

*Наиболее распространенные законы распределения
дискретной случайной величины*

Определение. Случайная величина X называется распределенной **по биномиальному закону** с параметрами n и p , если ее возможные значения X принимают значения $0, 1, \dots, m, \dots, n$, а соответствующие вероятности вычисляются по формуле Бернулли (или приблизительно по формуле Лапласа).

$$p_i = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad q = 1 - p, \quad 0 < p < 1$$

Биномиальный закон распределения используется для X – числа наступления события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых событие A ожидается с одной и той же вероятностью p .

Утверждение. Если X распределена по биномиальному закону, то

$$M(X) = np;$$

$$D(X) = npq$$

Определение. Случайная величина X называется распределенной **по геометрическому закону** с параметром p , если ее возможные значения k принимают значения $1, 2, \dots, n$, а соответствующие вероятности вычисляются как $p_i = P(X = k) = q^{k-1} \cdot p$, $q = 1 - p$.

Геометрический закон используется для X – числа проведенных испытаний при условии, что испытания прекращаются как только появляется событие, вероятность появления которого в каждом испытании одинакова и равна p .

Утверждение. Если X распределена по геометрическому закону, то

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}$$

Определение. Случайная величина X называется распределена **по закону Пуассона**, если ее возможные значения k принимают значения $0, 1, 2, \dots, n$, а соответствующие вероятности вычисляются

по формуле $p_i = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

Утверждение. Если X распределена по закону Пуассона, то

$$M(X) = \lambda \quad D(X) = \lambda^2$$

Пример 3. Генетический признак А у потомства появится с вероятностью $\frac{1}{8}$. Определить среднее число потомства с этим признаком, если число потомства 10. Составить закон распределения для X-числа потомства с признаком А.

Решение: Возможные значения X: 0, 1, 2,...,10.

При $k \in \{0,1,...,10\}$

Найдем $p_i = P(X = k)$ – вероятность того, что ровно k особей в потомстве имеет признак А.

Имеем повторные независимые испытания, поскольку:

1) число испытаний $n=10$ число проверенных особей

2) в каждом испытании ожидается событие А – появление признака А – с одной и той же вероятностью $p = P(A) = \frac{1}{8}$.

3) речь идет о том, что событие А появится ровно $m=k$ раз.

$p_i = P(X = k) = p_n(k)$, т.к. $n \leq 10$ применим формулу Бернулли.

$$p_i = P(X = k) = p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, q=1-p$$

$$p_i = P(X = k) = C_{10}^k \left(\frac{1}{8}\right)^k \left(1 - \frac{1}{8}\right)^{10-k} = C_{10}^k \left(\frac{1}{8}\right)^k \left(\frac{7}{8}\right)^{10-k}$$

Имеем:

x_i	0	1	...	10
p_i	$C_{10}^0 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{10}$	$C_{10}^1 \cdot \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^9$	...	$C_{10}^{10} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{10} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^0$

– закон в табличной форме

и для $k=0...10$ $p_k = P(X = k) = C_{10}^k \left(\frac{1}{8}\right)^k \left(\frac{7}{8}\right)^{10-k}$ – закон в

аналитической форме.

Среднее значение X – математическое ожидание.

Поскольку имеем биномиальный закон $M(X)=np$

$$M(X) = 10 \cdot \frac{1}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1,25 \text{ – искомое среднее число.}$$

2 Непрерывная случайная величина (НСВ)

Определение. Случайная величина, возможные значения которой заполняют сплошь некоторый интервал (не существует таких значений в этом интервале между которыми нет еще хотя бы

одного возможного значения) называют *непрерывной случайной величиной*.

Способы задания непрерывной случайной величины X :

1) Функцией распределения $F(x)$: $F(x)=P(X<x)$

2) Функцией плотности распределения $f(x)$: $f(x)=F'(x)$

Замечание. Функцию распределения можно составить и для дискретной случайной величины. Здесь $P(X<x)$ – вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше некоторого x . Функция распределения для дискретной случайной величины разрывна, для непрерывной случайной величины – непрерывна.

Свойства $F(x)$, $f(x)$, связь с вероятностью на интервале:

1) $0 \leq F(x) \leq 1$ для всех x ;

2) $F(x)$ неубывающая;

3) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$;

4) $f(x) \geq 0$;

5) $P(c \leq X \leq d) = P(c < X \leq d) = P(c \leq X < d) = P(c < X < d)$

6) $P(c \leq X \leq d) = F(d) - F(c)$;

7) $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx$

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

Замечание. Свойство 7 $P(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(x)dx = S_{\text{крив.трапеции}}$ –

площадь криволинейной трапеции ограниченной сверху $y=f(x)$, снизу осью OX , слева $x=c$, справа $x=d$.

Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Определение. Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X , обозначают $M(X)$, называют $\int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Определение. Дисперсией непрерывной случайной величины X , обозначается $D(X)$, называют $M(X-M(X))^2$.

1 способ вычисления дисперсии (по определению)

$$D(X) = M[(X - M(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - M(X))^2 \cdot f(x) dx$$

2 способ вычисления дисперсии (по свойству дисперсии):

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

где $M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx$, а $M(X) = (M(X))^2$

Замечание. Второй способ вычисления дисперсии более предпочтителен (сводится к менее трудоемким вычислениям).

Пример 4. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -2 \\ c(x^2 + 4), & \text{если } -2 < x \leq 1 \\ 0, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$

c – постоянная

Найти: а) c ; б) $M(X)$; в) $P(-1 < x < 3)$; г) $D(X)$; д) $F(x)$ (на оценку 4-5);

Решение:

а) найдем неизвестный параметр c используя свойство $f(x)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Чтобы в интервале интегрирования $f(x)$ не изменялась (не изменялось ее аналитическое задание) разобьем данный интервал следующим образом: $(-\infty; -2]$; $(-2; 1]$; $(1; +\infty)$.

Тогда интеграл на исходном интервале есть сумма интегралов на интервалах его составляющих.

Подставим значение $f(x)$ из условия задания $f(x)$ в каждом полученном интервале.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^1 c(x^2 + 4) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx =$$

$$= c \int_{-2}^1 (x^2 + 4) dx = c \left(\frac{x^3}{3} + 4 \cdot x \right) \Big|_{-2}^1 = c \left(\left(\frac{1}{3} + 4 \right) - \left(\frac{-8}{3} - 8 \right) \right) =$$

$$= c \left(\frac{1}{3} + 4 + \frac{8}{3} + 8 \right) = 15c$$

Т.к. $15c = 1$, то $c = \frac{1}{15}$.

В процессе вычисления интеграла использовались формулы:

$$\int (h(x) \pm g(x)) dx = \int h(x) dx \pm \int g(x) dx;$$

$$\int k \cdot g(x) dx = k \int g(x) dx, k - const;$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad \int dx = x + C;$$

$$\int_a^b g(x) dx = G(x) \Big|_a^b = G(b) - G(a), \text{ где } G(x) - \text{ первообразная для } g(x)$$

б) для нахождения $M(X)$ воспользуемся формулой

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

При этом, аналогично п. а), разобьем весь интервал интегрирования на частные интервалы его составляющие на которых $f(x)$ имеет фиксированное аналитическое задание:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^1 x \cdot \frac{1}{15} \cdot (x^2 + 4) dx + \int_1^{+\infty} 0 dx =$$

$$= \frac{1}{15} \int_{-2}^1 (x^3 + 4x) dx = \frac{1}{15} \left(\frac{x^4}{4} + 4 \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^1 =$$

$$= \frac{1}{15} \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{4}{2} \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} + 4 \frac{(-2)^2}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{15} \left(\frac{1}{4} + 2 - 4 - 8 \right) = \frac{1}{15} \left(\frac{1}{4} - 10 \right) = \frac{-39}{4 \cdot 15} = \frac{-13}{4 \cdot 5} = -\frac{13}{20}$$

в) найдем вероятность на интервале по формуле

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x) dx$$

$$P(-1 \leq x \leq 3) = \int_{-1}^1 f(x) dx$$

На интервале интегрирования $f(x)$ меняет свое аналитическое задание, поэтому, аналогично приему в п. а), запишем:

$$\begin{aligned}
 P(-1 \leq x \leq 3) &= \int_{-1}^1 \frac{1}{15} (x^2 + 4) dx + \int_1^3 0 dx = \int_{-1}^1 \frac{1}{15} (x^2 + 4) dx = \\
 &= \frac{1}{15} \left(\frac{x^3}{3} + 4 \cdot x \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{15} \left(\left(\frac{1}{3} + 4 \right) - \left(\frac{-1}{3} - 4 \right) \right) = \\
 &= \frac{1}{15} \left(\frac{1}{3} + 4 + \frac{1}{3} + 4 \right) = \frac{1}{15} \cdot \frac{26}{3} = \frac{26}{45}
 \end{aligned}$$

