

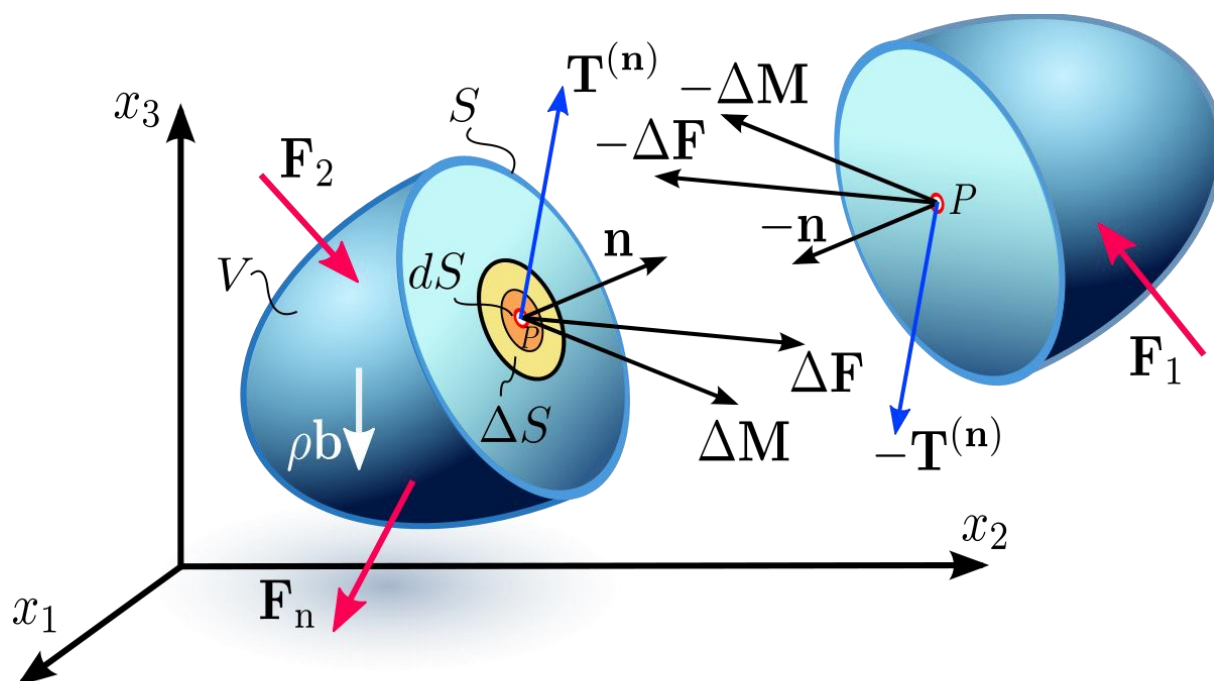
МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО Пензенский ГАУ

В.А. Овтов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов



Пенза 2018

**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ФГБОУ ВО Пензенский ГАУ

В.А. Овтов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов, обучающихся
по направлениям подготовки: 35.03.06 Агроинженерия;
23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических
машин и комплексов

Пенза 2018

УДК 539.3/6 (075)

*О 34

Рецензент – канд. техн. наук, доцент А.В. Поликанов.

Печатается по решению методической комиссии инженерного факультета от 26 марта 2018 года, протокол № 7.

Овтов, В.А.

Сопротивление материалов: учебное пособие для самостоятельной работы студентов / В.А. Овтов. – Пенза: РИО ПГАУ, 2018. – 159 с.

Учебное пособие предназначено для рациональной организации самостоятельной работы студентов во внеаудиторное время с целью закрепления основных теоретических знаний, развития навыков в проведении инженерных расчетов, их оформления в соответствии с требованиями стандарта. Включают в себя основные теоретические сведения по изучаемым темам, вопросы для самоконтроля, примеры решения задач, индивидуальные задания для РГР.

© ФГБОУ ВО Пензенский ГАУ, 2018

© В.А. Овтов, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Учебное пособие для обучающихся по направлениям подготовки 35.03.06 Агроинженерия, 23.03.03 Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов.

Данное учебное пособие предназначено для рациональной организации самостоятельной работы студентов во внеаудиторное время с целью закрепления основных теоретических знаний, развития навыков в проведении инженерных расчетов, их оформления в соответствии с требованиями стандарта. Плодотворное изучение дисциплины возможно только при систематической работе студента в течение всего периода обучения. Знание теории еще недостаточно. Главное – это научиться применять теорию на практике, то есть уметь решать различные инженерно-технические задачи, выбрав определенный метод расчета, а при проектировании вести поиск для создания прекрасно работающих конструкций, отвечающих вопросам прочности, жесткости и устойчивости, с наименьшими затратами на их изготовление.

Учебное пособие включает перечень литературы по дисциплине, основные требования стандарта к оформлению расчетов, вопросы для подготовки и самопроверки по темам, примеры выполнения расчетов, схемы и исходные данные к индивидуальным заданиям.

Одной из составных частей системы обучения и отчетности студентов является защита расчетно-графических работ (РГР).

Согласно рабочей программе и учебному плану факультета в I семестре студенты изучают простые виды деформации и работают над темами:

расчеты на прочность и жесткость при растяжении сжатии (задача 1). Определение геометрических характеристик плоских сечений (задача 2);

расчеты на прочность и жесткость при кручении (задача 3). Расчеты на прочность и жесткость при изгибе. Проверка прочности по главным напряжениям (задача 4).

Во II семестре студенты изучают сложное сопротивление (совместное действие нескольких видов деформаций), динамическое действие нагрузок и работают над темами:

расчеты валов, работающих на совместное действие кручения и изгиба (задача 5);

расчеты стоек на устойчивость (задача 6);
расчеты при ударе (задача 7).

Рассчитанное задание сдается на проверку, после чего защищается студентом. Защита заданий, отработка пропущенных занятий и полученных неудовлетворительных отметок проходит во внеурочное время. Этап подготовки включает самостоятельную работу студента над теоретическими вопросами по теме и закрепление практических навыков ведения расчетов. Для защиты заданий календарно-тематический план устанавливает сроки их проведения.

