{x^2+2x+10}$;

г) $y = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 & \text{при } x \leq 2, \\ x & \text{при } x > 2. \end{cases}$ д) $y = \begin{cases} 2\sqrt{x} & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \\ 4-2x & \text{при } 1 < x < 2,5, \\ 2x-7 & \text{при } x \geq 2,5. \end{cases}$

Тема 2 ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Литература

[1], глава 11, § 11.1–11.4

[2], глава 7, § 7.1–7.7, глава 9, § 9.1–9.3

Производная функции

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует и конечен) отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Итак, по определению

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{или} \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Функция $y = f(x)$, имеющая производную в каждой точке интервала $(a;b)$, называется *дифференцируемой* в этом интервале. Операция нахождения производной функции называется *дифференцированием*.

Геометрический смысл производной. Производная от функции $y = f(x)$ при данном значении x равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке с абсциссой x : $y' = k = \operatorname{tg} \alpha$.

Механический смысл производной. Производная от пути по времени есть скорость. Производная от скорости по времени есть ускорение: $s'(t) = v(t)$, $v'(t) = a(t)$.

Производная сложной функции равна произведению производной от функции по промежуточному аргументу на производную от промежуточного аргумента, т.е. если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Таблица производных

Она включает в себя правила дифференцирования, производные всех основных элементарных функций, аргументом в которых является функция u , зависящая от x .

$$1. c' = 0$$

$$2. u'_u = 1$$

$$3. (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$4. (uv)' = u'v + vu'$$

$$5. (cu)' = cu'$$

$$6. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$7. (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$8. (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$9. (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$10. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$11. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$

$$12. (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$13. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$14. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$15. (\operatorname{tgu})' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$16. (\operatorname{ctgu})' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$$

$$17. (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$18. (\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$19. (\operatorname{arctgu})' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$20. (\operatorname{arcctgu})' = -\frac{u'}{1+u^2}$$

Замечание. Если функция простая, то умножать на u' не нужно. Например, $(x^n)' = nx^{n-1}$, $(\sin x)' = \cos x$ и т. д.

Чтобы найти производную функции, неявно заданной уравнением $F(x, y) = 0$, нужно продифференцировать обе части этого уравнения по x , считая y функцией от x . А затем выразить из полученного уравнения y' .

Производной n -го порядка (или *n -й производной*) называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Дифференциал функции $y = f(x)$ равен произведению производной этой функции на дифференциал независимой переменной

$$dy = y' \cdot dx.$$

Дифференциалом n -го порядка называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$ -го порядка:

$$d^n y = y^{(n)} dx^n.$$

Примеры решения задач

Пример 2.1. Найти производные функций и их дифференциалы:

$$\begin{array}{ll} 1. \quad y = 3x^4 - \frac{5}{3x^3} - 9\sqrt[3]{x^2} - 1; & 2. \quad y = \frac{e^{2x}}{2+x^2}; \\ 3. \quad y = (\ln 3x - \sin \frac{x}{3})^3; & 4. \quad y = x^3 + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos x. \end{array}$$

Решение.

1. Используя свойства степеней, данная функция записывается в виде:

$$y = 3x^4 - \frac{5}{3}x^{-3} - 9x^{\frac{2}{3}} - 1,$$

т.е. вводятся дробные и отрицательные показатели степени. Далее применяется правило (3) из таблицы производных дифференцирования алгебраической суммы и формула (8) дифференцирования степенной функции:

$$y' = 3 \cdot 4x^3 - \frac{5}{3} \cdot (-3)x^{-4} - 9 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 0 = 12x^3 + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}.$$

Дифференциал данной функции имеет вид:

$$dy = (12x^3 + \frac{5}{x^4} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}})dx.$$

2. Применяя правило (6) дифференцирования частного двух функций, а также формулу (12), производная данной функции находится следующим образом:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{e^{2x}}{2+x^2} \right)' = \frac{(e^{2x})'(2+x^2) - e^{2x}(2+x^2)'}{(2+x^2)^2} = \frac{e^{2x}(2x)'(2+x^2) - e^{2x} \cdot 2x}{(2+x^2)^2} = \\ &= \frac{2e^{2x}(2+x^2) - 2xe^{2x}}{(2+x^2)^2} = \frac{2e^{2x}(2+x^2-x)}{(2+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Дифференциал данной функции:

$$dy = \frac{2e^{2x}(2+x^2-x)}{(2+x^2)^2} dx.$$

Используя правило дифференцирования сложной функции и таблицу производных, находятся производные следующих функций:

3.

$$\begin{aligned} y' &= \left(\left(\ln 3x - \sin \frac{x}{3} \right)^3 \right)' = 3 \left(\ln 3x - \sin \frac{x}{3} \right)^2 \cdot \left(\ln 3x - \sin \frac{x}{3} \right)' = \\ &= 3 \left(\ln 3x - \sin \frac{x}{3} \right)^2 \cdot \left(\frac{(3x)'}{3x} - \cos \frac{x}{3} \cdot \left(\frac{x}{3} \right)' \right) = 3 \left(\ln 3x - \sin \frac{x}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} \right). \end{aligned}$$

Производную произвольной функции находят, начиная с последнего действия. В данном случае последнее действие – возведение в третью степень, поэтому воспользовались производной степенной функции $(u^3)' = 3u^2 \cdot u'$, где $u = \ln 3x - \sin \frac{x}{3}$.

Дифференциал функции:

$$dy = 3 \left(\ln 3x - \sin \frac{x}{3} \right)^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3} \cos \frac{x}{3} \right) dx.$$

4.

$$\begin{aligned} y' &= \left(x^3 + \sqrt{1-x^2} \cdot \cos x \right)' = (x^3)' + \left(\sqrt{1-x^2} \cdot \cos x \right)' = \\ &= 3x^2 + \left(\sqrt{1-x^2} \right)' \cos x + \sqrt{1-x^2} (\cos x)' = 3x^2 + \frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} \cos x + \\ &+ \sqrt{1-x^2} (-\sin x) = 3x^2 - \frac{x \cos x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \cdot \sin x. \end{aligned}$$

Дифференциал функции:

$$dy = \left(3x^2 - \frac{x \cos x}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2} \cdot \sin x \right) dx.$$

Пример 2.2. Найти производные неявно заданных функций:

$$1) \sin x + xy - 3y^2 = 0; \quad 2) \cos(xy) - \frac{x}{y} = 0.$$

Решение.

1) Продифференцируем обе части этого уравнения по x , считая y функцией от x .

$$(\sin x)' + (xy)' - (3y^2)' = 0',$$

$$\cos x + x'y + xy' - 6y \cdot y' = 0.$$

Выразим теперь y' :

$$y'(x - 6y) = -y - \cos x, \quad y' = \frac{-y - \cos x}{x - 6y} \quad \text{или} \quad y' = \frac{y + \cos x}{6y - x}.$$

$$2) (\cos(xy))' - \left(\frac{x}{y}\right)' = 0,$$

$$-\sin(xy)(y + xy') - \frac{y - xy'}{y^2} = 0.$$

Находим производную y' :

$$-y^3 \sin(xy) - xy^2 y' \sin(xy) - y + xy' = 0,$$

$$y'[x - xy^2 \sin(xy)] = y + y^3 \sin(xy),$$

откуда

$$y' = \frac{y + y^3 \sin(xy)}{x - xy^2 \sin(xy)} = \frac{y(1 + y^2 \sin(xy))}{x(1 - y^2 \sin(xy))}.$$

Пример 2.3. Найти производную второго порядка функции $y = \arctg 5x$.

Решение.

Найдем сначала первую производную этой функции:

$$y' = \frac{1}{1 + (5x)^2} \cdot (5x)' = \frac{5}{1 + 25x^2}.$$

При нахождении второй производной воспользуемся формулой (10) из таблицы производных, где $u = 1 + 25x^2$.

$$y'' = \left(\frac{5}{1 + 25x^2}\right)' = 5 \cdot \left(\frac{1}{1 + 25x^2}\right)' = 5 \cdot \left(-\frac{1}{(1 + 25x^2)^2}\right) \cdot (1 + 25x^2)' =$$

$$= -\frac{5}{(1 + 25x^2)^2} \cdot 25 \cdot 2x = -\frac{250x}{(1 + 25x^2)^2}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение производной данной функции.
2. Каков геометрический смысл производной?
3. Каков механический смысл производной?
4. В чем заключается правило дифференцирования сложной функции?
5. Приведите формулы дифференцирования основных элементарных функций.
6. Как найти производную неявной функции?
7. Что называется дифференциалом функции? Как выражается дифференциал функции через ее производную?
8. Каков геометрический смысл дифференциала данной функции?
9. Что называется производной n -го порядка данной функции?
10. Что называется дифференциалом n -го порядка данной функции?

Задачи для самостоятельного решения

2.1. Найти производные функций:

1. $y = x + 3x^2 - \frac{x^3}{3}$;
2. $y = x - 2\sqrt{x}$;
3. $y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$;
4. $y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + 4$;
5. $y = x^2 \sin x$;
6. $y = (2 + 3x)^5$;
7. $y = \sin(2x - 1)$;
8. $y = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x}$;
9. $y = 2^x + 2^{3x}$;
10. $y = \cos^2 x - 2 \ln \cos x$;
11. $y = 3\sqrt{x} \cdot e^{-x}$;
12. $y = x(1 - \ln x)$;
13. $y = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$;
14. $y = \arcsin \sqrt{x}$;
15. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1 - x^2}$.

2.2. Найти производные функций, заданных неявно:

1. $5x^2 + 3xy - 2y^2 + 2 = 0$;
2. $ye^x - xe^y = xy$;
3. $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$.

2.3. Найти производные высшего порядка:

1. $y = \frac{3x + 2}{x^2 - 2x + 5}$; y'' ?
2. $y = x \cdot \sqrt[3]{(x - 5)^2}$; y'' ?
3. $y = x \cdot \cos x$; y''' ?

2.4. Найти значение производной функции $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 12})$ в точке $x = 2$.

Тема 3 ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

Литература

[1], глава 11, § 11.5–11.8

[2], глава 8, § 8.1–8.10

Правило Лопиталя

Теорема 1. Предел отношения двух бесконечно малых или двух бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных, если последний предел существует (конечный или бесконечный).

То есть, если имеет место неопределенность вида $\left[\frac{0}{0} \right]$ или $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$,

то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (x_0 – число или ∞).

Возрастание и убывание функций. Экстремумы функций

Функция $y = f(x)$ в промежутке $(a; b)$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если для любых двух значений x_1 и x_2 из этого промежутка неравенство $x_2 > x_1$ влечет за собой неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$).

Функция, возрастающая или убывающая на некотором промежутке, называется *монотонной*.

Теорема 2 (достаточный признак монотонности функции).

Если во всех точках некоторого промежутка $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на этом промежутке.

Функция $f(x)$ имеет максимум (минимум) в точке x_0 , если в некоторой окрестности этой точки (при $x \neq x_0$) выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции.

Теорема 3 (необходимое условие существования экстремума).

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0 , то её производная в этой точке равна нулю или не существует: $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0) = \infty$.

Точки, в которых первая производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками 1-го рода*.

Теорема 4 (достаточный признак существования экстремума).

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 и дифференцируема во всех точках этого интервала, кроме, быть может, самой точки x_0 .

Если при переходе слева направо через критическую точку x_0 производная y' меняет свой знак с «+» на «-», то в этой точке функция имеет максимум.

Если при переходе слева направо через критическую точку x_0 производная y' меняет свой знак с «-» на «+», то в этой точке функция имеет минимум.

Если при переходе слева направо через критическую точку x_0 производная y' не меняет свой знак, то в этой точке функция не имеет экстремума.

Итак, для нахождения экстремума функции следует:

1. Найти y' ;
2. Найти критические точки, т.е. точки в которых $y' = 0$ или $y' = \infty$;
3. Исследовать смену знаков первой производной при переходе через критические точки на основании достаточного признака и сделать выводы о существовании экстремумов в критических точках;
4. Найти значения $y_{\min} = f(x_{\min})$ и $y_{\max} = f(x_{\max})$.

Иногда исследование на экстремум целесообразно проводить с помощью второй производной, особенно в задачах прикладного характера.

Теорема 5 (исследование функции на экстремум с помощью второй производной).

Если в точке x_0 первая производная функции равна нулю, а вторая производная существует и отлична от нуля, то в точке x_0 функция имеет максимум, если $f''(x_0) < 0$ и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *выпуклым (вогнутым)* на интервале $(a;b)$, если он расположен ниже (выше) касательной, проведенной в любой точке этого интервала.

Теорема 6 (достаточный признак выпуклости и вогнутости функции).

Если функция $y = f(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$ имеет отрицательную вторую производную, т.е. $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый. Если же $f''(x) > 0$ для любых $x \in (a;b)$, то график вогнутый.

Справедлива и обратная теорема.

Точка графика непрерывной функции, в которой выпуклость меняется на вогнутость или наоборот, называется *точкой перегиба*.

Теорема 7 (необходимое условие существования перегиба).

Если x_0 – точка перегиба графика функции $y = f(x)$, то её вторая производная в этой точке равна нулю или не существует: $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0) = \infty$.

Теорема 8 (достаточный признак существования точки перегиба).

Если вторая производная $f''(x)$ при переходе через точку x_0 , в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой x_0 есть точка перегиба.

Точки, в которых вторая производная $y''(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками второго рода* для функции $y = f(x)$.

Асимптоты графика функции

Построение графика функции значительно облегчается, если знать его асимптоты.

Прямая называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние от точки M графика до этой прямой стремится к нулю при удалении точки M в бесконечность.

Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \infty$, или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \infty$.

Вертикальные асимптоты нужно искать в точках разрыва второго рода и на границах области определения.

Уравнение *наклонной асимптоты* будем искать в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \text{ а } b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx).$$

Если $k = 0$, то $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, тогда $y = b$ является уравнением *горизонтальной асимптоты*.

Общая схема исследования функции и построения графика

Исследование функции $y = f(x)$ целесообразно вести в определенной последовательности:

1. Найти область определения функции;
2. Определить четность ($f(-x) = f(x)$) или нечетность ($f(-x) = -f(x)$) функции. График четной функции симметричен относительно оси Oy , а нечетной – относительно начала координат;
3. Найти (если можно) точки пересечения графика с осями координат;
4. Исследовать функцию на непрерывность. Найти точки разрыва и вычислить односторонние пределы;
5. Найти асимптоты графика функции;
6. Найти интервалы монотонности функции и её экстремумы;

7. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции, точки его перегиба;

8. Построить график функции. В системе координат провести асимптоты; нанести точки пересечения графика функции с осями координат, точки экстремума и точки перегиба графика функции; определить направление кривой, учитывая интервалы возрастания, убывания, выпуклости и вогнутости кривой. Если есть необходимость, дополнительно найти значения функции для некоторых значений аргумента и нанести полученные точки. Затем провести плавную кривую по отмеченным точкам, приближая её к асимптотам. Концы кривой проводят параллельно асимптотам.

Примеры решения задач

Пример 3.1. Вычислить пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{e^x - e}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Решение.

а) При подстановке вместо x предельного значения 1 получаем неопределенность $\left[\frac{0}{0} \right]$. Рассмотренные ранее методы раскрытия неопределенностей не применимы в данном примере. Воспользуемся правилом Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{e^x} = \frac{2}{e}.$$

б) Здесь имеется неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Для ее раскрытия воспользуемся правилом Лопиталя.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(\sqrt{x})'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

Пример 3.2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^3}$.

Решение.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x - x \cdot \cos x)'}{(x^3)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \cdot \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(3x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{3} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Правило Лопиталя в одном примере может применяться несколько раз.

Пример 3.3. Вычислить пределы: а) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$;

б) $\lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} (2-x)$.

Решение.

а) Так как при $x \rightarrow 1$ $\ln x \rightarrow 0$, то имеем неопределенность вида $[\infty - \infty]$. Приводя дроби к общему знаменателю, перейдем к неопределенности $\left[\frac{0}{0} \right]$ и воспользуемся правилом Лопиталя.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x - x + 1)'}{((x-1) \ln x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x} \right)'}, = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

б) При $x \rightarrow 2$ $\frac{\pi x}{4} \rightarrow \frac{\pi}{2}$, а $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \rightarrow \infty$, следовательно, имеем неопределенность вида $[\infty \cdot 0]$. Чтобы воспользоваться правилом Лопита-

ля, её нужно преобразовать к одному из двух видов: $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ или $\begin{bmatrix} \infty \\ \infty \end{bmatrix}$.

Здесь проще и разумнее опустить в знаменатель $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} (2-x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)'}{\left(\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4} \right)'}, = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{-\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi x}{4}} \cdot \frac{\pi}{4}} = \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} \sin^2 \frac{\pi x}{4} = \frac{4}{\pi} \cdot 1 = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

Пример 3.4. Исследовать функцию и построить её график:

$$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2.$$

Решение. Данная функция существует при любом значении x , значит, областью существования функции является вся числовая ось. Функция непрерывна на своей области определения. Следовательно, вертикальных асимптот нет.

При $x=0$ имеем $y=2$. Точка $A(0;2)$ – точка пересечения с осью Oy .

Функция ни чётная, ни нечётная, так как

$$y(-x) = \frac{1}{3}(-x)^3 + (-x)^2 - 3(-x) + 2 = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 2 \neq -y(x) \neq y(x).$$

$y(x)$ – непериодическая функция.