г) для нахождения дисперсии воспользуемся формулой

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X)$$

$$\begin{aligned}
 M(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{-2} 0 dx + \int_{-2}^1 \frac{1}{15} (x^4 + 4 \cdot x)^2 dx + \int_1^{+\infty} 0 dx = \\
 &= \frac{1}{15} \left(\frac{x^5}{5} + \frac{4 \cdot x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{1}{15} \left(\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{3} \right) - \left(\frac{-32}{5} - \frac{32}{3} \right) \right) = \frac{1}{15} \left(\frac{33}{5} + \frac{36}{3} \right) = \\
 &= \frac{1}{15} \left(12 + \frac{33}{5} \right) = \frac{93}{3 \cdot 25} = \frac{31}{25}
 \end{aligned}$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{31}{25} - \left(-\frac{13}{20} \right)^2 = \frac{31}{25} - \frac{169}{400}$$

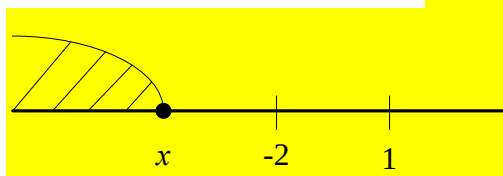
На «5»

д) найдем функцию распределения $F(x)$ по формуле

$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ рассматривая интервалы $x \in (-\infty; -2]; (-2; 1]; (1; +\infty)$ (вся числовая прямая разбивается точками переходов от одной ветки функции $f(X)$ к другой).

1) $x \in (-\infty; -2]$

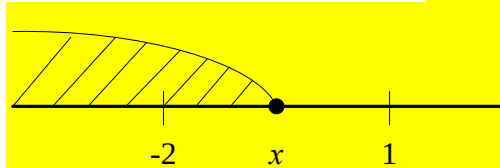
$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$



На интервале интегрирования $(-\infty; x)$ при таком расположении x , $f(t)$ не изменяется, $f(t)=0$, поэтому $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$.
Здесь рассматривают $f(t)$, а не $f(x)$ для удобства последующей подстановки при вычислении определенного интеграла.

2) $x \in (-2; 1]$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

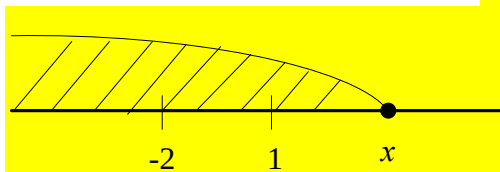


При таком расположении x интервал интегрирования $(-\infty; x)$ необходимо разбить на интервалы, где $f(t)$ будет неизменна: $(-\infty; -2]$ и $[-2; x)$, где $f(t) = \frac{1}{15}(t^2 + 4)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{-2} 0dt + \int_{-2}^x \frac{1}{15}(t^2 + 4)dt = \frac{1}{15} \left(\frac{t^3}{3} + 4 \cdot t \right) \Big|_{-2}^x = \\ &= \frac{1}{15} \left(\left(\frac{x^3}{3} + 4 \cdot x \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) \right) = \frac{1}{15} \left(\frac{x^3}{3} + 4 \cdot x + \frac{32}{3} \right) \end{aligned}$$

3) $x \in (1; +\infty)$

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$



При таком расположении x интервал интегрирования $(-\infty; x)$ необходимо разбить на интервалы $(-\infty; -2]$, где $f(t)=0$; $(-2; 1]$, где $f(t) = \frac{1}{15}(t^2 + 4)$ и $(1; +\infty)$, где $f(t)=0$.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \int_{-\infty}^{-2} 0 dt + \int_{-2}^1 \frac{1}{15} (t^2 + 4) dt + \int_1^x 0 dt = \frac{1}{15} \left(\frac{t^3}{3} + 4 \cdot t \right) \Big|_{-2}^1 = \\
 &= \frac{1}{15} \left(\left(\frac{1}{3} + 4 \right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2) \right) \right) = \frac{1}{15} \left(\frac{1}{3} + 4 + \frac{8}{3} + 8 \right) = \frac{15}{15} = 1
 \end{aligned}$$

$$F(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leq -2 \\ \frac{1}{15} \left(\frac{x^3}{3} + 4 \cdot x + \frac{32}{3} \right), & \text{если } -2 < x \leq 1 \\ 1, & \text{если } x > 1 \end{cases}$$