Студенты, успешно освоившие программу курса «Сопротивление материалов», должны

знать: основные принципы постановки и решения задач сопротивления материалов, правила расчета элементов конструкций при действии нагрузок произвольного типа, теории прочности;

уметь: составлять механико-математические модели типовых элементов конструкции, использовать их при расчетах на прочность, жесткость и устойчивость, оценивать прочностную надежность элементов конструкций;

владеть: инженерными методами расчета типовых элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость, основами проектных расчетов элементов конструкций.

УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Расчетно-проектировочные работы, относящиеся в стандарте к текстовым документам, выполняют в машинописном варианте на листах писчей бумаги формата А4 (210×297 мм) с текстом на одной стороне.

Рекомендуемые размеры полей: слева – 30 мм, справа – 10 мм, сверху – 20 мм, снизу – 25 мм. На рабочем поле располагают текст, схемы, эюры и т. п. Нумерация страниц – сквозная, начиная с титульного листа (на титульном листе номер страницы не проставляется, но из общей нумерации не исключается), и указывается внизу под границей рабочего поля в центре строки.

Абзацы в тексте начинают отступом, равным 1,25 см.

Текст документа при необходимости разбивают на разделы и подразделы. Разделы должны иметь порядковые номера в пределах всего документа, обозначенные арабскими цифрами без точки и записанные с абзацного отступа. Подразделы должны иметь нумерацию в пределах каждого раздела. Номер подраздела состоит из номеров раздела и подраздела, разделенных точкой. В конце номера подраздела точка не ставится. Разделы и подразделы должны иметь заголовки.

Каждый раздел текстового документа рекомендуется начинать с нового листа (страницы).

Количество иллюстраций должно быть достаточным для пояснения излагаемого материала. Они могут быть расположены как по тексту, так и на отдельных листах чертежной или миллиметровой бумаги, и выполнены в соответствии с требованиями ГОСТ. Иллюстрации следует нумеровать арабскими цифрами сквозной нумерацией или нумерацией в пределах раздела.

Иллюстрации могут иметь наименование и подрисуночный текст. Располагают подрисуночный текст обычно по центру страницы или по ширине иллюстрации без красной строки. При небольшой ширине иллюстрации подрисуночный текст может быть расположен рядом с ней (справа).

При использовании в расчетах формул, справочных данных и эмпирических зависимостей должна быть ссылка на источник, из которого они заимствованы.

В формулах в качестве символов следует применять обозначения, установленные соответствующими государственными стан-

дартами. Пояснения символов и числовых коэффициентов, входящих в формулу, если они не пояснены ранее в тексте, должны быть приведены непосредственно под формулой. Пояснения каждого символа следует давать с новой строки в той последовательности, в которой символы приведены в формуле. Первая строка пояснения должна начинаться со слова «где» без двоеточия после него. В этом случае после формулы ставится запятая.

Переносить формулы на следующую строку допускается только на знаках выполняемых действий, причем знак в начале следующей строки повторяют. При переносе формулы на знаке умножения применяют знак « $\times$ ».

Порядковые номера формул, на которые имеются ссылки в последующем тексте, обозначают арабскими цифрами в круглых скобках у правого края страницы. Место номера, не уместящегося в строке формулы, располагают в следующей строке ниже формулы. Место номера при переносе формулы должно быть на уровне последней строки. Место номера формулы в виде дроби располагают на уровне основной горизонтальной черты.

При проведении расчетов следует применять только стандартизованные единицы измерения физических величин, их наименования и обозначения в соответствии с ГОСТ 8.417-81.

Наряду с единицами СИ (при необходимости) в скобках указывают единицы измерения ранее применявшихся систем, разрешенных к применению. Не допускается применение в одном и том же расчете разных систем обозначения физических величин.

Перечень литературы, используемой при проведении расчетов, помещают в конце работы и включают его в содержание.

1 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ (СЖАТИИ)

1.1 Напряжения и деформации при растяжении (сжатии)

На растяжение (сжатие) работают многие детали и элементы конструкций (цепи, тросы, колонны, сваи и т. д.).

Возьмем стержень постоянного поперечного сечения и загрузим его растягивающей силой F .

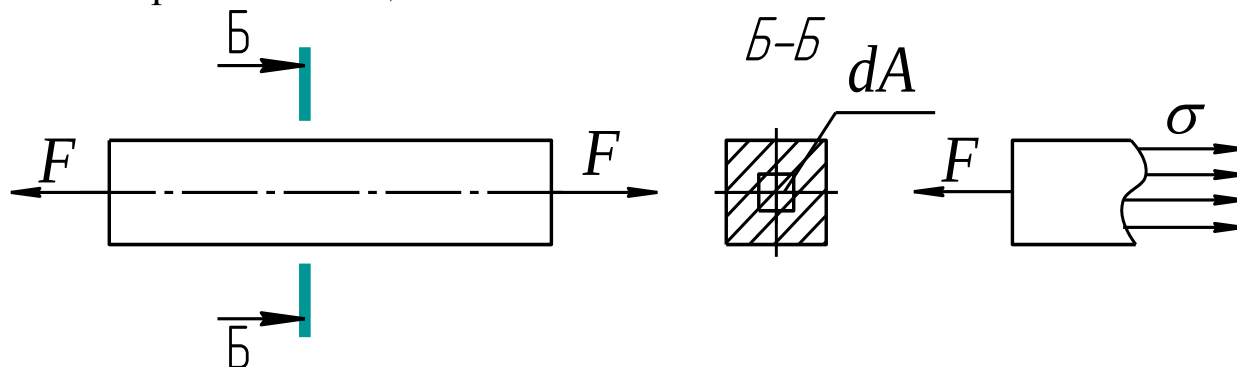


Рисунок 1.1 – Схема нагружения бруса внешней силой

Рассечем стержень плоскостью, отбросим его правую часть и рассмотрим, какие внутренние силы упругости будут действовать в сечении левой части стержня. Внутренние силы упругости перпендикулярны сечению, направлены в противоположную сторону действующей внешней нагрузке и уравнивают ее.