Для нахождения точек экстремума определим первую производную функции и приравняем её к нулю:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2 \right)' = x^2 + 2x - 3; \quad \text{т.е. } x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Корни этого уравнения: $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$; $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ – критические точки 1-го рода.

Эти точки разбивают числовую ось на три интервала: $(-\infty; -3)$; $(-3; 1)$; $(1; +\infty)$.

Разложим квадратный трёхчлен первой производной на множители:

$$y' = x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3).$$

Из полученного разложения видно, что в первом интервале производная положительная, во втором интервале – отрицательная, в третьем – положительная (таблица 1).

Таблица 1 – Интервалы возрастания и убывания функции примера 3.4

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	0	–	0	+
y	↑	<i>max</i>	↓	<i>min</i>	↑

Так как при переходе через точку $x = -3$ первая производная меняет свой знак с плюса на минус, то в этой точке функция имеет максимум. Так как производная $y'(x)$ при переходе через критическую точку $x = 1$ меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке функция имеет минимум.

Далее вычислим значения функции в точках экстремума:

$$y_{\max} = y(-3) = \frac{1}{3}(-3)^3 + (-3)^2 - 3(-3) + 2 = 11;$$

$$y_{\min} = y(1) = \frac{1}{3}(1)^3 + (1)^2 - 3(1) + 2 = \frac{1}{3}.$$

Точка $B(-3; 11)$ – точка максимума, точка $C(1; \frac{1}{3})$ – точка минимума.

Для нахождения точки перегиба графика функции, интервалов выпуклости и вогнутости, находим вторую производную $y''(x)$ и приравняем её к нулю:

$$y'' = 2x + 2 = 0.$$

Из полученного уравнения находится точка $x = -1$ – критическая точка 2-го рода. Эта точка разбивает числовую ось на два интервала: $(-\infty; -1); (-1; +\infty)$.

В первом интервале вторая производная отрицательная, а во втором – положительная, значит, в первом интервале график функции выпуклый, а во втором – вогнутый (таблица 2).

Так как $y''(x)$ при переходе через точку $x = -1$ меняет знак, то $x = -1$ – абсцисса точки перегиба графика функции. Ордината точки перегиба:

$$y(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) + 2 = \frac{17}{3} \approx 5,7.$$

Таблица 2 – Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции примера 3.4

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; +\infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$	перегиб	$\cup$

Для определения уравнения наклонной асимптоты $y = kx + b$ воспользуемся формулами: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$.

Тогда
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}x^2 + x - 3 + \frac{2}{x} \right) = \infty.$$

Следовательно, данная функция наклонных асимптот не имеет. По полученным данным строим график функции (рисунок 2):

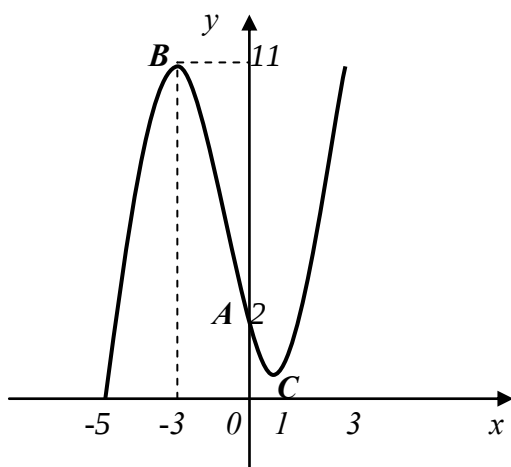


Рисунок 2 – График функции из примера 3.4

Пример 3.5. Исследовать функцию и построить её график:

$$y = \frac{x^2 + 20}{x - 4}.$$

Решение.

1. Область определения:

$$D(y) = \{x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)\}.$$

2. Функция ни чётная, ни нечётная, так как

$$y(-x) = \frac{(-x)^2 + 20}{-x - 4} = \frac{x^2 + 20}{-(x + 4)} \neq -y(x) \neq y(x).$$

2. При $x = 0$ имеем $y = -5$. Точка $A(0; -5)$ – точка пересечения с осью Oy .

$y \neq 0$, так как $x^2 + 20 \neq 0$, следовательно, точек пересечения с осью Ox нет.

4. Исследуем функцию на непрерывность.

Заданная функция непрерывна всюду, кроме точки $x = 4$. Вычислим её односторонние пределы в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow 4-0} y = \lim_{x \rightarrow 4-0} \frac{x^2 + 20}{x - 4} = \frac{36}{-0} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 4+0} y = \lim_{x \rightarrow 4+0} \frac{x^2 + 20}{x - 4} = \frac{36}{+0} = +\infty.$$

Таким образом, точка $x = 4$ является для заданной функции точкой разрыва второго рода, а прямая $x = 4$ – вертикальной асимптотой графика.

5. Для определения уравнения наклонной асимптоты $y = kx + b$ воспользуемся формулами: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$; $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$.

$$\text{Тогда } k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 20}{x^2 - 4x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 + \frac{20}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 - \frac{4}{x} \right)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 20}{x - 4} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 20 - x^2 + 4x}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 20}{x - 4} = 4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ – наклонная асимптота графика.

6. Для нахождения точек экстремума определим первую производную функции и приравняем её к нулю:

$$y' = \frac{2x \cdot (x - 4) - (x^2 + 20)}{(x - 4)^2} = \frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2};$$

$$\frac{x^2 - 8x - 20}{(x - 4)^2} = 0; \quad x^2 - 8x - 20 = 0; \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 10.$$

Таблица 3 – Интервалы возрастания и убывания функции примера 3.5

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 4)$	4	$(4; 10)$	10	$(10; +\infty)$
y'	$+$	0	$-$	не сущ.	$-$	0	$+$
y	$\uparrow$	$\max$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\min$	$\uparrow$

Далее вычислим значения функции в точках экстремума:

$$y_{\max} = y(-2) = \frac{(-2)^2 + 20}{-2 - 4} = -4;$$

$$y_{\min} = y(10) = \frac{10^2 + 20}{10 - 4} = 20.$$

Точка $B(-2; -4)$ – точка максимума, точка $C(10; 20)$ – точка минимума.

7. Для нахождения точки перегиба графика функции, интервалов выпуклости и вогнутости находим вторую производную $y''(x)$ и приравняем её к нулю:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{(2x-8)(x-4)^2 - 2(x-4)(x^2-8x-20)}{(x-4)^4} = \\ &= \frac{2(x-4)[(x-4)^2 - (x^2-8x-20)]}{(x-4)^4} = \frac{36}{(x-4)^3}. \end{aligned}$$

Так как $y'' \neq 0$, то график заданной функции точек перегиба не имеет. Остается выяснить вопрос об интервалах его выпуклости и вогнутости.

Таблица 4 – Интервалы выпуклости и вогнутости графика функции примера 3.5

x	$(-\infty; 4)$	4	$(4; +\infty)$
y''	$-$	не сущ.	$+$
y	$\cap$		$\cup$

8. Построим график функции (рисунок 3).

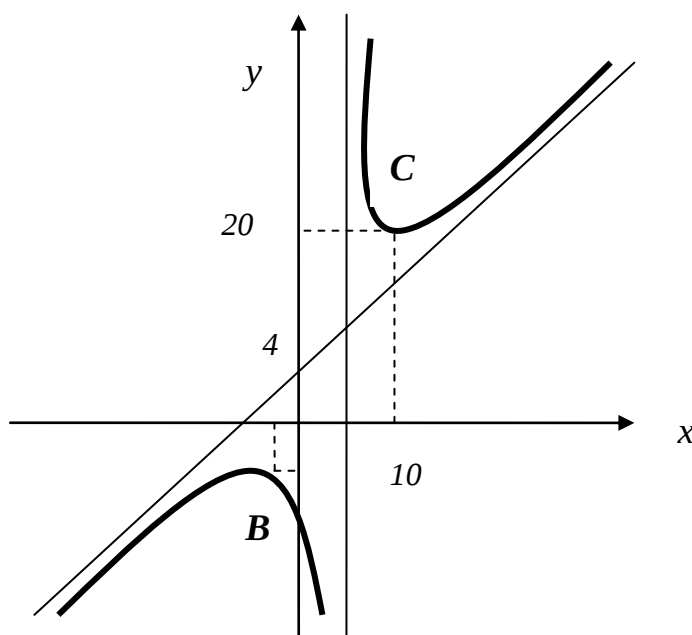


Рисунок 3 – График функции из примера 3.5

Контрольные вопросы

1. Какая функция называется возрастающей (убывающей) на интервале $(a;b)$?
2. Сформулируйте достаточный признак возрастания (убывания) функции.
3. Что называется максимумом (минимумом) функции?
4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
5. Сформулируйте достаточные признаки существования экстремума.
6. Как отыскать наибольшее и наименьшее значения функции на данном интервале?
7. Какая кривая называется выпуклой (вогнутой)?
8. В чем заключаются достаточные условия выпуклости и вогнутости кривой?
9. В чем состоят необходимый и достаточный признаки для существования точек перегиба?
10. Сформулируйте теорему Лопиталя. Приведите различные примеры применения правила Лопиталя.
11. Изложите общую схему исследования функций. Что называется асимптотой кривой? Как найти вертикальные и наклонные асимптоты кривой?

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Найти пределы функций, используя правило Лопиталя:

1. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 3x^2 - 2}{x^3 - 4x^2 + 5};$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 2x^2}{\sin^2 x};$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\sin^2 3x};$

4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 8x^2}{x^3 + x^2 - 5x - 2};$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 5x};$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[\ln(1+x)] + 5x}{\sin 3x};$

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right);$

8. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \operatorname{tg} 5x;$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} x \cdot \ln(x + e^x);$

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{5}{x^5 - 1} - \frac{7}{x^7 - 1} \right).$

3.2. Исследовать на экстремум следующие функции:

1. $y = x^3 - 3x^2 + 3x;$

2. $y = \frac{4x}{x^2 + 4};$

3. $y = \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x^2}.$

3.3. Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

1. $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ на отрезке $[0; 3];$

2. $y = x - 2 \ln x$ на отрезке $[1; e].$

3.4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба графиков функций:

1. $y = x + 36x^2 - 2x^3 - x^4;$ 2. $y = 1 - \ln(x^2 - 4);$ 3. $y = \frac{1}{x^2 - 4}.$

3.5. Найти асимптоты кривых:

1. $y = \frac{2x^2 - 9}{x + 2};$

2. $y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2};$

3. $y = xe^{-x}.$

3.6. Исследовать функции и построить их графики:

1. $y = x^3 + 3x^2;$

2. $y = \frac{(x+1)^2}{x-2};$

3. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}.$

Тема 4 НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Литература

[1], глава 13, § 13.1, 13.2

[2], глава 10, § 10.1–10.8

Неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство

$$F'(x) = f(x) \quad (\text{или } dF(x) = f(x)dx).$$

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется *неопределенным интегралом от функции $f(x)$* и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Отметим ряд свойств неопределенного интеграла, вытекающих из его определения.

1. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, а производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx; \quad (\int f(x)dx)' = f(x).$$

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

Благодаря этому свойству *правильность интегрирования проверяется дифференцированием*.

2. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int af(x)dx = a \cdot \int f(x)dx, \text{ где } a \neq 0 - \text{постоянная.}$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

5. (Инвариантность формулы интегрирования).

Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Таблица основных неопределенных интегралов

- | | |
|---|--|
| 1. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$ | 10. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$ |
| 2. $\int du = u + C$ | 11. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$ |
| 3. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$ | 12. $\int \frac{du}{\sin u} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{u}{2} \right + C$ |
| 4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ | 13. $\int \frac{du}{\cos u} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$ |
| 5. $\int e^u du = e^u + C$ | 14. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$ |
| 6. $\int \sin u du = -\cos u + C$ | 15. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$ |
| 7. $\int \cos u du = \sin u + C$ | 16. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$ |
| 8. $\int \operatorname{tg} u du = -\ln \cos u + C$ | 17. $\int \operatorname{ctg} u du = \ln \sin u + C$ |
| 9. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 \pm a^2} \right + C$ | |

Основные методы интегрирования

1. Метод непосредственного интегрирования

Метод интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции (или выражения) и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется *непосредственным интегрированием*.

2. Метод интегрирования подстановкой (заменой переменной)

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся (в случае «удачной» подстановки).

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную.

Тогда $dx = \varphi'(t)dt$, на основании свойства инвариантности формулы интегрирования неопределенного интеграла, получаем *формулу интегрирования подстановкой*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \quad (4.1)$$

Формула (4.1) также называется формулой замены переменных в неопределенном интеграле. После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x .

Иногда целесообразно подбирать подстановку в виде $t = \varphi(x)$, тогда

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)dx = \int f(t)dt, \text{ где } t = \varphi(x).$$

3. Метод интегрирования по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные.

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Полученная формула называется *формулой интегрирования по частям*. Она дает возможность свести вычисление интеграла $\int u dv$ к вычислению интеграла $\int v du$, который может оказаться существенно более простым, чем исходный.

Интегрирование по частям состоит в том, что подынтегральное выражение заданного интеграла представляется каким-либо образом в виде произведения двух сомножителей u и dv (это, как правило, можно осуществить несколькими способами); затем, после нахожде-

ния v и du , используется формула интегрирования по частям. Иногда эту формулу приходится использовать несколько раз.

Укажем некоторые типы интегралов, которые удобно вычислять методом интегрирования по частям:

1. Интегралы вида $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int P(x) \cdot \sin kx dx$, $\int P(x) \cos kx dx$, где $P(x)$ – многочлен, k – число. Удобно положить $u=P(x)$, а за dv обозначить все остальные сомножители;

2. Интегралы вида

$\int P(x) \arcsin x dx$, $\int P(x) \arccos x dx$, $\int P(x) \ln x dx$, $\int P(x) \arctg x dx$, $\int P(x) \operatorname{arccctg} x dx$. Удобно положить $P(x)dx = dv$, а за u обозначить остальные сомножители.

Интегрирование рациональных функций

Дробно-рациональной функцией (или *рациональной дробью*) называется функция, равная отношению двух многочленов, т.е.

$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ – многочлен степени m , а $Q_n(x)$ – многочлен степени n .

Рациональную дробь называют *правильной*, если степень числителя меньше степени знаменателя, т.е. $m < n$; в противном случае (если $m \geq n$) рациональная дробь называется *неправильной*.

Всякую неправильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно, путем деления числителя на знаменатель, представить в виде суммы многочлена $L(x)$ и правильной рациональной дроби $\frac{R(x)}{Q(x)}$, т.е.

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}.$$

Правильные рациональные дроби следующих видов:

(I). $\frac{A}{x-a}$;

(II). $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geq 2, k \in N$);

(III). $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$ (корни знаменателя комплексные, т.е.

$$p^2 - 4q < 0);$$

(IV). $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}$ ($k \geq 2$, корни знаменателя комплексные),

где A, a, M, N, p, q – действительные числа, называются *простейшими рациональными дробями I, II, III и IV типов*.

Теорема 9. Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$, зна-

менатель которой разложен на множители

$$Q(x) = (x - x_1)^{k_1} \cdot (x - x_2)^{k_2} \dots (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

можно представить (и притом единственным образом) в виде следующей суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \frac{B_1}{(x - x_2)} + \dots + \frac{B_{k_2}}{(x - x_2)^{k_2}} + \dots + \\ & + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{C_{s_1}x + D_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}} + \dots + \\ & + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_mx + q_m)^2} + \dots + \frac{M_{s_m}x + N_{s_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}}, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, C_1, D_1, \dots, M_1, N_1, \dots$ – некоторые действительные коэффициенты.

Поясним формулировку теоремы на некоторых примерах:

$$1) \frac{x^2 + 4}{(x - 2) \cdot (x - 3)^3} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x - 3} + \frac{C}{(x - 3)^2} + \frac{D}{(x - 3)^3};$$

$$2) \frac{x^3 + 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1};$$

$$3) \frac{7x^2 + 8x + 9}{(x - 1)(x - 2)(x^2 + x + 1)^2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x - 2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1} + \frac{Mx + N}{(x^2 + x + 1)^2}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$ можно применить *метод сравнения коэффициентов*. Суть метода такова:

1. Правую часть равенства (4.2) приведем к общему знаменателю $Q(x)$; в результате получим тождество $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{S(x)}{Q(x)}$, где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами;

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то тождественно равны и числители, т.е. $P(x) \equiv S(x)$; (4.3)

3. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x (по теореме о тождестве многочленов) в обеих частях тождества (4.3), получим систему линейных уравнений, из которой и определим искомые коэффициенты $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots$

Интегрирование простейших рациональных дробей

Найдем интегралы от простейших рациональных дробей:

$$1. \int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{x-a} = A \cdot \ln|x-a| + C;$$

$$2. \int \frac{A}{(x-a)^k} dx = A \cdot \int (x-a)^{-k} d(x-a) = A \cdot \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

$$3. \text{ Рассмотрим интеграл } J = \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx, \text{ выделив в знаменате-}$$

$$\text{ле полный квадрат, получим } J = \int \frac{Mx+N}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx, \text{ причем}$$

$$q - \frac{p^2}{4} > 0. \text{ Сделаем подстановку } x + \frac{p}{2} = t. \text{ Интеграл приводим к}$$

$$\text{табличному интегралу вида } \int \frac{dt}{t^2 + a^2}.$$

Интегрирование рациональных дробей

Рассмотренный материал позволяет сформулировать *общее правило интегрирования рациональных дробей*.

1. Если дробь неправильна, то представить ее в виде суммы многочлена и правильной дроби.

2. Разложив знаменатель правильной рациональной дроби на множители, представить ее в виде суммы простейших рациональных дробей.

3. Проинтегрировать многочлен и полученную сумму простейших дробей.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Найти интегралы:

$$\begin{aligned} 1. \int (5x^4 - \frac{3}{x^4} - 2\sqrt[3]{x} + 1)dx; \quad 2. \int (3\sin x + \frac{1}{5x})dx; \quad 3. \int \frac{dx}{2-3x}; \\ 4. \int 2e^{3-2x}dx; \quad 5. \int \frac{5xdx}{1+x^2}; \quad 6. \int (2x-5)\sin xdx. \end{aligned}$$

Решение.

1. Предварительно преобразуется подынтегральная функция, а затем применяется таблица основных интегралов (1):

$$\begin{aligned} \int (5x^4 - 3x^{-4} - 2x^{\frac{1}{3}} + 1)dx &= 5\int x^4 dx - 3\int x^{-4} dx - 2\int x^{\frac{1}{3}} dx + \int 1dx = \\ &= 5\frac{x^5}{5} - 3\frac{x^{-3}}{-3} - 2\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + x + C = x^5 + \frac{1}{x^3} - \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + x + C. \end{aligned}$$

2. Применяются табличные интегралы (3, 6):

$$\int (3\sin x + \frac{1}{5x})dx = 3\int \sin x dx + \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x} = -3\cos x + \frac{1}{5}\ln|x| + C.$$

3. Следует воспользоваться подстановкой $t = 2 - 3x$, а затем табличным интегралом (3):

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2-3x} &= \left| \begin{array}{l} t = 2-3x \\ dt = (2-3x)'dx \\ dt = -3dx \\ dx = -\frac{1}{3}dt \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{3t} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{3}\ln|t| + C = \\ &= -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C. \end{aligned}$$

4. Для приведения данного интеграла к табличному применяется подстановка $t = 3 - 2x$, а затем табличный интеграл (5):

$$\int 2e^{3-2x} dx = \left| \begin{array}{l} t = 3 - 2x \\ dt = (3 - 2x)' dx \\ dt = -2 dx \\ dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right| = 2 \int e^t \left(-\frac{dt}{2} \right) = -\int e^t dt = -e^t + C = -e^{3-2x} + C.$$

5. Для приведения данного интеграла к табличному (3) применяется подстановка $t = 1 + x^2$:

$$\int \frac{5x dx}{1 + x^2} = \left| \begin{array}{l} t = 1 + x^2 \\ dt = (1 + x^2)' dx \\ dt = 2x dx \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int \frac{5}{2} \frac{dt}{t} = \frac{5}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{5}{2} \ln|t| + C = \frac{5}{2} \ln|1 + x^2| + C.$$

6. Здесь используется формула интегрирования по частям ($\int u dv = uv - \int v du$) и учитывается то, что данный интеграл относится к интегралу первого типа:

$$\begin{aligned} \int (2x - 5) \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} u = 2x - 5; \quad du = 2 dx \\ dv = \sin x dx; \quad v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = -(2x - 5) \cos x - \\ &- \int (-\cos x) \cdot 2 dx = -(2x - 5) \cos x + 2 \int \cos x dx = -(2x - 5) \cos x + 2 \sin x + C. \end{aligned}$$

Пример 4.2. Найти интеграл $\int (x^3 + 1) \ln x dx$.

Решение. Пусть $u = \ln x$, $dv = (x^3 + 1) dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$ и

$$v = \int dv = \int (x^3 + 1) dx = \frac{x^4}{4} + x.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 1) \ln x dx &= \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x - \int \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \frac{dx}{x} = \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx - \int dx = \\ &= \left(\frac{x^4}{4} + x \right) \ln x - \frac{x^4}{16} - x + C. \end{aligned}$$

Пример 4.3. Найти интеграл $\int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx$.

Решение.

Преобразуем знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла, следующим образом:

$$x^2 - 4x + 8 = x^2 - 4x + 4 + 4 = (x-2)^2 + 2^2.$$

Тогда после подстановки $t = x - 2$, $dt = dx$ получаем

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2-4x+8} dx &= \int \frac{3x-1}{(x-2)^2+2^2} dx = \int \frac{3(t+2)-1}{t^2+2^2} dt = \int \frac{3t+5}{t^2+2^2} dt = \\ &= \int \frac{3t}{t^2+2^2} dt + \int \frac{5}{t^2+2^2} dt = \frac{3}{2} \ln|t^2+4| + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \frac{3}{2} \ln|(x-2)^2+4| + \\ &+ \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C = \frac{3}{2} \ln|x^2-4x+8| + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{2} + C. \end{aligned}$$

При этом при вычислении интеграла $\int \frac{3t}{t^2+4} dt$ мы воспользовались заменой переменной $z = t^2 + 4$. Тогда $dz = 2tdt$, откуда

$$\int \frac{3t}{t^2+4} dt = \frac{3}{2} \int \frac{2tdt}{t^2+4} = \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z} = \frac{3}{2} \ln|z| + C = \frac{3}{2} \ln|t^2+4| + C.$$

Пример 4.4. Найти интеграл $\int \frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3} dx$.

Решение.

Подынтегральная функция является неправильной дробью, поэтому выделим её целую часть путем деления числителя на знаменатель «уголком».

$$\begin{array}{r} x^3 - 2x^2 + 0x + 4 \quad | \quad x^2 + 2x - 3 \\ - \quad x^3 + 2x^2 - 3x \quad \quad | \quad x - 4 \\ \hline -4x^2 + 3x + 4 \\ - \quad -4x^2 - 8x + 12 \\ \hline 11x - 8 \end{array}$$

Тогда

$$\frac{x^3-2x^2+4}{x^2+2x-3} = x - 4 + \frac{11x-8}{x^2+2x-3}.$$

Интегрирование целой части не представляет труда, а правильную дробь разложим на сумму простейших дробей. Так как корнями квадратного трехчлена $x^2 + 2x - 3$ являются $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$, то $x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3)$.

$$\text{Если } \frac{11x - 8}{x^2 + 2x - 3} = \frac{11x - 8}{(x - 1)(x + 3)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 3}, \text{ то}$$

$$\frac{11x - 8}{x^2 + 2x - 3} = \frac{A \cdot (x + 3) + B \cdot (x - 1)}{(x - 1)(x + 3)}.$$

$$\text{Тогда, } 11x - 8 = x \cdot (A + B) + (3A - B).$$

Приравнявая коэффициенты обеих частей, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} A + B = 11; \\ 3A - B = -8. \end{cases}$$

$$\text{Откуда } A = \frac{3}{4}, B = \frac{41}{4}.$$

$$\text{Итак, } \frac{11x - 8}{x^2 + 2x - 3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{41}{4} \cdot \frac{1}{x + 3},$$

$$\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 + 2x - 3} = x - 4 + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{x - 1} + \frac{41}{4} \cdot \frac{1}{x + 3},$$

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^2 + 2x - 3} dx = \int x dx - 4 \cdot \int dx + \frac{3}{4} \cdot \int \frac{dx}{x - 1} + \frac{41}{4} \cdot \int \frac{dx}{x + 3} =$$

$$= \frac{x^2}{2} - 4x + \frac{3}{4} \cdot \ln(x - 1) + \frac{41}{4} \cdot \ln(x + 3) + C.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется первообразной от данной функции?
2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?
3. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
4. Каков геометрический смысл неопределенного интеграла?
5. Напишите таблицу основных интегралов.
6. В чем заключаются основные методы интегрирования?
7. Как интегрируются рациональные функции?

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Используя метод разложения, найти интегралы:

1. $\int (3x^2 - 2x + 5)dx$;
2. $\int \frac{2x^2 + x - 1}{x^3}dx$;
3. $\int (1 + e^x)^2 dx$;
4. $\int \frac{2x + 3}{x^2 - 5}dx$;
5. $\int \frac{x^2}{x^2 + 1}dx$;
6. $\int (\sin x - \cos x)^2 dx$.

4.2. Используя метод замены переменной, найти интегралы:

1. $\int \frac{2x dx}{x^4 + 3}$;
2. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{1 + 2 \cos x}}$;
3. $\int \frac{x^2 dx}{5 - x^6}$;
4. $\int \frac{e^x dx}{3 + 4e^x}$;
5. $\int \frac{\ln x dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$;
6. $\int x^2 e^{2x^3 + 1} dx$.

4.3. Используя метод интегрирования по частям, найти интегралы:

1. $\int x \cos x dx$;
2. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$;
3. $\int x \cdot \arctg x dx$;
4. $\int \arcsin x dx$;
5. $\int x^2 e^{3x} dx$;
6. $\int x \ln(x - 1) dx$.

4.4. Найти интегралы от рациональных функций:

1. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}$;
2. $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$;
3. $\int \frac{x^3}{x - 2} dx$;
4. $\int \frac{(3x - 2)dx}{x^2 + 6x + 9}$;
5. $\int \frac{dx}{x^3 - x^2}$;
6. $\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx$.

Тема 5 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Литература

[1], глава 13, § 13.3–13.7

[2], глава 11, § 11.1–11.10

Понятие определенного интеграла

Если определенная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ такова, что существует конечный предел последовательности интегральных сумм $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$, при условии, что наибольшая из разностей $\Delta x_i = x_{i-1} - x_i$ стремится к нулю, причем этот предел не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$ на отрезки, ни от выбора точек ξ_i на этих отрезках, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a; b]$, а сам предел называется *определенным интегралом от функции $f(x)$ в пределах от a до b* . Обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция интегрируема на этом отрезке.

Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b A dx = A(b - a)$, где $A = \text{const}$.
2. $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx \pm \int_a^b f_2(x) dx$.
3. $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$, где $a < c < b$.
4. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
5. $\int_a^a f(x) dx = 0$.

$$6. \int_a^b A \cdot f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx.$$

$$7. \int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx, \text{ если } f(x) \geq g(x) > 0 \text{ на } [a; b].$$

Методы вычисления определенного интеграла

1. Формула Ньютона-Лейбница

Простым и удобным методом вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции является формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

т.е. определенный интеграл есть разность двух значений первообразной функции при частных значениях аргумента, равных верхнему и нижнему пределам.

Применяется этот метод во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функции $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

2. Интегрирование по частям

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (5.1)$$

Формула (5.1) называется *формулой интегрирования по частям для определенного интеграла*.

3. Интегрирование подстановкой (заменой переменной)

Теорема 10. Если:

1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha, \beta]$;

2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha, \beta]$ является отрезок $[a; b]$;

3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$,

то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt. \quad (5.2)$$

Формула (5.2) называется *формулой замены переменной в определенном интеграле*.

Отметим, что:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется;

2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$;

3) не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменных!

Приложения определенного интеграла

1. Вычисление площадей плоских фигур

Исходя из геометрического смысла определенного интеграла, площадь криволинейной трапеции, расположенной «выше» оси абсцисс ($f(x) \geq 0$), равна соответствующему определённом интегралу:

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ или } S = \int_a^b ydx. \quad (5.3)$$

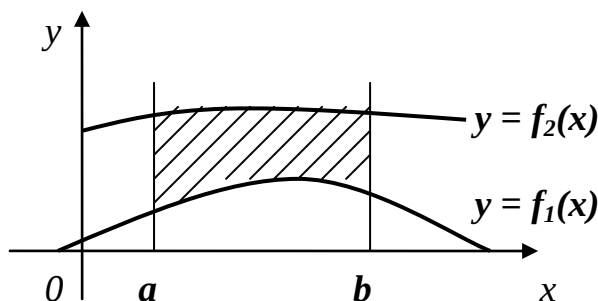


Рисунок 4 – Фигура, ограниченная кривыми и прямыми

Площадь фигуры (рисунок 4), ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ (при условии $f_2(x) \geq f_1(x)$), можно найти по формуле

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx. \quad (5.4)$$

Если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y = c$ и $y = d$, осью Oy и непрерывной кривой $x = \varphi(y) \geq 0$, то её площадь находится по формуле

$$S = \int_c^d x dy.$$

2. Объем тела вращения

Пусть вокруг оси Ox вращается криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x) \geq 0$, отрезком $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a$ и $x = b$. Тогда объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Ox , равен

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx. \quad (5.5)$$

Если криволинейная трапеция ограничена графиком непрерывной функции $x = \varphi(y) \geq 0$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ ($c < d$), то объем тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy , по аналогии с формулой (5.5), равен

$$V_y = \pi \int_c^d x^2 dy. \quad (5.6)$$

Несобственные интегралы

1. Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования (несобственный интеграл I рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; +\infty]$. Если существует конечный предел $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$, то его называют *несобст-*

венным интегралом I рода и обозначают $\int_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким образом, по

определению $\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx$.

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *сходится*.

Если же указанный предел не существует или он бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *расходится*.

Аналогично определяется несобственный интеграл на промежутке $(-\infty; b]$:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Несобственный интеграл с двумя бесконечными пределами определяется формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx, \text{ где } c - \text{произвольное число.}$$

В этом случае интеграл слева сходится лишь тогда, когда сходятся оба интеграла справа.

2. Интеграл от разрывной функции (несобственный интеграл II рода)

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и имеет бесконечный разрыв при $x = b$. Если существует конечный предел

$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то его называют *несобственным интегралом второго*

рода и обозначают $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Если предел в правой части существует, то несобственный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *сходится*. Если же указанный предел не существует или

бесконечен, то говорят, что интеграл $\int_a^b f(x)dx$ *расходится*.

Аналогично, если функция $f(x)$ терпит бесконечный разрыв в точке $x = a$, то полагают

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Если функция $f(x)$ терпит разрыв во внутренней точке c отрезка $[a; b]$, то несобственный интеграл второго рода определяется формулой

$$\int_b^a f(x)dx = \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx.$$

В этом случае интеграл слева называют сходящимся, если оба несобственных интеграла, стоящих справа, сходятся.

Примеры решения задач

Пример 5.1. Вычислить интеграл: $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

Решение.

Для вычисления определенного интеграла применяется формула Ньютона-Лейбница и табличный интеграл (15):

$$\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Пример 5.2. Вычислить определенный интеграл: $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x \cdot \sqrt{1+\ln x}}$.

Решение.

Сделаем подстановку $t = \sqrt{1+\ln x}$; $t^2 = 1+\ln x$;

$$\ln x = -1+t^2; \quad \frac{dx}{x} = 2tdt.$$

Если $x=1$, то $t=1$; если $x=e^3$, то $t=2$ ($t = \sqrt{1+\ln e^3} = \sqrt{1+3} = 2$).

Следовательно, $\int_1^2 \frac{2tdt}{t} = 2t \Big|_1^2 = 4 - 2 = 2$.

Пример 5.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = \frac{1}{4}(x-2)^2$ и прямой $x + 2y - 14 = 0$.

Решение.

Определим a и b – точки пересечения данных линий, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}(x-2)^2; \\ x + 2y - 14 = 0. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение вместо y его значение, получим:

$$x + 2 \cdot \frac{1}{4}(x-2)^2 - 14 = 0, \quad x + \frac{x^2}{2} - 2x + 2 - 14 = 0,$$

$$x^2 - 2x - 24 = 0,$$

откуда $x_1 = -4$ и $x_2 = 6$.

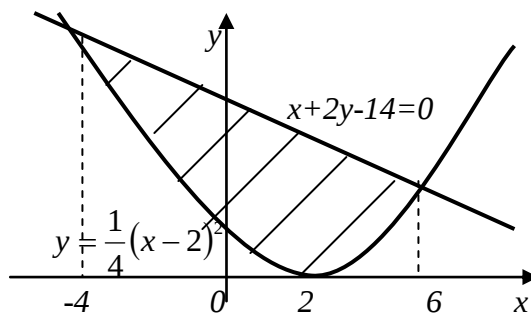


Рисунок 5 – Чертеж к задаче 5.3

Тогда $A(-4; 9)$; $B(6; 4)$ – точки пересечения данных линий.

Сделав чертеж (рисунок 5), видим, что искомая фигура ограничена сверху прямой, а снизу параболой, следовательно, площадь этой фигуры можно найти по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Подставим данные выражения в формулу, получим:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-4}^6 \left[\left(7 - \frac{x}{2}\right) - \frac{1}{4}(x-2)^2 \right] dx = \int_{-4}^6 \left(6 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \left(6x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12}\right) \Big|_{-4}^6 = \\
 &= 6 \cdot (6 + 4) + \frac{1}{4} \cdot (36 - 16) - \frac{1}{12} \cdot (216 + 64) = 60 + 5 - \frac{280}{12} = 65 - 23\frac{1}{3} = \\
 &= 41\frac{2}{3} \text{ кв. ед.}
 \end{aligned}$$

Итак, $S = 41\frac{2}{3}$ кв. ед.

Пример 5.4. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$ вокруг оси Ox .

Решение.