На основании гипотезы плоских сечений и многочисленных экспериментов можно заключить, что нормальные напряжения распределяются по поперечному сечению равномерно $\sigma = const$.

Напряжения, возникающие в поперечном сечении стержня, определяются по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

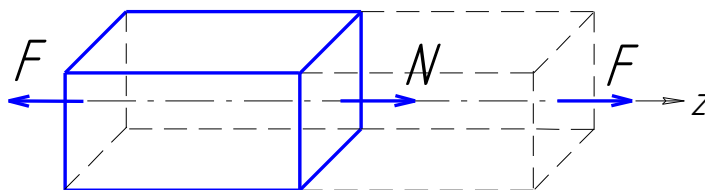
где N – продольная сила в поперечном сечении, Н;

A – площадь поперечного сечения, м².

Растяжение сжатие вызывает продольная сила (N).

Продольная (нормальная) сила N представляет собой сумму проекций на продольную ось стержня (балки) всех внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении.

Продольная сила численно равна алгебраической сумме проекций на ось всех внешних сил, действующих на отсеченную часть рамы (балки).



Правило знака для продольной силы: при сжатии «минус», при растяжении – «плюс».

Линейные деформации прямо пропорциональны нормальным напряжениям и определяются по закону Гука по формуле

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{A \cdot E},$$

где Δl – абсолютная деформация бруса, м;

l – длина бруса или его участков, м;

E – модуль продольной упругости первого рода (модуль Юнга) измеряется в МПа, характеризует сопротивляемость материала упругой деформации при растяжении (сжатии). Зависит от материала, определяется экспериментально (для стали $1,9...2,1 \times 10^5$ МПа, для чугуна $1,15...1,16 \times 10^5$ МПа).

Закон Гука показывает прямую зависимость между продольной абсолютной линейной деформацией и действующей внешней силой.

Произведение $A \cdot E$ называют жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии), измеряется в ньютонах (Н).

При выборе размеров и материала для того или иного элемента конструкции мы должны обеспечить определенный запас против возможности его разрушения или изменения формы.

Величина напряжений, достижение которых обуславливает разрушение материала, называется *пределом прочности* или *временным сопротивлением*.

Величина напряжений, при превышении которых материал получает незначительные деформации, называется *пределом упругости*.

Величина напряжений, при которых при постоянной нагрузке материал

испытывает деформации (течет), называется *пределом текучести*.

Допускаемые напряжения определяются следующим образом [1, 2]:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_B}{n}; \quad [\sigma] = \frac{\sigma_T}{n},$$

где σ_B – предел прочности;

σ_T – предел текучести;

n – коэффициент запаса прочности.

Условие прочности записывается при растяжении (сжатии) в следующем виде [2, 3]:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение, Па.

Условие прочности позволяет производить три вида расчета на прочность:

1) проверка прочности (проверочный расчет). По известной нагрузке (продольной силе N_{max} в опасном сечении бруса) и поперечным размерам (площади сечения A) определяют наибольшее рабочее напряжение и сравнивают с допускаемым напряжением материала;

2) подбор сечения (проектный расчет). По найденному усилию от заданной нагрузки и допускаемому напряжению применяемого материала определяют требуемую площадь поперечного сечения бруса, а значит, и размеры заданной формы сечения;

3) определение несущей способности. По известным поперечным размерам бруса и допускаемому напряжению материала устанавливают значение допускаемой продольной силы.

Задача № 1

Стальной брус жестко закреплен одним концом и загружен сосредоточенными силами, как показано на рисунке 1.3.

Требуется:

1) построить эпюры продольных сил N ;

- 2) из условия прочности определить размеры поперечного сечения заданной формы;
- 3) построить эпюры напряжений σ ;
- 4) определить перемещение свободного конца бруса (сечение $a-a$).

Данные взять из таблицы 1.

Таблица 1 – Исходные данные к задаче 1

№ строки	F , кН	l , м	Материал	σ_T , МПа	n	Форма сечения
1	48	0,5	Сталь	200	1,4	Круг
2	40	0,4	Ст. 2	210	1,5	Квадрат
3	58	0,7	Сталь	230	1,7	Прямоугольник, $h/b = 3,5$
4	62	1,2	Ст. 3	240	1,6	Круг
5	45	1,1	Сталь	260	1,8	Квадрат
6	50	1,2	Ст. 4	270	1,9	Прямоугольник, $h/b = 2,5$
7	52	0,9	Сталь	280	2,1	Круг
8	65	0,8	Ст. 5	290	2,2	Квадрат
9	54	0,6	Сталь	310	2,4	Прямоугольник, $h/b = 3,0$
10	60	1,3	Ст. 6	320	2,5	Круг

Пример расчета

Дано:

сила $F = 55$ кН;

длина $l = 1,0$ м;

материал бруса – сталь – Ст 4;

предел текучести $\sigma_T = 270$ МПа;

коэффициент запаса прочности, $n = 2,0$;

форма сечения – прямоугольник, $h : b = 2,5$.

Решение

Способ закрепления бруса – жесткая заделка (рисунок 1.2, а). В соответствии с типом опоры, предположим направление реакций связей – H_K , R_K и m_K . Но по способу нагружения бруса $H_K = 0$; $m_K = 0$. Таким образом, на расчетной схеме представлена реакция связи R_K , величина которой и действительное направление неизвестны.

Так как один конец бруса жестко защемлен, а другой свободен, реакцию R_K можно не определять. Рассмотрим конструкцию со свободного конца.

Мысленно разделим конструкцию на участки: BC , CD , DK . Границами участков являются сечения, где приложены внешние силы.

Произвольно на каждом участке проведем сечения. Роль каждого из них – расечь конструкцию только на две части.