По формуле (5.5) искомый объем

$$V_x = \pi \int_0^1 (e^{-x})^2 dx = \pi \left(-\frac{1}{2} e^{-2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{e^2} \right) \approx 1,36 (\text{ед.}^3).$$

Пример 5.5. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}; \quad 2) \int_{-\infty}^0 \cos x dx; \quad 3) \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx; \quad 4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Решение.

$$1) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^{-2} dx = - \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \Big|_1^b = -(0 - 1) = 1, \text{ интеграл сходится;}$$

$$2) \int_{-\infty}^0 \cos x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin x \Big|_a^0 = 0 - \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a, \quad \text{интеграл}$$

расходится, так как при $a \rightarrow -\infty$ предел $\lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a$ не существует;

$$3) \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} e^x \Big|_0^b = 1 + \infty = +\infty,$$

интеграл расходится;

4) при $x = 0$ функция $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ терпит бесконечный разрыв,

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{0+\varepsilon}^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{x} \Big|_{0+\varepsilon}^1 = 2(1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{0+\varepsilon}) = 2, \quad \text{интеграл}$$

сходится.

Контрольные вопросы

1. Как определяется площадь криволинейной трапеции?
2. Что называется определенным интегралом для функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$?
3. Сформулировать и доказать простейшие свойства определенного интеграла.
4. Каков геометрический смысл определенного интеграла?
5. Каковы методы интегрирования определенного интеграла?
6. Напишите формулу Ньютона-Лейбница.
7. Как вычисляется площадь плоской фигуры в системе декартовых координат?
8. Как вычисляется объем тела вращения вокруг оси Ox , оси Oy ?
9. Что называется несобственным интегралом первого (второго) рода?

Задачи для самостоятельного решения

5.1. Вычислить интегралы:

1. $\int_0^4 \left(1 + e^{\frac{x}{4}}\right) dx;$
2. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3};$
3. $\int_1^e \frac{\sqrt[4]{1+\ln x}}{x} dx;$
4. $\int_0^1 \ln|x+1| dx;$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx;$
6. $\int_0^{\pi} x \sin x dx.$

5.2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = 6x - x^2, y = 0;$
2. $y = \ln x, x = e, y = 0;$
3. $y = x^2, y = 2 - x^2;$
4. $y = x^2 + 4x, y = x + 4;$
5. $4y = x^2, y^2 = 4x;$
6. $y = 2x^2 - x - 2, y = -x^2 + x - 1.$

5.3. Найти объемы тел, образованных вращением вокруг осей Ox и Oy фигуры, ограниченной линиями:

1. $y = 4 - x^2, y = 0, x = 0$, где $x \geq 0$;

2. $y = x^2 + 1$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$;

3. $y = x^3$, $y = 1$, $x = 0$.

5.4. Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$, 2. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$, 3. $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$,

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$, 5. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$, 6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$.

Тема 6 ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Литература

[1], глава 12, § 12.1–12.5

[2], глава 15, § 15.1–15.12

Функции двух переменных.

Частные производные и полный дифференциал

Переменная величина z называется *функцией двух переменных x и y* , если каждой паре значений (x, y) из области их изменения соответствует определенное значение величины z . Переменные x и y в этом случае называются *независимыми переменными* или *аргументами*.

Функциональную зависимость z от x и y обозначают так:

$$z = f(x, y) \quad \text{или} \quad z = z(x, y).$$

Областью существования (или *областью определения*) функции $z = f(x, y)$ называется совокупность всех тех точек плоскости xOy , в которых z принимает действительные значения.

Частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения функции по x ($\Delta_x z$) к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю.

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Частная производная по x от функции $z = f(x, y)$ обозначается одним из символов $\frac{\partial z}{\partial x}$, z'_x , $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$.

$$\text{Таким образом, } \frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}.$$

Так как $\Delta_x z$ вычисляется при неизменном y , то частной производной по x от функции $z = f(x, y)$ называется производная по x , вычисленная в предположении, что y – постоянная величина.

Частной производной по y от функции $z = f(x, y)$ называется предел отношения частного приращения $\Delta_y z$ к приращению аргумента Δy при стремлении Δy к нулю. Эта производная обозначается одним из символов

$$\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad f'_y(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Таким образом, $\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, где $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Так как $\Delta_y z$ вычисляется при неизменном x , то частной производной по y от функции $z = f(x, y)$ называется производная по y , вычисленная в предположении, что x – постоянная величина.

Для функции любого числа переменных частные производные находятся так же, как и для функции двух переменных.

Например, если u есть функция трех независимых переменных x , y и z , то есть $u = f(x, y, z)$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta_z u}{\Delta z},$$

где $\Delta_x u$, $\Delta_y u$ и $\Delta_z u$ – соответствующие частные приращения функции u .

Полным приращением функции z называется

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz , линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy . Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ обозначается через dz и вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y.$$

Дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, то есть $dx = \Delta x$ и $dy = \Delta y$. Поэтому формулу полного дифференциала можно записать так:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (6.1)$$

Аналогично определяется и вычисляется полный дифференциал функции любого числа переменных. Полный дифференциал функции трех независимых переменных $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz.$$

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка.

$$z''_{xx} = f''_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right), \quad z''_{xy} = f''_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right),$$

$$z''_{yx} = f''_{yx}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right), \quad z''_{yy} = f''_{yy}(x, y) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

Производные $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ называют *смешанными*.

Теорема 11. Если функция $z = f(x, y)$ и смешанные частные производные определены и непрерывны в некоторой точке $P(x, y)$ и её окрестности, то в этой точке порядок вычисления смешанных производных не влияет на результат, то есть имеет место равенство

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные третьего, четвертого и других высших порядков. Частные производные высших порядков находятся путем последовательного нахождения одной производной вслед за другой по правилам дифференцирования функции одной переменной.

Экстремум функции двух переменных

Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется точкой *максимума* функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность этой точки, для каждой точки которой, отличной от точки P_0 , имеет место неравенство

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y).$$

Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется точкой *минимума* функции $z = f(x, y)$, если существует такая окрестность этой точки, для каждой точки которой, отличной от точки P_0 , имеет место неравенство

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y).$$

Точки максимума и минимума называют также точками *экстремума*, а значения функции в этих точках называют экстремальными.

Сформулируем необходимые условия, при которых функция $z = f(x, y)$ достигает экстремума. Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $P_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю, то есть

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{P_0} = 0; \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{P_0} = 0.$$

Точки области определения функции, при которых $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются *стационарными* точками функции $z = f(x, y)$.

Для отыскания стационарных точек функции $z = f(x, y)$ надо найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнять каждую из них нулю и решить систему

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Для исследования функции $z = f(x, y)$ на экстремум сформулируем достаточные условия. Пусть $P_0(x_0, y_0)$ является стационарной точкой функции $z = f(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков в этой точке. Значения производных второго порядка в точке P_0 обозначим так:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_0} = A; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_0} = B; \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_0} = C.$$

$$\text{Составим определитель } \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2. \quad (6.3)$$

Если $\Delta < 0$, то в стационарной точке P_0 нет экстремума. Если $\Delta > 0$, то в точке P_0 есть экстремум, причем максимум, если $A < 0$, и минимум, если $A > 0$. Если $\Delta = 0$, то требуется дополнительное исследование (вопрос о наличии экстремума в точке P_0 остается открытым).

Метод наименьших квадратов

Решая систему

$$\begin{cases} \overline{ax^2 + bx} = \overline{xy}; \\ a\overline{x} + b = \overline{y}, \end{cases} \quad (6.4)$$

где $\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$, $\overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$, $\overline{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n}$, $\overline{x^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$,

получим такие значения параметров a и b , при которых уравнение $y = ax + b$ наилучшим образом выражает зависимость между переменными x и y по их значениям, данным в таблице.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Найти частные производные и полный дифференциал функции $z = x^3 y + x t g y$.

Решение. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + t g y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \frac{x}{\cos^2 y}.$$

Применяя формулу (6.1), получим полный дифференциал

$$dz = (3x^2 y + t g y) dx + \left(x^3 + \frac{x}{\cos^2 y} \right) dy.$$

Пример 6.2. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 - 2x^2 y + 3y^2$.

Решение.

Сначала находим частные производные первого порядка

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^3 - 2x^2 y + 3y^2)'_x = 3x^2 - 4xy;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 - 2x^2 y + 3y^2)'_y = -2x^2 + 6y.$$

Находим частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (3x^2 - 4xy)'_x = 6x - 4y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-2x^2 + 6y)'_y = -4x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (-2x^2 + 6y)'_x = -4x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (-2x^2 + 6y)'_y = 6.$$

Пример 6.3. Исследовать на экстремум функцию

$$z = 3x + 6y - x^2 - xy - y^2.$$

Решение. Находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, каждую из них приравниваем нулю и решаем систему (6.2).

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3 - 2x - y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6 - x - 2y.$$

Решая систему $\begin{cases} 3 - 2x - y = 0 \\ 6 - x - 2y = 0 \end{cases}$, находим $x=0$ и $y=3$.

Следовательно, $P_0(0;3)$ есть стационарная точка функции z .

Находим частные производные второго порядка и их значения в найденной стационарной точке P_0 .

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

В данном случае производные второго порядка постоянны. Имеем:

$A = -2; B = -1; C = -2$. Из формулы (6.3)

$$\Delta = (-2)(-2) - (-1)^2 = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Так как $\Delta > 0$ и $A < 0$, то в точке $P_0(0;3)$ функция имеет максимум.

$$z_{\max}(P_0) = 18 - 9 = 9.$$

Пример 6.4. Значения переменных величин x и y , полученные в результате опыта, представлены в виде таблицы 5.

Таблица 5 – Значения переменных величин x и y для примера 6.4

x	2	4	6	8	10
y	5,5	8,5	13,6	17,3	20,1

Предполагая, что переменные x и y связаны линейной зависимостью $y = ax + b$, найти способом наименьших квадратов параметры a и b .

Решение.

Для вычисления величин $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\overline{x^2}$ и $\overline{xy}$, входящих в систему (6.4), удобно составить следующую таблицу 6:

Таблица 6 – Вспомогательная расчетная таблица примера 6.4

x	y	x^2	$x \cdot y$
2	5,5	4	11
4	8,5	16	34
6	13,6	36	81,6
8	17,3	64	138,4
10	20,1	100	201
Σ 30	65	220	466

Так как $n = 5$, то $\bar{x} = \frac{30}{5} = 6$, $\bar{y} = \frac{65}{5} = 13$, $\overline{x^2} = \frac{220}{5} = 44$,
 $\overline{xy} = \frac{466}{5} = 93,2$.

Подставив эти значения в (6.4), получим:

$$\begin{cases} 44a + 6b = 93,2; \\ 6a + b = 13. \end{cases} \quad \begin{cases} 44a + 6b = 93,2; \\ 36a + 6b = 78. \end{cases}$$

$$8a = 15,2; \quad a = 1,9; \quad b = 1,6.$$

Таким образом, зависимость между переменными x и y выражается формулой $y = 1,9x + 1,6$.

Контрольные вопросы

1. Как определяется функция нескольких переменных?
2. Каков геометрический смысл функции двух независимых переменных?
3. Дайте определение непрерывности функции нескольких переменных.

4. Что называется частной производной функции нескольких переменных?

5. Что называется полным дифференциалом функции двух аргументов?

6. Как найти частные производные высших порядков для функции двух переменных?

7. Какая точка называется точкой экстремума функции двух переменных?

8. Сформулируйте правило исследования функции двух переменных на экстремум.

9. В чем состоит метод наименьших квадратов?

Задачи для самостоятельного решения

6.1. Найти частные производные функций:

1. $z = x^2 y^3$;

2. $z = e^{xy}$;

3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;

4. $z = \frac{xy}{x^2 + y^2}$;

5. $z = (5x^3 y^2 + 1)^3$;

6. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$;

7. $z = x^y$;

8. $z = \frac{x}{\sin y}$ в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

6.2. Найти частные производные второго порядка:

1. $z = x^3 y - \cos y$;

2. $z = \ln(x^2 + y)$.

6.3. Найти экстремумы функций двух переменных:

1. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;

2. $z = 2xy - 2x - 4y$;

3. $z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;

4. $z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$.

Тема 7 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Литература

[1], глава 15, § 15.1–15.6

[2], глава 12, § 12.1–12.9

Основные понятия

Уравнения, связывающие независимую переменную, искомую функцию и ее производные, называются *дифференциальными*. *Решением* дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в уравнение обращает его в тождество.

Наивысший порядок производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется *порядком* этого уравнения.

Процесс отыскания решения дифференциального уравнения называется его *интегрированием*, а график решения дифференциального уравнения – *интегральной кривой*.

Дифференциальное уравнение первого порядка в общем случае можно записать в виде

$$F(x; y; y') = 0. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) связывает независимую переменную x , искомую функцию y и ее производную y' . Если уравнение (7.1) можно разрешить относительно y' , то его записывают в виде

$$y' = f(x; y) \quad (7.2)$$

и называют *дифференциальным уравнением первого порядка, разрешенным относительно производной*.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, можно записать в *дифференциальной форме*:

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0, \quad (7.3)$$

где $P(x; y)$ и $Q(x; y)$ – известные функции. Уравнение (7.3) удобно тем, что переменные x и y в нем равноправны, т.е. любую из них можно рассматривать как функцию другой.

Чтобы решение дифференциального уравнения приобрело конкретный смысл, его надо подчинить некоторым дополнительным условиям.

Условие, что при $x = x_0$ функция y должна быть равна заданному числу y_0 , т.е. $y = y_0$ называется *начальным условием*. Начальное условие записывается в виде

$$y(x_0) = y_0 \text{ или } y|_{x=x_0} = y_0. \quad (7.4)$$

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x; C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1) функция $\varphi(x; C)$ является решением дифференциального уравнения при каждом фиксированном значении C ;

2) каково бы ни было начальное условие (7.4), можно найти такое значение постоянной $C = C_0$, что функция $y = \varphi(x; C_0)$ удовлетворяет данному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется любая функция $y = \varphi(x; C_0)$, полученная из общего решения $y = \varphi(x; C)$ при конкретном значении постоянной $C = C_0$.

Если общее решение дифференциального уравнения найдено в неявном виде, т.е. в виде уравнения $\Phi(x; y; C) = 0$, то такое решение называется *общим интегралом* дифференциального уравнения. Уравнение $\Phi(x; y; C_0) = 0$ в этом случае называется *частным интегралом* уравнения.

Дифференциальные уравнения первого порядка (с разделенными переменными, линейные, однородные)

Наиболее простым дифференциальным уравнением первого порядка является, уравнение вида

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0, \quad (7.5)$$

где одно слагаемое зависит только от x , а другое – от y . Дифференциальное уравнение (7.5) называется уравнением *с разделенными переменными*. Проинтегрировав почленно это уравнение, получаем:

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy = C - \text{его общий интеграл.}$$

Более общий случай описывают уравнения *с разделяющимися переменными*, которые имеют вид

$$P_1(x) \cdot Q_1(y) \cdot dx + P_2(x) \cdot Q_2(y) \cdot dy = 0. \quad (7.6)$$

Особенность уравнения (7.6) в том, что коэффициенты при dx и dy представляют собой произведения двух функций (чисел), одна из которых зависит только от x , а другая – только от y .

Уравнение (7.6) легко сводится к уравнению (7.5) путем почленного деления его на $Q_1(y) \cdot P_2(x) \neq 0$.

Уравнение $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$ сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$ и разделить переменные.

Дифференциальное уравнение первого порядка называется *линейным*, если его можно записать в виде

$$y' + p(x) \cdot y = g(x), \quad (7.7)$$

где $p(x)$ и $g(x)$ – заданные функции, а частности – постоянные.

Особенность дифференциального уравнения (7.7): искомая функция y и ее производная y' входят в уравнение в первой степени, не перемножаясь между собой.

Для решения (7.7) заменим искомую функцию y произведением двух других функций, то есть введем подстановку

$$y = u(x) \cdot v(x).$$

Дифференцируя, получим: $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$.

Подставляем в уравнение (7.7) y и y' , приравниваем коэффициент при одной из функций нулю и определяем соответствующую функцию, после чего определяем другую функцию.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется *однородным*, если функция $f(x, y)$ является однородной функцией нулевого измерения.

Функция $f(x, y)$ называется *однородной* функцией нулевого измерения, если при умножении переменных x и y на произвольный параметр λ значение функции не изменяется, т.е.

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y).$$

Однородное дифференциальное уравнение можно представить в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \quad (7.8)$$

Уравнение (7.8) можно привести к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = ux$, где u – новая функция. Тогда $y' = u'x + u$.

Дифференциальные уравнения второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0. \quad (7.9)$$

Если (7.9) разрешено относительно второй производной, то получаем уравнение

$$y'' = f(x, y, y'). \quad (7.10)$$

Общим решением дифференциального уравнения второго порядка (7.9) и (7.10) называется функция $y = y(x, C_1, C_2)$, которая при любых значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 обращает данное уравнение в тождество.

Частным решением дифференциального уравнения второго порядка называется такое решение, которое получается из общего решения $y = y(x, C_1, C_2)$ при конкретных значениях произвольных постоянных C_1 и C_2 .

Частное решение уравнения второго порядка находится из общего решения при помощи задания начальных условий:

$$y_0 = y(x_0); \quad y'(x_0) = y'_0. \quad (7.11)$$

Начальные условия (7.11) позволяют найти значения произвольных постоянных C_1 и C_2 . Задача отыскания частного решения (7.10), удовлетворяющего заданным начальным условиям (7.11), называется *задачей Коши* для дифференциального уравнения второго порядка.

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Дифференциальное уравнение вида

$$y'' + py' + qu = 0, \quad (7.12)$$

где p и q постоянные числа, называется *однородным* линейным уравнением с постоянными коэффициентами. Такое уравнение является частным случаем уравнения $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$. Общим решением уравнения (7.12) будет функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (7.13)$$

где y_1 и y_2 – два линейно независимых частных решения этого уравнения.

Для нахождения частных решений y_1 и y_2 , составляем характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$, и находим его корни.

Чтобы получить характеристическое уравнение, достаточно заменить в данном уравнении (7.12) производные соответствующими степенями неизвестной k .

При решении характеристического уравнения могут встретиться три случая: корни уравнения действительные и различные, корни равные, корни комплексные сопряженные.

Представим решения в виде таблицы 7.

Таблица 7 – Решения однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами

Корни характеристического уравнения		Действительные		Комплексные
		$k_1 \neq k_2$	$k_1 = k_2$	$k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$
Частные решения	y_1	$e^{k_1 x}$	$e^{k_1 x}$	$e^{\alpha x} \cos \beta x$
	y_2	$e^{k_2 x}$	$x e^{k_1 x}$	$e^{\alpha x} \sin \beta x$
Вид общего решения		$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$	$y = e^{k_1 x} (C_1 + C_2 x)$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Пусть требуется найти общее решение линейного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x). \quad (7.14)$$

Общее решение неоднородного уравнения (7.14) равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ и какого-нибудь частного решения данного уравнения.

Пусть $y_{одн}$ есть общее решение уравнения (7.12), а $\bar{y}$ есть какое-нибудь частное решение уравнения (7.14), то общее решение (7.14) выразится формулой

$$y = y_{одн} + \bar{y}.$$

$y_{одн}$ для уравнения (7.12) находится с помощью формул таблицы 7 в зависимости от корней характеристического уравнения. Что же касается $\bar{y}$, то оно может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в тех случаях, когда правая часть (7.14), т.е. функция $f(x)$, есть многочлен, показательная функция или тригонометрическая функция. В зависимости от структуры функции $f(x)$ и корней характеристического уравнения будет меняться и структура частного решения $\bar{y}$. Рассмотрим те случаи, когда метод неопределенных коэффициентов может быть успешно использован для определения частных решений неоднородного уравнения (7.14).

Теорема 12. Если правая часть уравнения (7.14) есть многочлен степени n и число 0 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение $\bar{y}$ следует искать в виде многочлена той же степени. Если же один из корней характеристического уравнения равен нулю, то частное решение $\bar{y}$ следует искать в виде произведения многочлена той же степени на x .

Теорема 13. Если правая часть уравнения (7.14) есть показательная функция, то есть $f(x) = ae^{mx}$, и число m не является корнем характеристического уравнения, то существует частное решение вида $\bar{y} = Ae^{mx}$, где A — подлежащий определению коэффициент. Если число m совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то существует частное решение вида $\bar{y} = Axe^{mx}$. Если число m совпадает с каждым из двух равных корней характеристического уравнения, то существует частное решение вида $\bar{y} = Ax^2e^{mx}$.

Теорема 14. Если правая часть уравнения (7.14) функция $f(x) = e^{mx}(a \cos nx + b \sin nx)$ и числа $m \pm ni$ не являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение $\bar{y} = e^{mx}(A \cos nx + B \sin nx)$. Если же числа $m \pm ni$ являются корнями характеристического уравнения, то существует частное решение вида $\bar{y} = xe^{mx}(A \cos nx + B \sin nx)$.

Замечание. Теорема 2 вытекает из теоремы 3 при $n = 0$.

Примеры решения задач

Пример 7.1. Решить уравнение $y' = -\frac{y}{x}$.

Решение.

Дано уравнение с разделяющимися переменными.

Имеем: $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ или $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$. Проинтегрировав, получим:

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x},$$

$$\ln|y| = \ln|c| - \ln|x|,$$

т.е. $y = \frac{c}{x}$ – общее решение ДУ.

Пример 7.2. Решить уравнение $(x^2 - y^2)dx + xydy = 0$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $y' = -\frac{(x^2 - y^2)}{xy}$, где $y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

Легко установить, что правая часть заданного уравнения является однородной функцией нулевого измерения:

$$f(\lambda x, \lambda y) = -\frac{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2}{\lambda x \lambda y} = -\frac{\lambda^2(x^2 - y^2)}{\lambda^2 xy} = -\frac{(x^2 - y^2)}{xy} = f(x, y).$$

Следовательно, уравнение является однородным. Введем подстановку $y = ux$, где u – некоторая функция переменной x . Тогда $y' = u'x + u$. Получаем:

$$u'x + u = -\frac{x^2 - (ux)^2}{x \cdot ux} \quad \text{или} \quad u'x + u = -\frac{x^2(1 - u^2)}{x^2 \cdot u};$$

$$u'x = -\frac{(1 - u^2)}{u} - u; \quad u'x = -\frac{1}{u} - \text{уравнение с разделяющимися пе-}$$

ременными;

$$\frac{du}{dx} x = -\frac{1}{u} \quad \text{или} \quad u du = -\frac{dx}{x}.$$

Интегрируя полученное уравнение, будем иметь:

$$\int u du = -\int \frac{dx}{x}; \quad \frac{u^2}{2} = -\ln|x| + \ln C; \quad u^2 = \ln \frac{C^2}{x^2}.$$

Так как $u = \frac{y}{x}$, то получаем $\frac{y^2}{x^2} = \ln\left(\frac{C}{x}\right)^2$ – общий интеграл заданного однородного уравнения.

Пример 7.3. Решить уравнение $y' + 2xy = 2x$, если $y(0) = -1$.

Решение.

Имеем линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Полагаем $y = u \cdot v$, $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Тогда $u' \cdot v + u \cdot v' + 2x \cdot uv = 2x$, т.е. $u' \cdot v + u \cdot (v' + 2xv) = 2x$.

Сначала решаем уравнение $v' + 2xv = 0$:

$$\frac{dv}{v} = -2x dx, \quad \ln|v| = -x^2, \quad \underline{v = e^{-x^2}}.$$

Теперь решаем уравнение $u' \cdot e^{-x^2} + u \cdot 0 = 2x$, т.е.

$$\frac{du}{dx} = 2x \cdot e^{x^2}, \quad du = \int 2x \cdot e^{x^2} \cdot dx, \quad \underline{u = e^{x^2} + c}.$$

Итак, общее решение данного уравнения есть $y = u \cdot v = (e^{x^2} + c) \cdot e^{-x^2}$, т.е. $y = 1 + c \cdot e^{-x^2}$.

Для получения частного решения используем начальное условие, подставляя его в общее решение. При $x = 0$, $y = -1$, т.е. $-1 = 1 + c \cdot e^0$, $C = -2$, тогда $y = 1 - 2e^{-x^2}$ – частное решение данного уравнения.

Пример 7.4. Найти решение уравнений:

а) $y'' + 2y' - 15y = 0$;

б) $y'' - 4y' + 13y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 4y = 0$, если $y(0) = 4$, $y'(0) = 0$.

Решение.

а) Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 2k - 15 = 0$. Корнями этого уравнения будут $k_1 = -5$ и $k_2 = 3$. Тогда, опираясь на таблицу 7, получаем общее решение: $y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{3x}$.

б) Характеристическое уравнение $k^2 - 4k + 13 = 0$ имеет комплексные корни: $k_{1,2} = 2 \pm 3i$. Тогда общее решение при $\alpha = 2$ и $\beta = 3$ будет иметь вид $y = e^{2x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$.

в) Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$. Корнями этого уравнения будут $k_1 = k_2 = -2$. Так как корни равные и действительные, то общее решение будет $y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$.

Теперь воспользуемся начальными условиями для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 . Находим производную y' общего решения:

$$y' = -2C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-2x} - C_2 x e^{-2x}.$$

Подставив в общее решение $x = 0$ и $y = 4$, получим $C_1 = 4$. Подставив в производную общего решения $x = 0$ и $y' = 0$, получим $0 = 2C_1 + C_2$, откуда $C_2 = 8$.

Следовательно, $y = 4e^{-2x} + 8xe^{-2x}$ есть искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Пример 7.5. Найти частное решение уравнения $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 13$.

Решение.

Находим общее решение однородного уравнения $y'' - y' - 2y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - k - 2 = 0$ имеет два корня: $k_1 = -1$ и $k_2 = 2$; $y_{одн} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$.

В правой части заданного уравнения имеется показательная функция. Так как в данном случае $m = 2$ совпадает с одним из корней характеристического уравнения, то частное решение следует искать в виде $\bar{y} = A x e^{2x}$. Дифференцируя дважды это равенство, получим:

$\bar{y}' = A e^{2x} + 2A x e^{2x}$, $\bar{y}'' = 2A e^{2x} + 2A e^{2x} + 4A x e^{2x}$. Подставим $\bar{y}$, $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в левую часть заданного уравнения и определим коэффициент A :

$$4A e^{2x} + 4A x e^{2x} - A e^{2x} - 2A x e^{2x} - 2A x e^{2x} = 9e^{2x};$$

$$3A = 9; A = 3.$$

Следовательно, частное решение $\bar{y} = 3x e^{2x}$, общее решение

$$y = y_{одн} + \bar{y} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + 3x e^{2x}. \quad (*)$$

Используя начальные условия, определим значения произвольных постоянных C_1 и C_2 . Дифференцируя общее решение (*), получим:

$$y' = -C_1 e^{-x} + 2C_2 e^{2x} + 3e^{2x} + 6x e^{2x}. \quad (**)$$

Подставив в общее решение (*) $x=0$ и $y=2$, будем иметь $2 = C_1 + C_2$.

Подставив в (**) $x=0$ и $y'=13$, будем иметь:

$$13 = -C_1 + 2C_2 + 3; \quad 10 = -C_1 + C_2.$$

Решая совместно систему
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 2; \\ -C_1 + 2C_2 = 10, \end{cases}$$

находим: $C_1 = -2$ и $C_2 = 4$.

Таким образом, $y = -2e^{-x} + 4e^{2x} + 3xe^{2x}$ есть то частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

Пример 7.6. Решить уравнение $y'' - 6y' + 5y = 8\cos x + 38\sin x$.

Решение.

Находим общее решение однородного уравнения $y'' - 6y' + 5y = 0$. Характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 5 = 0$ имеет два корня: $k_1 = 5$ и $k_2 = 1$; $y_{одн} = C_1 e^{5x} + C_2 e^x$.

Применяя теорему 3 при $m=0$ и $n=1$, определяем структуру частного решения $\bar{y}$:

$$\bar{y} = A\cos x + B\sin x.$$

Дважды дифференцируя последнее равенство, получим $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$:

$$\bar{y}' = -A\sin x + B\cos x, \quad \bar{y}'' = -A\cos x - B\sin x.$$

Подставим $\bar{y}$, $\bar{y}'$ и $\bar{y}''$ в левую часть уравнения и определим коэффициенты A и B :

$$-A\cos x - B\sin x + 6A\sin x - 6B\cos x + 5A\cos x + 5B\sin x = 8\cos x + 38\sin x$$

или

$$(4A - 6B)\cos x + (6A + 4B)\sin x = 8\cos x + 38\sin x.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых функциях, получаем систему уравнений
$$\begin{cases} 4A - 6B = 8; \\ 6A + 4B = 38. \end{cases}$$

Решение этой системы дает $A=5$, $B=2$. Следовательно, частное решение $\bar{y} = 5\cos x + 2\sin x$, а искомое общее решение:

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^x + 5\cos x + 2\sin x.$$

Контрольные вопросы

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Что называется решением дифференциального уравнения?
4. Что называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка, частным решением?
5. Сформулируйте теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения.
6. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными и укажите метод его решения.
7. Какое уравнение 1-го порядка называется однородным? Как оно решается?
8. Какое уравнение 1-го порядка называется линейным? Как оно решается?
9. Опишите способ решения линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Какое уравнение называется характеристическим? Как оно составляется?
10. Какой вид имеет общее решение линейного однородного уравнения с постоянными коэффициентами при действительных и различных корнях характеристического уравнения? При равных корнях?
11. Разъясните правило отыскания частного решения уравнения с правой частью вида $f(x) = e^{mx}[P_1(x)\cos nx + P_2(x)\sin nx]$, где $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – многочлены.

Задачи для самостоятельного решения

7.1. Показать, что указанные функции являются решениями соответствующих дифференциальных уравнений:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------|
| 1. $y = 5x^2$, | $xy' - 2y = 0$; |
| 2. $y = 3\sin x - 2\cos x$, | $y'' + y = 0$; |
| 3. $y = xe^x$, | $y'' - 2y' + y = 0$; |
| 4. $y = \frac{1}{x}(2e^x - e^{-x})$, | $xy'' + 2y' - xy = 0$. |

7.2. Решить дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными:

1. $yy' + x = 1$;
2. $(1+y)dx - (1-x)dy = 0$;
3. $(1+y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$;
4. $y' = e^{x+y}$;
5. $xyy' = 1 - x^2$;
6. $y' \cos x - (y+1)\sin x = 0$;
7. $y' - (2y+1)\operatorname{ctg} x = 0$, если $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$;
8. $(1+x^2)y' = 1+y^2$, если $y(0) = 1$.

7.3. Решить однородные дифференциальные уравнения:

1. $y - xy' = x + yy'$;
2. $ydy + (x - 2y)dx = 0$;
3. $y - xy' = y \ln \frac{x}{y}$;
4. $x dy - y dx = y dy$, если $y(-1) = 1$.

7.4. Решить линейные дифференциальные уравнения первого порядка:

1. $y' + y = \cos x$;
2. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$;
3. $y' - y = e^x$;
4. $y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^x$, если $y(1) = 0$.

7.5. Решить линейные однородные дифференциальные уравнения:

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$;
2. $y'' - 4y = 0$;
3. $y'' - 3y' = 0$;
4. $y'' + 2y' + 2y = 0$;
5. $y'' + 4y = 0$;
6. $y'' + 8y' + 16y = 0$, если $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$.

7.6. Решить линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

1. $y'' - 3y' = 2 - 6x$;
2. $y'' - 2y' + 10y = 10x^2 + 18x + 6$,
 $y(0) = 1$, $y'(0) = 3,2$;
3. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$;
4. $y'' + 5y' = e^{-5x}$;
5. $y'' + 9y = 5 \cos 2x$;
6. $y'' + 4y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Тема 8 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Литература

[1], глава 14, § 14.1–14.5

[2], глава 13, § 13.1–13.5, глава 14, § 14.1–14.4

Основные понятия

Числовым рядом (или просто рядом) называется выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (8.1)$$

где $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ – действительные или комплексные числа, называемые *членами ряда*, u_n – *общим членом* ряда.

Сумма первых n членов ряда (8.1) называется n -ой *частичной суммой* ряда и обозначается через S_n , т.е. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

Рассмотрим частичные суммы:

$$S_1 = u_1, \quad S_2 = u_1 + u_2, \quad S_3 = u_1 + u_2 + u_3, \quad \dots$$

Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ последовательности частичных сумм ряда (8.1), то этот предел называют *суммой ряда* (8.1) и говорят, что ряд *сходится*. Записывают: $S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ не существует или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, то ряд называют *расходящимся*. Такой ряд суммы не имеет.

Для выяснения сходимости ряда устанавливают специальные признаки сходимости. Первым из них, как правило, является необходимый признак сходимости.

Теорема 15. Если ряд (8.1) сходится, то его общий член u_n стремится к нулю, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Следствие (достаточное условие расходимости ряда). Если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ или этот предел не существует, то ряд расходится.

Знакоположительные числовые ряды

Сходимость и расходимость ряда во многих случаях можно установить с помощью, так называемых, достаточных признаков.

Рассмотрим некоторые из них для *знакоположительных* рядов, т.е. рядов с неотрицательными членами.

Сходимость или расходимость знакоположительного ряда часто устанавливается путем сравнения его с другим («эталонным») рядом, о котором известно, сходится он или нет. В основе такого сравнения лежат нижеследующие теоремы.

Теорема 16. Пусть даны два знакоположительных ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (8.1) \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n. \quad (8.2)$$

$$\text{Если для всех } n \text{ выполняется неравенство } u_n \leq v_n, \quad (8.3)$$

то из сходимости ряда (8.2) следует сходимость ряда (8.1), из расходимости ряда (8.1) следует расходимость ряда (8.2).

Замечание. Теорема 16 справедлива и в том случае, когда неравенство (8.3) выполняется не для всех членов рядов (8.1) и (8.2), а начиная с некоторого номера N .

Теорема 17 (предельный признак сравнения). Пусть даны два знакоположительных ряда (8.1) и (8.2). Если существует конечный, отличный от 0, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = A$ ($A \neq \infty$; $A \neq 0$), то ряды (8.1) и (8.2) сходятся или расходятся одновременно.

Отметим «эталонные» ряды, часто используемые для сравнения:

1) *геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ – сходится при $|q| < 1$, расходится при $|q| \geq 1$;

2) *гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится;

3) *обобщенный гармонический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ – сходится при $\alpha > 1$, расходится при $\alpha \leq 1$.

Теорема 18 (Признак Даламбера). Пусть дан ряд (8.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Замечания.

1. Если $l = 1$, то ряд (8.1) может быть как сходящимся, так и расходящимся.
2. Признак Даламбера целесообразно применять, когда общий член ряда содержит выражение вида $n!$ или a^n .