Чтобы составить уравнения внутренних силовых факторов, обратимся к расчетной схеме бруса (рисунок 1.2, а). По способу приложения нагрузок он работает на растяжение (сжатие), и в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N . Продольная сила в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, на его продольную ось.

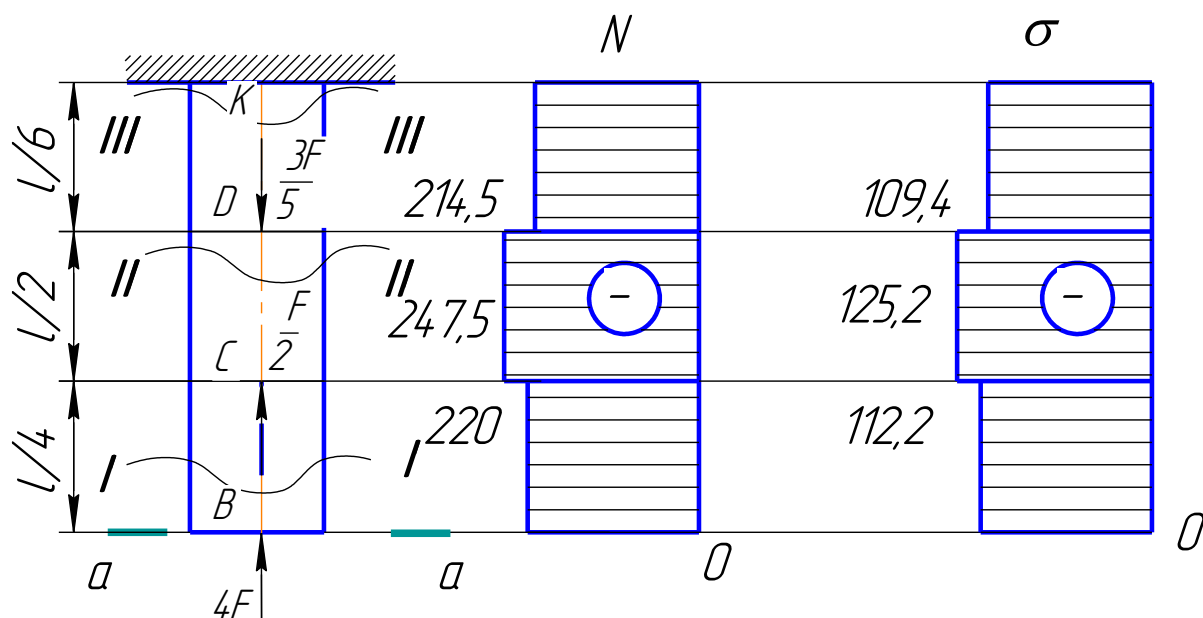


Рисунок 1.2 – Расчетная схема бруса. Эпюры продольных сил и напряжений

Правило знака для продольной силы: если сила стремится сжать указанное сечение, берем ее со знаком «минус», растянуть – «плюс».

Проведем произвольно сечение $I-I$ на участке BC и рассмотрим равновесие отсеченной нижней части:

$$N_I = -4F = -4 \cdot 55 = -220 \text{ кН.}$$

Проведем произвольно сечение $II-II$ на участке CD и рассмотрим равновесие отсеченной части:

$$N_{II} = -4F - F/2 = -4 \cdot 55 - 55/2 = -247,5 \text{ кН.}$$

Проведем произвольно сечение $III-III$ на участке DK и рассмотрим равновесие отсеченной части:

$$N_{III} = -4F - F/2 + 3F/5 = -4 \cdot 55 - 55/2 + 3 \cdot 55/5 = -214,5 \text{ кН.}$$

Закон изменения продольной силы по длине бруса представим в виде графика – эпюры продольных сил N . Для этого проведем нулевую линию, параллельную оси бруса, от которой в произвольно выбранном нами масштабе по оси абсцисс будем откладывать полученные числовые значения. Причем положительные значения можно откладывать вправо, отрицательные – влево. Так как в пределах одного участка продольная сила постоянна, то эпюра ее ограничена прямыми, параллельными оси бруса. Эпюры принято штриховать, при этом штриховка должна быть перпендикулярна оси элемента конструкции.

Опасными будут сечения бруса участка CD , так как именно на этом участке внутренний силовой фактор – продольная сила – достигает своего максимального абсолютного значения, т. е.

$$|N_{max}| = 247,5 \text{ кН.}$$

Размеры поперечного сечения бруса определим из проектного расчета на прочность.

Условие прочности при растяжении (сжатии) [1]:

$$\sigma_{max} = \frac{N_{max}}{A} \leq [\sigma],$$

где σ_{max} – напряжения в опасном сечении бруса, Па;

A – площадь поперечного сечения, м²;

$[\sigma]$ – допускаемое напряжение, Па.

Для прямоугольного сечения бруса

$$A = b \cdot h,$$

где b, h – стороны сечения, м.

При $h : b = 2,5$ получаем $h = 2,5b$ и $A = 2,5b^2$.

Величину допускаемых напряжений $[\sigma]$, МПа, определим по формуле [1].

Для пластичных материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n},$$

где σ_T – предел текучести, МПа;

n – коэффициент запаса прочности.

Тогда допускаемые напряжения определяются

$$[\sigma] = 270/2,0 = 1135 \text{ МПа.}$$

Из условия прочности определяем размеры стороны прямоугольного поперечного сечения

$$b \geq \sqrt{\frac{N_{max}}{2,5 \cdot [\sigma]}} = \sqrt{\frac{247,5 \cdot 10^3}{2,5 \cdot 1135 \cdot 10^6}} = 0,0271 \text{ м} = 27,1 \text{ мм.}$$

Принимаем $b = 28 \text{ мм.}$

$$h = 2,5b = 2,5 \cdot 28 = 70 \text{ мм.}$$

$$A = b \cdot h = 28 \cdot 70 = 1960 \text{ мм}^2.$$

Определим напряжения σ , МПа, в точках поперечного сечения бруса по формуле [1]

$$\sigma = \frac{N}{A},$$

где N – продольная сила в сечении, Па.