Теорема 19 (радикальный признак Коши). Пусть дан ряд (8.1) с положительными членами и существует конечный или бесконечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

Тогда ряд сходится при $l < 1$ и расходится при $l > 1$.

Как и для признака Даламбера, в случае, когда $l = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Теорема 20 (Интегральный признак Коши). Если члены знакоположительного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ могут быть представлены как числовые значения некоторой непрерывной монотонно убывающей на промежутке $[1; +\infty)$ функции $f(x)$ так, что $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$, ..., $u_n = f(n)$, ..., то:

- 1) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится, то и сходится ряд (8.1);
- 2) если $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится также и ряд (8.1).

Замечание. Вместо интеграла $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ можно брать интеграл $\int_k^{+\infty} f(x)dx$, где $k \in N$, $k > 1$. Отбрасывание k первых членов ряда в ряде (8.1), как известно, не влияет на сходимость (расходимость) ряда.

Знакопеременные и знакопеременные ряды

Знакопеременным рядом называется ряд вида

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n+1} u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n, \quad (8.4)$$

где $u_n > 0$ для всех $n \in N$ (т.е. ряд, положительные и отрицательные члены которого следуют друг за другом поочередно).

Для знакочередующихся рядов имеет место *достаточный признак сходимости*.

Теорема 21 (*признак Лейбница*). Знакочередующийся ряд (8.4) сходится, если:

1. Последовательность абсолютных величин членов ряда монотонно убывает, т.е. $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$;
2. Общий член ряда стремится к нулю: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

При этом сумма S ряда (8.4) удовлетворяет неравенствам

$$0 < S < u_1.$$

Следствие. Погрешность, получаемая при замене суммы ряда S суммой первых n членов S_n , не превосходит по абсолютной величине первого из отбрасываемых членов.

Знакочередующийся ряд является частным случаем знакопеременного ряда. Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, содержащий бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных членов, называется *знакопеременным*.

Для знакопеременных рядов имеет место нижеследующий *общий достаточный признак сходимости*.

Теорема 22. Пусть дан знакопеременный ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots \quad (8.5)$$

Если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (8.6)$$

составленный из модулей членов данного ряда, то сходится и сам знакопеременный ряд (8.5).

Отметим, что обратное утверждение несправедливо: если сходится ряд (8.5), то это не означает, что будет сходиться ряд (8.6).

Знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*, если ряд, составленный из модулей его членов, сходится.

Знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*, если сам он сходится, а ряд, составленный из модулей его членов, расходится.

Степенные ряды

Ряд, членами которого являются функции от x , называется *функциональным*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots \quad (8.7)$$

Придавая x определенное значение x_0 , мы получим числовой ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \dots + u_n(x_0) + \dots,$$

который может быть как сходящимся, так и расходящимся.

Если полученный числовой ряд сходится, то точка x_0 называется *точкой сходимости* ряда (8.7); если же ряд расходится – *точкой расходимости* функционального ряда.

Совокупность числовых значений аргумента x , при которых функциональный ряд сходится, называется его *областью сходимости*.

Среди функциональных рядов в математике и её приложениях особую роль играет ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x , т.е. так называемый *степенной ряд*:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (8.8)$$

Действительные (или комплексные) числа $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ называются *коэффициентами ряда* (8.8), $x \in R$ – действительная переменная.

Об области сходимости степенного ряда можно судить, исходя из нижеследующей теоремы.

Теорема Н. Абеля. Если степенной ряд (8.8) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| < |x_0|$.

Следствие. Если ряд (8.8) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при всех x , удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_1|$.

Из теоремы Абеля следует, что если $x_0 \neq 0$ есть точка сходимости степенного ряда, то интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ весь состоит из точек сходимости данного ряда; при всех значениях x вне этого интервала ряд (8.8) расходится.

Интервал $(-|x_0|; |x_0|)$ называют *интервалом сходимости* степенного ряда. Положив $|x_0| = R$, интервал сходимости можно записать в виде $(-R; R)$. Число R называют *радиусом сходимости* степенного ряда, т.е. $R > 0$ – это такое число, что при всех x , для которых $|x| < R$, ряд (8.8) абсолютно сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Отметим, что на концах интервала сходимости, т.е. при $x = R$ и при $x = -R$, сходимость ряда проверяется в каждом случае отдельно.

Для ряда (8.8) радиус абсолютной сходимости находится по формуле:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (8.9)$$

Замечания. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0$, то можно убедиться, что ряд (8.8) абсолютно сходится на всей числовой оси. В этом случае $R = \infty$. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \infty$, $R = 0$, то ряд (8.8) сходится лишь в одной точке $x_0 = 0$.

Примеры решения задач

Пример 8.1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Решение. Находим

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Так как $l = 0 < 1$, то данный ряд по признаку Даламбера сходится.

Пример 8.2. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \dots + \frac{n}{n^2 + 1} + \dots$$

Решение.

Исследуем по интегральному признаку Коши. Найдём несобственный интеграл:

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \int_1^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^b = \infty.$$

Так как несобственный интеграл расходится, то расходится и данный ряд.

Пример 8.3. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{2}{5} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{25} + \dots + \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{5^n} + \dots$$

Решение.

Исследуем по радикальному признаку Коши.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{5^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{5} = \frac{1}{5} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{5} \cdot e < 1,$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 8.4. Исследовать сходимость ряда

$$1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} + \dots$$

Решение. Сравним данный ряд со сходящимся геометрическим рядом $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots$ (его знаменатель $q = \frac{1}{3} < 1$). Так как члены данного ряда, начиная со второго, меньше членов сходящегося геометрического ряда $\left(\frac{1}{2 \cdot 3} < \frac{1}{3}, \frac{1}{3 \cdot 3^2} < \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} < \frac{1}{3^{n-1}}\right)$, то на основании признака сравнения ряд сходится.

Пример 8.5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 5}{n^3}$.

Решение. Сравним данный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + 5}{n^3} : \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 5}{n^2} = 2 \neq 0$, то данный ряд, так же как и гармонический, расходится.

Пример 8.6. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда

$$\frac{1}{2} - \frac{8}{4} + \frac{27}{8} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n} + \dots \quad (*)$$

Решение.

Исследуем по признаку Лейбница, так как ряд знакочередующийся. Члены ряда убывают по абсолютной величине, начиная с пятого члена.

Найдем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{2^n} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{2^n \cdot \ln 2} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot n}{2^n \cdot \ln^2 2} \stackrel{(\frac{\infty}{\infty})}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6}{2^n \cdot \ln^3 2} = 0.$$

Ряд (*) сходится по признаку Лейбница.

Составим ряд из абсолютных величин членов ряда (*):

$$\frac{1}{2} + \frac{8}{4} + \frac{27}{8} + \dots + \frac{n^3}{2^n} + \dots \quad (**)$$

Ряд (**) знакоположительный, исследуем его по признаку Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n^3} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} < 1.$$

Ряд (**) сходится.

Следовательно, ряд (*) сходится абсолютно.

Пример 8.7. Найти область сходимости ряда

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

Решение. Заданный ряд неполный. Воспользуемся признаком Даламбера. Для данного ряда имеем:

$$|u_n| = \frac{|x^{2n-1}|}{2n-1}; \quad |u_{n+1}| = \frac{|x^{2n+1}|}{2n+1};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{2n+1}| \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot |x^{2n-1}|} = |x^2| \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2.$$

Ряд абсолютно сходится, если $x^2 < 1$ или $-1 < x < 1$. Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости.

При $x = -1$ имеем ряд $-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \dots$, который сходится по признаку Лейбница (его общий член по абсолютной величине монотонно убывает и стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$).

При $x = 1$ имеем ряд $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ — это тоже сходящийся лейбницевский ряд. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является отрезок $[-1; 1]$.

Контрольные вопросы

1. Что называется числовым рядом, общим членом ряда?
2. Что называется суммой ряда? Дайте определение сходящегося и расходящегося рядов. Приведите примеры.
3. В чем состоит необходимый признак сходимости ряда?
4. Сформулируйте достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.
5. Какой ряд называется знакочередующимся? В чем состоит признак Лейбница для такого ряда?
6. Как найти радиус сходимости и интервал сходимости степенного ряда?
7. Как вычисляются коэффициенты ряда Маклорена для заданной функции?
8. Как используются степенные ряды в приближенных вычислениях?

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Написать пять первых членов ряда и проверить, выполняется ли для него необходимый признак сходимости.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{n(n+1)}; \quad 2. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}; \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{3^n}; \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}.$$

8.2. Исследовать по признаку сравнения сходимость ряда:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$; 3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n + 1}$.

8.3. Исследовать по признаку Даламбера сходимость ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n(2n+1)}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-3}{\sqrt{n \cdot 3^n}}$.

8.4. Исследовать по интегральному признаку сходимость ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; 2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^3 n}$; 3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{(2n-3)^2}}$; 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{n^2 + 1}$.

8.5. Исследовать по признаку Лейбница сходимость ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \sqrt{n}}$; 2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n+1}}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cos \frac{\pi}{5n}$.

8.6. Исследовать сходимость ряда:

1. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)^3}}$; 2. $1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} + \frac{4}{7} + \dots$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n 2n!}{(2n)!}$; 5. $1 + \frac{3}{2!} + \frac{3^2}{3!} + \frac{3^3}{4!} + \dots$; 6. $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{2 \ln 4} + \frac{1}{3 \ln 6} - \frac{1}{4 \ln 8} + \dots$.

8.7. Найти область сходимости степенного ряда:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1} \sqrt{n}}$; 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}$; 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}$; 4. $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$;
5. $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^{2n}$; 6. $1 + 2!x + 3!x^2 + 4!x^3 + \dots$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задание 1. Найдите пределы (таблица 8). При решении предела под пунктом е) воспользоваться правилом Лопиталя.

Таблица 8 – Данные к заданию 1

№ варианта	
1	а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{5x^2+7x-6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{2x-5} \right)^{x^2}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.
2	а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6+x-x^2}{x^3-27}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 8x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$.
3	а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt{x+1}-3}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^2 x}{x \operatorname{tg} 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.
4	а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2+x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1} \right)^{-4x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} \right)$.
5	а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x^2+5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-16}{x^2-5x+6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x}-1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x \sin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{2-3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.
6	а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4+2x-1}{3x^2-2x-5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12-x-x^2}{x^3-27}$; в) $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-e^{2x}}{\sin x}$.

7	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^4 + x^2 + x}{x^4 + 3x - 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{2x+1}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(2^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x \right]$.
8	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^7 + 5x^2 - 7x}{3x^2 + 11x - 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + 4x + 5}{x^2 - 2x - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x \sin 3x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x + x^2} - (1+x)}{x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right)$.
9	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 + 5x + 9}{1 + 4x - x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$.
10	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 10}{7x^3 + 2x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{2x^2 - 5x - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x} - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 4x}{x \operatorname{tg} x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x-4}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{2 \sin x + x}$.
11	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 7}{3x^4 - 2x^2 + x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{\sin x} \right)$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{3x+2}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \arctg x^2 - \pi}$.
12	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x - 2x^2}{3x^4 + 5x}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 + x + 2}{x^3 + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{2x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos 4x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-1} \right)^{x+2}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{\ln(1+3x)}$.
13	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 2x + 9}{2x^2 - x + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{20 - x - x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\arcsin 6x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x-3}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$.

14	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 7}{2x^4 + 3x^2 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{2x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-3} \right)^{x-5}$; е) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1 - x^3}$.
15	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 7}{2 - 3x + 4x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{\sqrt{8-x} - 3}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg^2 2x}{3x \cdot \arcsin x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2} \right)^{2x}$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{3x}}{x^5 - 2}$.
16	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18x^2 + 5x}{8 - 3x - 9x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 8x + 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{x^2 - 9}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{tg 3x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+4} \right)^{3x-1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}$.
17	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 + 3x}{2x^2 - 2x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x-3} - 2}{\sqrt{x+2} - 3}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{tg 3x - \sin 3x}{2x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x+1} \right)^{-3x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 3x)}{\ln(\sin 2x)}$.
18	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 3x^2}{1 + 2x + 3x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt{12-x} - 2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \cdot ctg 5x$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+5}{x} \right)^{3x+4}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x}$.
19	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - 4x^2 + 3}{2x^4 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x)$.
20	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 7}{x^4 - 2x^3 + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{x^2 - x - 12}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{tg 2x} \right)$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{3-2x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - e^{2x}) ctgx$.
21	a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^5 - 4x^3 + 3}{2x^3 + x - 7}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$;

	$\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \cdot \operatorname{arctg} x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2 - 3x}{5 - 3x} \right)^x; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right).$
22	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 4x - x^4}{2x^4 + 3x^2 + x}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 - 2x + 1}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5 - x} - \sqrt{5 + x}};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - x}{2 - x} \right)^{3x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 \cdot e^{-0,01x}).$
23	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 2x^2 + 3}{2x^2 + 3x - 7}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5x^2 + 11x - 2}{3x^2 - x - 10}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x + 7} - 5}{3 - \sqrt{x}};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 2x}{x \cdot \arcsin x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 1}{4x + 1} \right)^{2x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x.$
24	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - x - 3x^2}{x^3 - 16}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x + 1} - 5};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \arcsin x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x + 1} \right)^{-2x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{\ln(\cos 5x)}.$
25	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 6x - 45}{2x^2 - 3x - 35}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}{\sqrt[7]{x}};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{2 \arcsin^2 4x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 4} \right)^{-x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{2 + x + x^2}}.$
26	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 2x - 4}{3x^2 - 4x + 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 3x - 27}{x^2 - 6x - 27}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + 3x^2} - 1}{x^3 + x^2};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 5x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x + 5} \right)^{x+1}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \left[\frac{\ln 2x}{\ln(x + 0,5)} \right].$
27	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 13}{2x^2 + 11x + 5}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 2x - 35}{2x^2 + 11x + 5}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 6} - 3}{\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x}};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 3x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2x}{3 + 2x} \right)^{-x}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 e^{-x}).$
28	$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 7x^2 + 3}{2 + 2x - x^3}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}; \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{\sqrt{8 + x} - 3};$ $\text{г) } \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \operatorname{ctg} 4x; \quad \text{д) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x}{3x + 2} \right)^{x-2}; \quad \text{е) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{4x - \sin x}.$

29	а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x + 1}{2x^3 + 3x^2 + 2}$; б) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 2x - 40}{x^2 - 3x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x^2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^{3-2x}$; е) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+7)}{\sqrt[7]{x-3}}$.
30	а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 4}{3x^3 - 5x + 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 10x + 3}$; в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{2 - \sqrt{x+1}}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2 \arcsin^2 2x}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x}{1-2x} \right)^{x+1}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$.

Задание 2. Найдите производные функций (таблица 9).