Тогда

$$\sigma_I = \frac{N_1}{A} = \frac{-220 \cdot 10^3}{1960 \cdot 10^{-6}} = -112,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = -112,2 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_1}{A} = \frac{-247,5 \cdot 10^3}{1960 \cdot 10^{-6}} = -125,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = -125,0 \text{ МПа}$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_1}{A} = \frac{-214,5 \cdot 10^3}{1960 \cdot 10^{-6}} = -109,4 \cdot 10^6 \text{ Па} = -109,4 \text{ МПа.}$$

По полученным данным построим эпюру нормальных напряжений (рисунок 1.2, в) в условно выбранном масштабе. При постоянном сечении бруса по всей его длине эпюра нормальных напряжений σ также будет ограничена прямыми, параллельными оси, так как для каждого из участков $N = \text{const.}$ Другими словами, эпюра нормальных напряжений σ соответствует эпюре продольных сил N (рисунок 1.2, б).

Деформацию бруса длиной l м, имеющего постоянное поперечное сечение, определим по формуле [4, 5]

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A},$$

где Δl – абсолютная деформация, м;

E – модуль продольной упругости, Па.

Для углеродистых сталей $E = (1,9...2,1) \cdot 10^5 \text{ МПа}$ [3].

Принимаем $E = 2,0 \cdot 10^5$ МПа.

Абсолютное перемещение (т. е. отсчитываемое от неподвижного сечения) заданного сечения $a-a$ будет зависеть от деформации участков BC , CD и DK , т. е. участков, заключенных между жесткой заделкой и названным сечением, и определяется как алгебраическая сумма деформаций этих участков.

$$\Delta l_{a-a} = \Delta l_{BC} + \Delta l_{CD} + \Delta l_{DK}.$$

Определим величину каждого из них:

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_I l_{BC}}{E \cdot A} = \frac{-220 \cdot 10^3 \cdot 0,25}{2,0 \cdot 10^{11} \cdot 1960 \cdot 10^{-6}} = -0,140 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Delta l_{CD} = \frac{N_{II} l_{CD}}{E \cdot A} = \frac{-247,5 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{2,0 \cdot 10^{11} \cdot 1960 \cdot 10^{-6}} = -0,316 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

$$\Delta l_{DK} = \frac{N_{III} l_{DK}}{E \cdot A} = \frac{-214,5 \cdot 10^3 \cdot 0,17}{2,0 \cdot 10^{11} \cdot 1960 \cdot 10^{-6}} = -0,093 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Абсолютное перемещение сечения $a-a$ бруса из уравнения будет равно

$$\begin{aligned} \Delta l_{a-a} &= (-0,14 - 0,316 - 0,093) \cdot 10^{-3} \text{ м} = -0,549 \cdot 10^{-3} \text{ м} = \\ &= -0,549 \text{ мм}. \end{aligned}$$

Выводы:

1) анализ эпюры продольных сил показывает, что опасными будут сечения бруса участка CD , так как здесь $|N_{max}| = 247,5$ кН;

2) размеры поперечного сечения бруса прямоугольной формы обеспечивают его надежную работу, так как напряжения в опасном сечении не превышают допускаемой величины. $\sigma_{max} < [\sigma]$, т. е. условие прочности выполняется;

3) брус в сечении $a-a$ укоротился на 0,549 мм. Абсолютная деформация мала по отношению к размерам элемента конструкции.

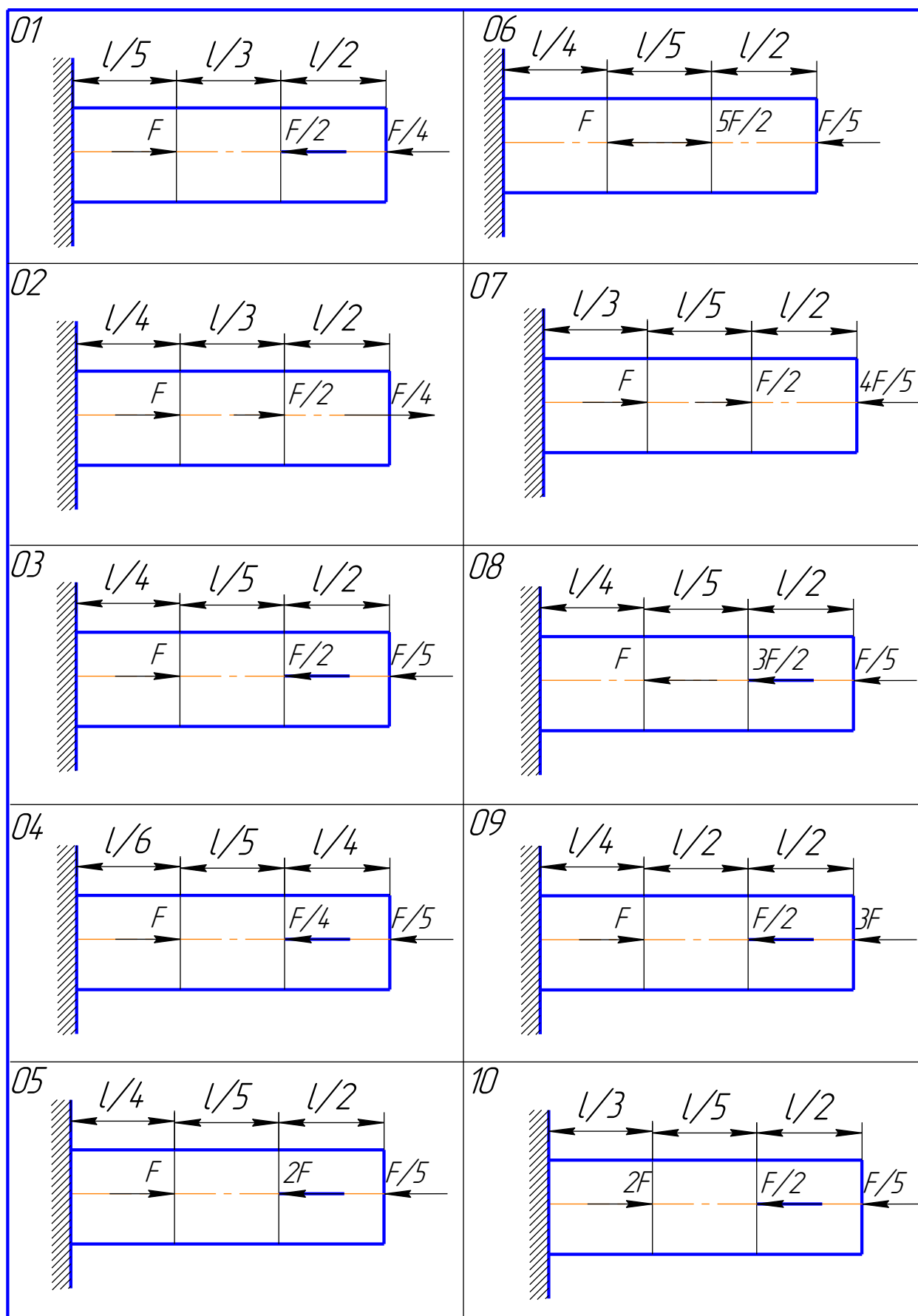


Рисунок 1.3 – Схема бруса к задаче № 1

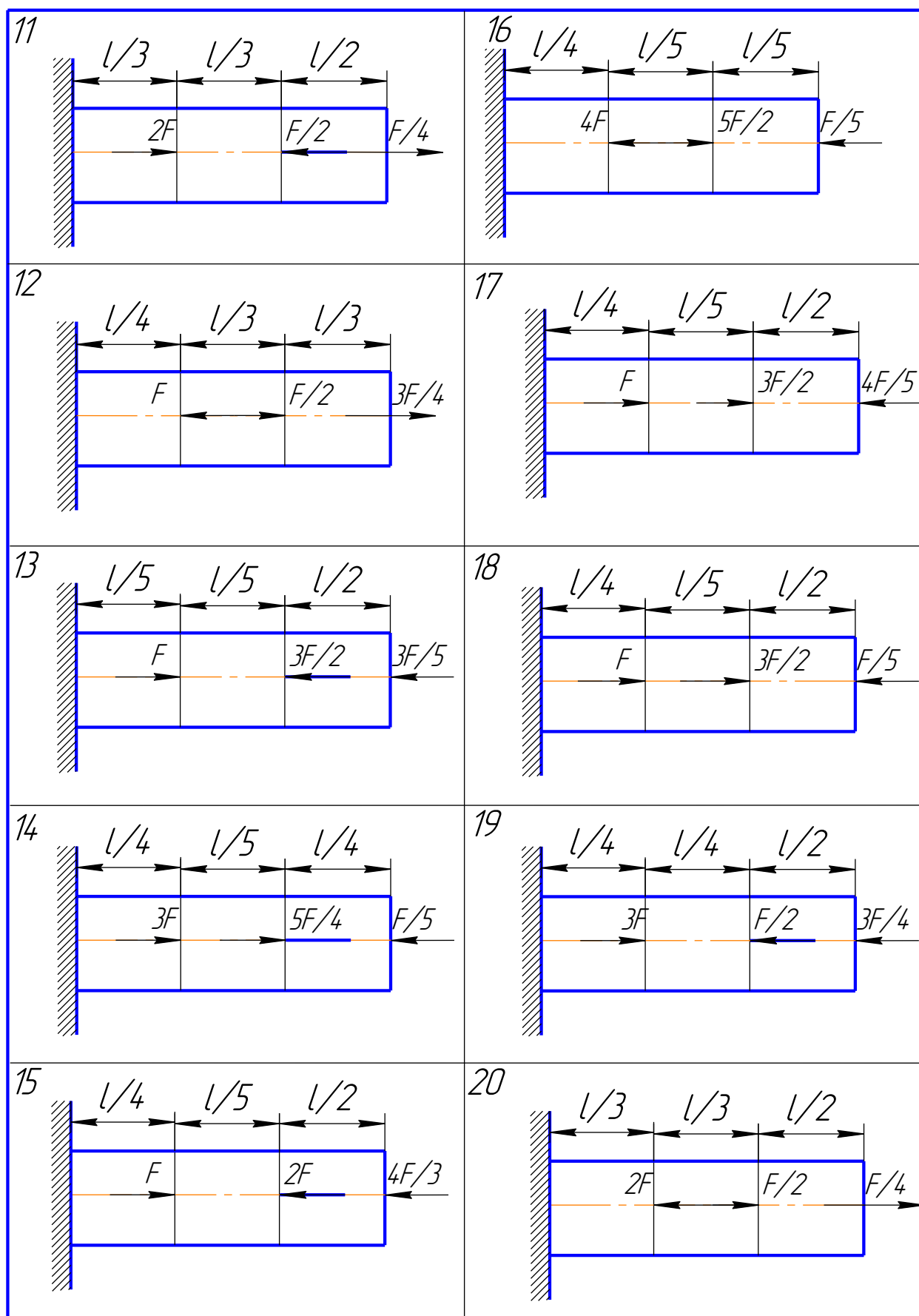


Рисунок 1.3 – Схема бруса к задаче № 1 (продолжение)