Таблица 9 – Данные к заданию 2

№ вари- анта	а)	б)	в)
1	$y = (3x - 4\sqrt[3]{x} + 2)^4$	$y = \frac{4x + 7\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+9x^2}}$	$x^3 y^3 - 2xy + 3 = 0$
2	$y = (3x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} - 1)^2$	$y = 2^{3x} \operatorname{tg} 2x$	$x^2 y^2 - \cos x = 0$
3	$y = (x^2 - \frac{1}{x^3} + 5\sqrt{x})^4$	$y = \frac{\arcsin 7x}{x^4 + e^x}$	$\frac{x}{y} + xy - 2 = 0$
4	$y = (4x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 4)^3$	$y = e^{\operatorname{tg} x} \ln 2x$	$x^2 + xy + y^2 = 3$
5	$y = (x^5 - \sqrt[3]{x} + 1)^5$	$y = \frac{\sqrt{1-4x^2}}{2^x + \operatorname{tg} x}$	$x^3 - 3xy + y^3 = 0$
6	$y = (6x^2 - \frac{2}{x^4} + 5)^2$	$y = 3^{\operatorname{tg} x} \arcsin(x^2)$	$y = 1 + xe^y$
7	$y = (x^3 - 4\sqrt[4]{x^3} + 2)^3$	$y = \frac{1+5x^2}{\operatorname{arctg} \sqrt{5x}}$	$x^2 y^3 - \sin y + 3 = 0$
8	$y = (x^2 - 2\sqrt[5]{x} + 4)^4$	$y = \sqrt{x^3 + x} \cdot \ln x$	$\ln y + xy - 5 = 0$
9	$y = (3x^5 - \frac{5}{x^3} - 2)^5$	$y = \frac{\operatorname{arctg}(x+2)}{e^{2x}}$	$\operatorname{tgy} - xy^2 = 0$
10	$y = (x^4 + 2\sqrt[3]{x} + 1)^2$	$y = \arcsin \sqrt{x} \cdot e^x$	$\sin y - xy^2 + 4 = 0$

11	$y = (3x^5 - \frac{1}{x^4} + 7)^3$	$y = \frac{\arccos 2x}{1 - 4x^2}$	$2^x + 2^y = 2^{x+y}$
12	$y = (2x^4 - 3\sqrt[3]{x} - 1)^4$	$y = (1 - x^2) \cdot \operatorname{ctg} 2x$	$x - y = \arcsin x - \arcsin y$
13	$y = (3x^5 + 2\sqrt[4]{x} - 8)^5$	$y = \frac{x^4 - 4x}{\ln(2x+1)}$	$2y - \sin 2x - y^2 = 0$
14	$y = (x^3 - \frac{3}{x^2} + 4)^2$	$y = e^{\arcsin x} \operatorname{ctg} 3x$	$\sin(xy) + \cos(xy) = 0$
15	$y = (5x^2 - 3\sqrt[5]{x^2} - 2)^3$	$y = \frac{\sqrt{2 - 3x^5}}{\sin 2x}$	$y = \operatorname{tg}(x + y)$
16	$y = (2x^4 + \frac{2}{x^3} - 7)^4$	$y = 5^{6x} \arcsin 5x$	$2y \ln y = x$
17	$y = (3x^2 - 2\sqrt[4]{x} + 5)^5$	$y = \frac{\cos x - 4x^3}{\sqrt{8 + 7x^5}}$	$y = 1 + xe^y$
18	$y = (x^6 + \frac{1}{x^4} - 8)^2$	$y = e^{\sin x} \operatorname{arctg} 3x$	$e^x \cdot \sin y - e^y \cdot \cos x = 0$
19	$y = (4x^5 - 3\sqrt[5]{x^2} - 7)^3$	$y = \frac{2x^2 - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{6x^2 + 5}}$	$y^2 x = e^{\frac{y}{x}}$
20	$y = (3x^2 - \frac{5}{x^3} + 1)^4$	$y = (x + e^{2x}) \sin \frac{1}{2} x$	$y^2 - x = \cos y$
21	$y = (5x^4 - \frac{6}{\sqrt[3]{x^2}} + 4)^2$	$y = \frac{\operatorname{ctg} x - \cos x}{\sqrt{5x^2 + 1}}$	$x^3 y^2 - \cos y + 4 = 0$
22	$y = (3x^2 + \frac{5}{\sqrt{x}} - 7)^5$	$y = \cos 3x \cdot e^{\sin x}$	$y^3 + e^{xy} = 0$
23	$y = (7x^3 - \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}} + 3)^4$	$y = \frac{\sqrt{4x^5 - 2}}{\sin 7x}$	$x^2 y^3 + x \ln y = 0$
24	$y = (2x^5 - \frac{1}{\sqrt{x}} + 4)^3$	$y = 2^{5x} \operatorname{arctg} 2x$	$y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$
25	$y = (4x^3 + \frac{3}{x^7} - 4)^2$	$y = \frac{x^3 + e^x}{\sqrt{4 - 9x^5}}$	$x^4 + x^2 y^2 + y = 4$

26	$y = (5x^6 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 6)^4$	$y = \sqrt{x^2 + 5} \cdot \sin 8x$	$\sin x - \operatorname{arctg} y = 0$
27	$y = (x^4 - \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}} + 8)^3$	$y = \frac{\sin 3x}{\cos 3x + 2}$	$5x^2 y^2 - 7y + 4 = 0$
28	$y = (3x^3 + \frac{2}{\sqrt{x}} - 4)^2$	$y = e^{\arcsin x} \cos 4x$	$\operatorname{arctg} y = 4x + 5y$
29	$y = (2x^7 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - 3)^4$	$y = \frac{4^{2x}}{x^2 + x}$	$x^3 y - y = 6x$
30	$y = (6x^2 - \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} + 5)^3$	$y = 4^{\operatorname{tg} x} \operatorname{arctg} 3x$	$xy = \operatorname{ctg} y$

Задание 3. Проведите полное исследование функции и постройте ее график (таблица 10).

Таблица 10 – Данные к заданию 3

№ варианта		№ варианта	
1	$y = \frac{x^2 + 1}{x}$	16	$y = \frac{x^2 + 16}{x + 3}$
2	$y = \frac{x^2}{x - 1}$	17	$y = \frac{x^2 - 12}{x - 4}$
3	$y = \frac{x^2 - 3}{x + 2}$	18	$y = \frac{x^2 + 25}{x}$
4	$y = \frac{x^2 - 8}{x - 3}$	19	$y = \frac{x^2 + 24}{x + 1}$
5	$y = \frac{x^2 + 9}{x + 4}$	20	$y = \frac{x^2 + 32}{x - 2}$
6	$y = \frac{x^2 + 4}{x}$	21	$y = \frac{x^2 + 27}{x + 3}$
7	$y = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$	22	$y = \frac{x^2 - 7}{x - 4}$
8	$y = \frac{x^2 + 5}{x + 2}$	23	$y = \frac{2x^2}{2x - 1}$

9	$y = \frac{x^2 - 5}{x - 3}$	24	$y = \frac{x^2}{2(x - 1)}$
10	$y = \frac{x^2 - 15}{x + 4}$	25	$y = \frac{x}{2} + \frac{2}{x^2}$
11	$y = \frac{x^2 + 9}{x}$	26	$y = \frac{(x - 1)^2}{x^2 - 1}$
12	$y = \frac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$	27	$y = \left(\frac{x - 1}{x} \right)^2$
13	$y = \frac{4x}{(x + 1)^2}$	28	$y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$
14	$y = \frac{x^2 + 8}{x + 1}$	29	$y = \frac{3 - 2x}{(x - 1)^2}$
15	$y = \frac{x^2 + 21}{x - 2}$	30	$y = \frac{1}{x} + 4x$

Задание 4. Найдите неопределенные интегралы (таблица 11).

Таблица 11 – Данные к заданию 4

№ варианта		№ варианта	
1	а) $\int \frac{\arctg x}{1 + x^2} dx$; б) $\int x e^{-7x} dx$; в) $\int \frac{x^3 + 6}{x^2 + 5x + 6} dx$.	16	а) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \sqrt[4]{\tg x}} dx$; б) $\int (x + 1) \sin 7x dx$; в) $\int \frac{3x + 7}{x^2 + 8x + 17} dx$.
2	а) $\int \sqrt{1 + \sin x} \cos x dx$; б) $\int \arcsin 2x dx$; в) $\int \frac{4x - 1}{x^2 - 4x + 8} dx$.	17	а) $\int e^{x^2 + 1} x dx$; б) $\int (x + 1) e^{-x} dx$; в) $\int \frac{x^3 - 4}{x^2 - x - 6} dx$.
3	а) $\int \frac{x}{7 - 2x^2} dx$; б) $\int x \cos \frac{x}{2} dx$;	18	а) $\int \frac{x}{1 + x^4} dx$; б) $\int \arccos \frac{x}{3} dx$;

	$\text{B)} \int \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2} dx.$		$\text{B)} \int \frac{5x - 2}{x^2 - 2x + 5} dx.$
4	$\text{a)} \int \frac{1}{\arcsin^2 x \sqrt{1 - x^2}} dx;$ $\text{б)} \int \ln(1 + x^2) dx;$ $\text{B)} \int \frac{5x + 8}{x^2 + 2x + 5} dx.$	19	$\text{a)} \int \frac{\arctg 2x}{1 + 4x^2} dx;$ $\text{б)} \int \ln(5x - 1) dx;$ $\text{B)} \int \frac{x^3 - 5}{x^2 - 6x + 5} dx.$
5	$\text{a)} \int \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$ $\text{б)} \int x \cos(2x - 1) dx;$ $\text{B)} \int \frac{x^3 - 2}{x^2 - 5x + 6} dx.$	20	$\text{a)} \int \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} dx;$ $\text{б)} \int \frac{\ln x}{x^3} dx;$ $\text{B)} \int \frac{7x - 3}{x^2 + 6x + 13} dx.$
6	$\text{a)} \int \frac{e^x}{3 + e^{2x}} dx;$ $\text{б)} \int \ln(x - 3) dx;$ $\text{B)} \int \frac{3x - 2}{x^2 + 4x + 8} dx.$	21	$\text{a)} \int \sqrt[3]{1 + x^3} x^2 dx;$ $\text{б)} \int x e^{-2x} dx;$ $\text{B)} \int \frac{x^3 + 7}{x^2 + 2x - 3} dx.$
7	$\text{a)} \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x + 2}} dx;$ $\text{б)} \int x \cdot 2^{3x} dx;$ $\text{B)} \int \frac{x^3 + 2}{x^2 - x - 2} dx.$	22	$\text{a)} \int \frac{x^3}{5 + x^8} dx;$ $\text{б)} \int x \cos(x + 4) dx;$ $\text{B)} \int \frac{11x - 3}{x^2 + 6x + 13} dx.$
8	$\text{a)} \int \frac{1}{x \ln x} dx;$ $\text{б)} \int \arctg 2x dx;$ $\text{B)} \int \frac{8x - 3}{x^2 + 6x + 10} dx.$	23	$\text{a)} \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx;$ $\text{б)} \int (x - 4) e^x dx;$ $\text{B)} \int \frac{x^3 - 7}{x^2 - 4x + 3} dx.$
9	$\text{a)} \int \frac{e^x}{\sqrt{2 + e^x}} dx;$ $\text{б)} \int x \sin 4x dx;$ $\text{B)} \int \frac{x^3 + 3}{x^2 + x - 6} dx.$	24	$\text{a)} \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 3}} dx;$ $\text{б)} \int \ln(2x + 3) dx;$ $\text{B)} \int \frac{8x - 7}{x^2 + 10x + 29} dx.$

10	a) $\int \frac{1}{x \ln^2 x} dx;$ б) $\int x e^{x+2} dx;$ B) $\int \frac{7x+3}{x^2-4x+5} dx.$	25	a) $\int e^{\cos x} \sin x dx;$ б) $\int x \cdot \operatorname{arctg} x dx;$ B) $\int \frac{x^3-6}{x^2-5x+6} dx.$
11	a) $\int \frac{\sqrt{\ln x+1}}{x} dx;$ б) $\int \operatorname{arcctg} 3x dx;$ B) $\int \frac{x^3-3}{x^2+3x+2} dx.$	26	a) $\int \frac{\cos x}{3-\sin x} dx;$ б) $\int x e^{3x+1} dx;$ B) $\int \frac{10x-7}{x^2-8x+20} dx.$
12	a) $\int \frac{3^x}{\sqrt{1+3^x}} dx;$ б) $\int (x+1) e^{-4x} dx;$ B) $\int \frac{9x+10}{x^2-6x+10} dx.$	27	a) $\int \frac{x}{(1+x^2)^2} dx;$ б) $\int x \sin 2x dx;$ B) $\int \frac{x^3+8}{x^2-6x+5} dx.$
13	a) $\int \frac{2^x}{1+4^x} dx;$ б) $\int \ln(x-5) dx;$ B) $\int \frac{x^3+4}{x^2-4x+3} dx.$	28	a) $\int e^{5-2x^2} x dx;$ б) $\int x \cos 3x dx;$ B) $\int \frac{3x+11}{x^2-16x+68} dx.$
14	a) $\int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx;$ б) $\int x \cos 8x dx;$ B) $\int \frac{3x+10}{x^2-8x+10} dx.$	29	a) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}} dx;$ б) $\int x e^{-4x+1} dx;$ B) $\int \frac{x^3-8}{x^2-2x-3} dx.$
15	a) $\int \frac{3+\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx;$ б) $\int \arcsin 5x dx;$ B) $\int \frac{x^3+5}{x^2-2x-3} dx.$	30	a) $\int \sqrt[6]{5-x^4} x^3 dx;$ б) $\int (x-4) \sin 2x dx;$ B) $\int \frac{5x+16}{x^2+2x+17} dx.$

Задание 5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (таблица 12), и сделать чертеж.

Таблица 12 – Данные к заданию 5

Вариант	1 линия	2 линия
1.	$y = \frac{1}{2}(x+3)^2$	$y = x + 7$
2.	$y = \frac{1}{2}(x+2)^2$	$y = 2 - x$
3.	$y = \frac{1}{2}(x-6)^2$	$y = 10 - x$
4.	$y = x^2 - 3x$	$y = 4 - 3x$
5.	$y^2 = 4x$	$y = x$
6.	$y = \frac{1}{2}(x+1)^2$	$y = x + 5$
7.	$y = \frac{1}{2}(x-2)^2$	$y = x + 2$
8.	$y = \frac{1}{2}(x+5)^2$	$y = -1 - x$
9.	$y = \frac{1}{4}x^2$	$y^2 = 4x$
10.	$y^2 = x$	$\frac{3}{4}y^2 = x - 1$
11.	$y = x^2$	$y = x$
12.	$y = \frac{1}{2}(x-4)^2$	$y = x$
13.	$y = \frac{1}{2}(x-5)^2$	$y = 9 - x$
14.	$y = \frac{1}{2}(x+4)^2$	$y = -x$
15.	$y = \frac{1}{2}(x-4)^2$	$y = 8 - x$
16.	$y = \frac{1}{2}(x-3)^2$	$y = 7 - x$
17.	$y^2 = 9x$	$y = 3x - 6$

18.	$y = x^2 - 6x + 10$	$y = x$
19.	$y = \frac{1}{3}(x-2)^2$	$2x - y - 4 = 0$
20.	$y = \frac{1}{4}(x-1)^2$	$x - 2y + 11 = 0$
21.	$y = \frac{1}{4}(x-2)^2$	$x - 2y + 10 = 0$
22.	$y = \frac{1}{3}(x-1)^2$	$2x - y - 2 = 0$
23.	$y = \frac{1}{4}(x+5)^2$	$2x - y + 7 = 0$
24.	$y = \frac{1}{3}(x-5)^2$	$2x - y - 10 = 0$
25.	$y = \frac{1}{4}(x-4)^2$	$x - 2y + 8 = 0$
26.	$y = 2x - x^2$	$y = -x$
27.	$y = x^2 - 4x + 4$	$y = x$
28.	$y = \frac{6}{x}$	$y = 7 - x$
29.	$y = 2x - x^2$	$y = -x$
30.	$y = 3x^2 + 1$	$y = 3x + 7$

Задание 6. Задана функция двух независимых переменных. Найти: 1) полный дифференциал;

2) экстремум функции (таблица 13).

Таблица 13 – Данные к заданию 6

№ ва ри ан та		№ ва ри ан та	
1	$z = 2x^2 - xy + y^2 - 3x - y + 1$	16	$z = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 3$
2	$z = xy(6 - x - y)$	17	$z = 3x + 3y - x^2 - xy - y^2 + 6$
3	$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$	18	$z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$
4	$z = (x-1)^2 - 2y^2$	19	$z = (x-2)^2 + 2y^2 - 10$

5	$z = x^2 + 2xy - y^2 - 2x + 2y$	20	$z = x^2 + 4xy - 2y^2$
6	$z = y\sqrt{x} - 2y^2 - x + 14y$	21	$z = (x - 5)^2 + y^2 + 1$
7	$z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$	22	$z = 2x^2 - y^2 + xy - 7x + 5y + 2$
8	$z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$	23	$z = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$
9	$z = 3x^2 - 6y^2 + xy - 6x - y + 9$	24	$z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$
10	$z = 2x^2 + 3y^2 - 2xy + 2x - 16y$	25	$z = xy(12 - x - y)$
11	$z = -2x^2 - y^2 + 6xy - 14x + 5$	26	$z = xy - x^2 - y^2 + 9$
12	$z = 4(x - y) - x^2 - y^2$	27	$z = -3x^2 + 5y^2 - 8xy + 4x + 26y$
13	$z = 2x^2 + 3xy - y^2 - 2x + 7y + 6$	28	$z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$
14	$z = 6(x - y) - 3x^2 - 3y^2$	29	$z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$
15	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$	30	$z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$

Задание 7. По следующим эмпирическим данным (*таблица 14*) найдите линейную зависимость $y = ax + b$, используя метод наименьших квадратов. Постройте график функции и точечный график данных.

Таблица 14 – Данные к заданию 7

Вариант	X	-4	-3	-2	-1	0	1	2
1.	Y	-6	-4	-4	-3	1	2	7
3.	Y	-7	-2	-3	-1	3	5	5
5.	Y	-6	-1	-2	0	4	6	6
7.	Y	-8	-3	-4	-2	2	4	4
9.	Y	-5	-3	-2	-3	1	4	8
11.	Y	-6	-2	-1	-1	3	4	6
13.	Y	-7	-3	-3	0	2	5	6
15.	Y	-5	-4	-4	-1	4	6	7
17.	Y	-9	-6	-3	0	1	2	5
19.	Y	-6	-2	-2	-1	3	5	6
21.	Y	-5	-3	-1	0	2	3	7
23.	Y	-7	-6	-3	-3	1	4	5
25.	Y	-5	-5	-3	-2	4	4	6
27.	Y	-8	-4	-1	0	2	5	6
29.	Y	-6	-3	-2	1	2	4	7

Вариант	X	-2	-1	0	1	2	3	4
2.	Y	-4	-3	-3	1	4	5	7
4.	Y	-6	-3	-3	0	1	5	6
6.	Y	-8	-7	-1	1	3	1	4
8.	Y	-5	-2	-2	1	2	6	7
10.	Y	-5	-5	-2	0	2	3	7
12.	Y	-4	-4	-1	2	3	5	5
14.	Y	-7	-2	1	3	4	4	8
16.	Y	-6	-4	-2	0	1	6	7
18.	Y	-3	-3	-1	1	3	4	4
20.	Y	-5	-3	-2	2	3	5	6
22.	Y	-4	-3	-1	0	4	5	5
24.	Y	-6	-4	-1	2	3	6	6
26.	Y	-3	-2	-1	1	4	5	6
28.	Y	-5	-4	-1	0	2	3	7
30.	Y	-8	-5	-3	-1	3	4	6

Задание 8. Найдите общее решение (общий интеграл) дифференциальных уравнений (таблица 15).