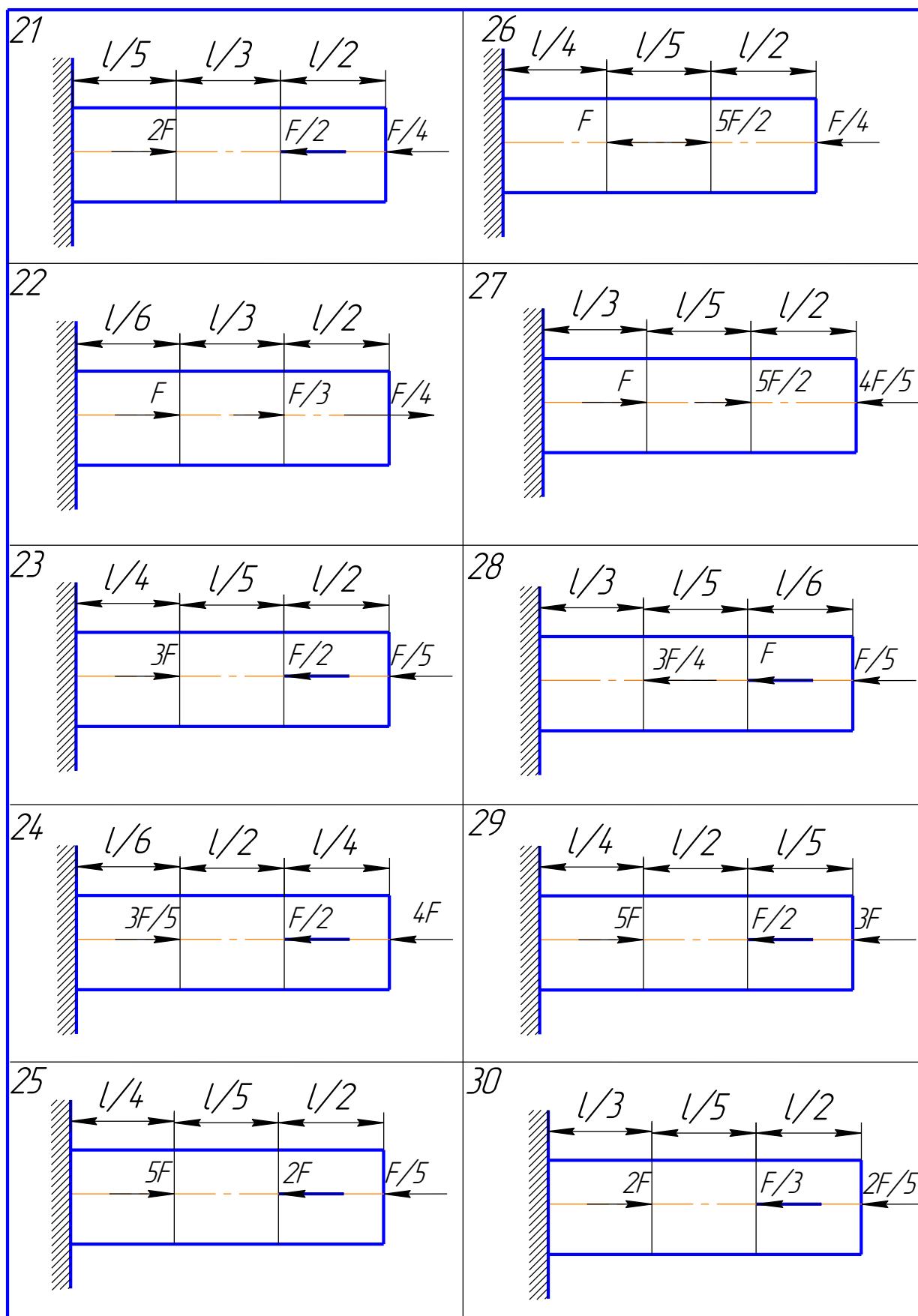


Рисунок 1.3 – Схема бруса к задаче № 1 (окончание)

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

2.1 Теоретические сведения о геометрических характеристиках плоских сечений

Сопротивление элемента конструкции различным видам деформации зависит не только от материала, размеров и очертания оси элемента, но и от формы поперечного сечения.

Площадь поперечного сечения A (м^2). Данная характеристика используется при определении нормальных напряжений при деформации растяжения (сжатия) и касательных напряжений при деформации сдвига.

Для определения геометрических характеристик плоских сечений необходимо знать положение центра тяжести сечения, так как через него проходят оси, относительно которых определяются геометрические характеристики и оценивается сопротивление элемента конструкции различной формы поперечного сечения.

Для определения центра тяжести поперечного сечения используют статический момент площади S_x , S_y (м^3). Индексы x и y обозначают ось, относительно которой определяется статический момент площади.