Таблица 15 – Данные к заданию 8

№ варианта	а)	б)
1	$xy' = y + 2x \cdot \operatorname{ctg} \frac{y}{x}$	$y'' - y' = e^x$
2	$xy' + y - e^x = 0$	$y'' - 4y' + 4y = x^2$
3	$(x - y)ydx - x^2dy = 0$	$y'' - y' - 2y = x^3 + 6$
4	$y' - \frac{2xy}{1 + x^2} = 1 + x^2$	$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
5	$y' = \frac{x^2 + xy + 4y^2}{x^2 - 2xy}$	$3y'' + 4y' = 8x + 6$
6	$y' + 2xy = \frac{e^{-x^2}}{x}$	$y'' - y = 5e^x$
7	$y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$	$y'' + y = \cos x$

8	$y' + \frac{y}{x} = \sin x$	$y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$
9	$xy' = y + 3x \cdot \sin \frac{y}{x}$	$y'' + 25y = \cos 5x - 10\sin 5x$
10	$y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}$	$y'' + 10y' - 11y = -9e^{-5x}$
11	$(3x + y)y' = x + 3y$	$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$
12	$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$	$y'' - 16y = 32e^{4x}$
13	$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$	$y'' - 9y = 5e^{3x}$
14	$y' - 2xy = 2xe^{x^2}$	$y'' - 3y' + 2y = \sin x$
15	$2x^3 y' = y(2x^2 - y^2)$	$y'' - 2y' - 8y = e^{4x}$
16	$y' - \frac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}$	$y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$
17	$y' = \frac{x+8y}{8x+y}$	$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$
18	$y' \operatorname{ctg} x + y = 2$	$y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$
19	$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$	$y'' + y = 4\sin x$
20	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$	$y'' + 2y' + 10y = xe^x$
21	$y' = \frac{x+2y}{2x-y}$	$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$
22	$x(y' - y) = (1+x^2)e^x$	$y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$
23	$xy' + y \ln^2 \frac{y}{x} = 0$	$y'' - 4y = 8e^{2x}$
24	$y' + \frac{3}{x}y = -\frac{5}{x^3}$	$y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$
25	$(x-y)y' = 2x+y$	$y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$
26	$xy' - y = x^2 \cos x$	$y'' + 6y' = \cos 4x - 8\sin 4x$
27	$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}$	$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$

28	$y' - \frac{2xy}{x^2 + 1} = \operatorname{arctg}^2 x$	$y'' + 5y' + 6y = 52 \sin x$
29	$y' = \frac{x + y}{x - y}$	$y'' - 4y' + 4y = 16e^{2x}$
30	$y'x + y = \cos x$	$y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$

Задание 9. Найдите область сходимости степенного ряда (таблица 16).

Таблица 16 – Данные к заданию 9

№ вари- анта		№ вари- анта		№ вари- анта	
1	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$	11	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 4^{2n}}$	21	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n^2 \cdot 5^{n+1}}$
2	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} x^n}{\sqrt{n}}$	12	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n} x^n}{(2n+1)^2}$	22	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)^3}$
3	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^{n-1}}$	13	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+1) \cdot 2^n}$	23	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^{n-1}}$
4	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$	14	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{(4n+1) \cdot 5^n}}$	24	$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{2n} \cdot x^{2n-1}$
5	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(4n-3)^2}$	15	$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$	25	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1} \cdot 2^{n-1}}$
6	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n \cdot 3^n}$	16	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n} x^n}{\sqrt{n}}$	26	$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \cdot x^{2n}$
7	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 5^{2n-1}}$	17	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2n-1} \cdot 2^{n-1}}$	27	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1) \cdot 3^n}$
8	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2} x^n}{\sqrt{n+2}}$	18	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{(3n-2) \cdot 2^n}}$	28	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2n+1) \cdot 8^n}$
9	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^n}{n^2 + 1}$	19	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{2n+1}$	29	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)^2 \cdot \sqrt{3^{n-1}}}$
10	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}}$	20	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 3^n}$	30	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 3^{n-1}}$

ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ

Тема 1 Предел и непрерывность функции

1.1. а) 15; б) $\frac{26}{103}$; в) 0; г) ∞ ; д) 2; е) $\frac{2}{5}$; ж) $\frac{2}{3}$; з) 3. 1.2. а) 2; б) $\frac{1}{8}$; в) e^2 ; г) $\frac{1}{e}$. 1.3. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{3}{4}$; в) -2; г) -4; д) $\frac{1}{8}$; е) 4; ж) $\frac{1}{4}$; з) $+\infty$. 1.4. а) $\frac{3}{5}$;

б) e^{-3} ; в) e ; г) e^6 . 1.5. а) 1; б) 0. 1.6. При $x=2$ функция непрерывна; при $x=1$ – точка разрыва второго рода, $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x}{x-1} = -\infty$;

$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x}{x-1} = +\infty$. 1.7. а) $x=-1$ – точка разрыва второго рода; б) $x=\pm 2$ – точки разрыва второго рода; в) функция не имеет точек разрыва; г) $x=2$ – точка неустранимого разрыва первого рода, скачок $\Delta=4$; д) в точке $x=1$ функция непрерывна, точка $x=2,5$ – точка неустранимого разрыва первого рода, скачок $\Delta=-1$.

Тема 2 Производная и дифференциал функции

2.1. 1. $1+6x-x^2$; 2. $1-\frac{1}{\sqrt{x}}$; 3. $\frac{12x}{(x^2+3)^2}$; 4. $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-3\sqrt{x}$;

5. $x(2\sin x + x\cos x)$; 6. $15(3x+2)^4$; 7. $2\cos(2x-1)$; 8. $\frac{1+\sin^2 x}{2\cos^3 x}$;

9. $(2^x + 3 \cdot 2^{3x})\ln 2$; 10. $\frac{3e^{-x}(1-2x)}{2\sqrt{x}}$; 11. $2\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x$; 12. $-\ln x$;

13. $\frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$; 14. $\arccos x$; 15. $\frac{2}{1+x^2}$. 2.2. 1. $\frac{10x+3y}{4y-3x}$;

2. $\frac{e^y - ye^x + y}{e^x - xe^y - x}$; 3. $-\frac{e^x \sin y + e^{-y} \sin x}{e^x \cos y + e^{-y} \cos x}$. 2.3. 1. $\frac{6x^3 + 12x^2 - 114x + 56}{(x^2 - 2x + 5)^3}$;

2. $\frac{10}{9} \cdot \frac{x-6}{\sqrt[3]{(x-5)^4}}$; 3. $4 \sin x + x \cos x$. 2.4. 0,25.

Тема 3 Применение производной к исследованию функции

3.1. 1. $-\frac{3}{11}$; 2. 2; 3. $\frac{1}{18}$; 4. $\frac{48}{11}$; 5. $\frac{2}{5}$; 6. 2; 7. $\frac{1}{2}$; 8. $-\frac{3}{5}$; 9. 2; 10. 1.

3.2. 1. Нет экстремума; 2. $y_{\min} = y(-2) = -1$; $y_{\max} = y(2) = 1$;

3. $y_{\min} = y(\pm 2) = 4$. 3.3. 1. $y_{\text{наиб}} = y(2) = 10$; $y_{\text{наим}} = y(0) = -10$;

2. $y_{\text{наиб}} = y(1) = 1$; $y_{\text{наим}} = y(2) = 2(1 - \ln 2)$. 3.4. 1. Точки перегиба $(-3; 294)$ и $(2; 114)$; выпуклый на $(-\infty; -3)$ и $(2; +\infty)$, вогнутый на $(-3; 2)$; 2. Кривая вогнутая во всей области своего расположения: $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$; 3. Точек перегиба нет; выпуклый на $(-2; 2)$, вогнутый на $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$. 3.5. 1. $x = -2$ и $y = 2x - 4$; 2. $y = -1$; 3. $y = 0$ при $x \rightarrow +\infty$. 3.6. 1. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. График пересекает оси координат в точках $(-3; 0)$ и $(0; 0)$. Асимптот нет. $y_{\min} = y(0) = 0$; $y_{\max} = y(-2) = 4$. Точка перегиба $(-1; 2)$; 2. Функция определена и непрерывна всюду, кроме точки $x = 2$, которая является точкой разрыва второго рода. График пересекает оси координат в точках $(-1; 0)$ и $\left(0; -\frac{1}{2}\right)$. Асимптоты $x = 2$ и $y = x + 4$; $y_{\min} = y(5) = 12$; $y_{\max} = y(-1) = 0$. Точек перегиба нет (гипербола); 3. Функция определена и непрерывна на всей числовой оси. Нечетная. График пересекает оси координат в точке $(0; 0)$. Асимптота $y = 0$. $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{\sqrt{e}} \approx -0,6$; $y_{\max} = y(1) = \frac{1}{\sqrt{e}}$. Точки перегиба

$$\left(-\sqrt{3}; -\sqrt{\frac{3}{e^3}}\right), (0;0) \text{ и } \left(\sqrt{3}; \sqrt{\frac{3}{e^3}}\right).$$

Тема 4 Неопределенный интеграл

4.1. 1. $x^3 - x^2 + 5x + C$; **2.** $2\ln|x| - \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + C$; **3.** $x + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x} + C$;

4. $\ln|x^2 - 5| + \frac{3}{2\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}}\right| + C$; **5.** $x - \operatorname{arctg} x + C$; **6.** $x + \frac{1}{2}\cos 2x + C$.

4.2. 1. $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C$; **2.** $C - \sqrt{1 + 2\cos x}$; **3.** $\frac{1}{6\sqrt{5}} \ln\left|\frac{x^3 + \sqrt{5}}{x^3 - \sqrt{5}}\right| + C$;

4. $\frac{1}{4}\ln(3 + 4e^x) + C$; **5.** $\frac{2}{3}(-2 + \ln x)\sqrt{1 + \ln x} + C$; **6.** $\frac{1}{6}e^{2x^3+1} + C$.

4.3. 1. $x \sin x + \cos x + C$; **2.** $C - \frac{1 + 2\ln x}{4x^2}$; **3.** $C - \frac{x}{2} + \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x$;

4. $x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$; **5.** $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2 - 6x + 2) + C$;

6. $\frac{x^2 - 1}{2} \ln|x - 1| - \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} + C$. **4.4. 1.** $\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x + 2}{2} + C$; **2.** $\frac{1}{3} \ln\left|\frac{x - 1}{x + 2}\right| + C$;

3. $\frac{x^3}{3} + x^2 + 4x + 8\ln|x - 2| + C$; **4.** $3\ln|x + 3| + \frac{11}{x + 3} + C$; **5.** $\frac{1}{x} + \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| + C$;

6. $x + 3\ln\left|\frac{x - 3}{x - 2}\right| + C$.

Тема 5 Определенный интеграл

5.1. 1. $4e$; **2.** $\frac{2}{9}$; **3.** $0,8(2\sqrt[4]{2} - 1)$; **4.** $2\ln 2 - 1$; **5.** $\frac{1}{3}$; **6.** π . **5.2. 1.** 36 ; **2.** 1 ;

3. $\frac{8}{3}$; **4.** $\frac{125}{6}$; **5.** $\frac{16}{3}$; **6.** $\frac{34}{27}$. **5.3. 1.** $\frac{256\pi}{15}$; 8π ; **2.** $\frac{178\pi}{15}$; $\frac{21\pi}{2}$; **3.** $\frac{6\pi}{7}$;

$\frac{3\pi}{5}$. **5.4. 1.** $\frac{1}{2}$; **2.** $\frac{1}{\ln 2}$; **3.** $\frac{1}{2}$; **4.** $\frac{3}{2}$; **5.** Расходится; **6.** π .

Тема 6 Функции нескольких переменных

6.1. 1. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2$; **2.** $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy}y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy}x$; **3.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
 $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; **4.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$;
5. $z'_x = 45x^2y^2(5x^3y^2 + 1)^2$, $z'_y = 30x^3y(5x^3y^2 + 1)^2$; **6.** $z'_x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
 $z'_y = \frac{y}{(x + \sqrt{x^2 + y^2})\sqrt{x^2 + y^2}}$; **7.** $z'_x = yx^{y-1}$, $z'_y = x^y \ln x$; **8.** $z'_x = 1$, $z'_y = 0$.
6.2. 1. $z''_{xx} = 6xy$, $z''_{yy} = \cos y$, $z''_{xy} = 3x^2$; **2.** $z''_{xx} = \frac{2(y - x^2)}{(x^2 + y)^2}$,
 $z''_{xy} = -\frac{2x}{(x^2 + y)^2}$, $z''_{yy} = -\frac{1}{(x^2 + y)^2}$. **6.3. 1.** $z_{\min} = z(1; 4) = -21$; **2.** Нет экстремума; **3.** $z_{\min} = z\left(1; \frac{1}{2}\right) = 4$; **4.** $z_{\max} = z(4; 4) = 15$.

Тема 7 Дифференциальные уравнения

7.2. 1. $(x-1)^2 + y^2 = C^2$; **2.** $(1+y)(1-x) = C$; **3.** $2\sqrt{x} - \arctg y = C$;
4. $y = -\ln(C - e^x)$; **5.** $x^2 + y^2 = \ln Cx^2$; **6.** $y = \frac{C}{\cos x} - 1$; **7.** $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$;
8. $y = \frac{1+x}{1-x}$. **7.3. 1.** $\arctg \frac{y}{x} + \ln C\sqrt{x^2 + y^2} = 0$; **2.** $x = (y-x)\ln C(y-x)$;
3. $y = xe^{Cx}$; **4.** $x = -y(1 + \ln|y|)$. **7.4. 1.** $y = \frac{1}{2}(\cos x + \sin x + Ce^{-x})$;
2. $y = (x+C)(1+x^2)$; **3.** $y = (x+C)e^x$; **4.** $y = x^2(e^x - e)$.
7.5. 1. $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$; **2.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}$; **3.** $y = C_1 + C_2e^{3x}$;
4. $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$; **5.** $y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;
6. $y = e^{-4x}(3 + 10x)$. **7.6. 1.** $y = C_1 + C_2e^{3x} + x^2$;
2. $y = e^x(0,16 \cos 3x + 0,28 \sin 3x) + x^2 + 2,2x + 0,84$;
3. $y = e^{2x}\left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2\right)$; **4.** $y = C_1 + C_2e^{-5x} - \frac{1}{5}xe^{-5x}$;

5. $y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \cos 2x$; 6. $y = \cos 2x + \frac{1}{3} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin x$.

Тема 8 Числовые ряды

- 8.1. 1. Да; 2. Нет; 3. Да; 4. Да. 8.2. 1. Расходится; 2. Сходится; 3. Сходится. 8.3. 1. Сходится; 2. Расходится; 3. Сходится; 4. Сходится. 8.4. 1. Сходится; 2. Сходится; 3. Расходится; 4. Расходится. 8.5. 1. Сходится абсолютно; 2. Сходится условно; 3. Расходится. 8.6. 1. Сходится; 2. Расходится; 3. Расходится; 4. Сходится; 5. Сходится; 6. Сходится условно. 8.7. 1. $-3 < x \leq 3$; 2. $-\infty < x < +\infty$; 3. $-9 \leq x \leq -7$; 4. $-1 \leq x < 1$; 5. $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$; 6. Сходится только при $x = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Попов, А.М. Высшая математика для экономистов: учебник для бакалавров / А.М. Попов, В.Н. Сотников; под ред. проф. А.М. Попова. – М.: Издательство Юрайт, 2012.
2. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин и др.; под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ, 2004.
3. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – М.: Наука, 2003.
4. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004.
5. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2005.
6. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2002.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Тема 1 Предел и непрерывность функции.....	5
Примеры решения задач.....	9
Контрольные вопросы.....	15
Задачи для самостоятельного решения.....	15
Тема 2 Производная и дифференциал функции.....	17
Примеры решения задач.....	19
Контрольные вопросы.....	22
Задачи для самостоятельного решения	22
Тема 3 Применение производной к исследованию функции.....	23
Примеры решения задач.....	27
Контрольные вопросы.....	34
Задачи для самостоятельного решения	35
Тема 4 Неопределенный интеграл.....	36
Примеры решения задач.....	42
Контрольные вопросы.....	45
Задачи для самостоятельного решения	46
Тема 5 Определенный интеграл.....	47
Примеры решения задач.....	52
Контрольные вопросы.....	55
Задачи для самостоятельного решения	55
Тема 6 Функции нескольких переменных.....	57
Примеры решения задач.....	61
Контрольные вопросы.....	63
Задачи для самостоятельного решения	64
Тема 7 Дифференциальные уравнения.....	65
Примеры решения задач.....	71
Контрольные вопросы.....	75
Задачи для самостоятельного решения	75
Тема 8 Числовые ряды.....	77
Примеры решения задач.....	82
Контрольные вопросы.....	85
Задачи для самостоятельного решения	85
Задания для самостоятельной работы.....	87
Ответы к задачам.....	103
Литература.....	108

Наталья Михайловна Семикова

МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**Методические указания и задания
для самостоятельной работы**

Компьютерная верстка
Корректор

Н.М. Семиковой
Л.А. Артамонова

Подписано в печать
Бумага Гознак Print
Тираж 100 экз.

Формат 60×84 1/16
Усл. печ. л.
Заказ №

РИО ПГСХА

440014, г. Пенза, ул. Ботаническая, 30