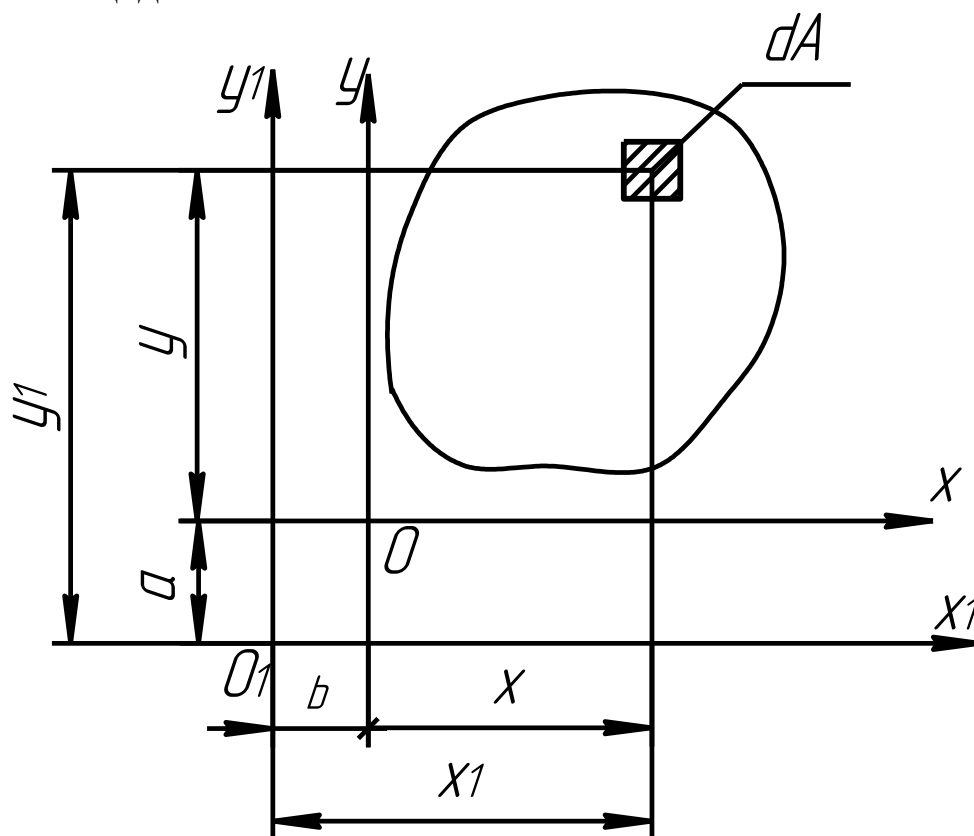


Рисунок 2.1 – Произвольное плоское сечение

Статический момент площади относительно осей определяется по формулам [2, 3]:

$$S_x = \int_A y dA; \quad S_y = \int_A x dA.$$

Так как $S_x = A \cdot y_C$, то координаты центра тяжести поперечного сечения определяются по формулам [2, 4]:

$$y_C = \frac{S_x}{A}; \quad x_C = \frac{S_y}{A},$$

где x_C, y_C – расстояния от центра тяжести сечения соответственно до осей x и y .

Статический момент площади может быть положительным, отрицательным и равным нулю. Ось, относительно которой статический момент площади равен нулю, называется *центральной*. Точка пересечения центральных осей называется *центром тяжести*.

Осевой момент инерции используется при расчетах на прочность и жесткость при деформации изгиба.

Осевой момент инерции I_x, I_y (m^4). Индексы x и y обозначают ось, относительно которой определяется осевой момент инерции.

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Осевой момент инерции – величина всегда положительная.

Из приведенного рисунка 2.1 следует, что $x_1 = x + b$ и $y_1 = y + a$, и если оси x и y проходят через центр тяжести поперечного сечения и являются центральными осями, то $S_x = 0$, и тогда осевой момент инерции относительно параллельных осей равен [2, 3]:

$$I_{x_1} = I_x + a^2 \cdot A$$

$$I_{y_1} = I_y + b^2 \cdot A.$$

Центробежный момент инерции используется для определения положения главных центральных осей. Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и равным нулю.

Центробежный момент инерции I_{xy} (m^4). Индексы x и y обозначают оси, относительно которых определяется центробежный момент инерции.

$$I_{xy} = \int_A x \cdot y dA$$

В зависимости от положения осей центробежный момент инерции может быть положительным или отрицательным, а также равным нулю.

Из всех осей, принадлежащих сечению, практический интерес представляют лишь главные центральные оси (для краткости их можно называть главными осями). Главными центральными осями называются оси, проходящие через центр тяжести сечения, по отношению к которым осевые моменты инерции принимают экстремальные (*max*, *min*) числовые значения, а центробежный момент инерции равен нулю. Для расчетов на прочность и жесткость при изгибе, совместном действии изгиба и растяжения (сжатия) и в ряде других случаев нужно знать положение главных центральных осей и величины соответствующих моментов инерции. Геометрические очертания простых и некоторых сложных форм сечений позволяют сделать выводы, что главными центральными осями будут являться оси, проходящие через центр тяжести и являющиеся для них осями симметрии (достаточно одной оси).

Центробежный момент инерции относительно параллельных осей равен:

$$I_{x_1y_1} = I_{xy} + ab \cdot A.$$

Зависимость центробежного момента инерции при повернутых осях [2, 3]

$$I_{uv} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0.$$

Оси, относительно, которых центробежный момент инерции равен нулю, называются *главными центральными осями*.

Выражение для определения положения главных центральных осей [2, 3]

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}}.$$

Если $\alpha_0 > 0$, то угол откладывается против часовой стрелки от оси x ; если $\alpha_0 < 0$, то угол откладывается по часовой стрелке.

Экстремальные значения осевых моментов инерции относительно главных центральных осей определяются выражением [3, 4]

$$I_{\max}(I_{\min}) = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4(I_{xy})^2}$$

Главными центральными осями называются оси, проходящие через центр тяжести поперечного сечения, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, а осевые моменты инерции принимают экстремальные значения.

Задача № 2

Для поперечного сечения, составленного из стандартного прокатного профиля, требуется:

- 1) вычертить сечение в масштабе и указать на нем все оси и размеры (рисунок 2.2);
- 2) определить положение центра тяжести;
- 3) определить значения осевых и центробежного моментов инерции относительно центральных осей;
- 4) определить и показать положение главных центральных осей;
- 5) определить значения моментов инерции относительно главных центральных осей;
- 6) провести проверку правильности расчетов.

Данные взять из таблиц сортамента на прокатные профили (приложения И1...И3).

Пример расчета

Дано:

двутавр № 10, швеллер № 20;

швеллер № 20:

$$A_1 = 23,4 \text{ см}^2; J_{x1} = 1520 \text{ см}^4; J_{y1} = 113;$$

$$z_{01} = 2,07 \text{ см};$$

двутавр № 10:

$$A_2 = 12,0 \text{ см}^2; J_{x2} = 198 \text{ см}^4; J_{y2} = 17,9 \text{ см}^4.$$

Решение

Определим положение центра тяжести составного сечения по формулам [1]:

$$x_C = \frac{\sum S_{yi}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2},$$
$$y_C = \frac{\sum S_{xi}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2},$$

где A_1, A_2 – площади простых сечений, см^2 ;

x_1, x_2, y_1, y_2 – расстояния от центра тяжести каждого из простых сечений до случайных осей в направлении x и y соответственно, см.

За случайные принимаем оси $x_1O_1y_1$, между ними будет заключен первый октант. Тогда

$$\begin{aligned}x_1 &= 0, \quad y_1 = 0 \\x_2 &= z_{01} + \frac{h_2}{2} = 2,07 + \frac{10}{2} = 7,07 \text{ см} \\y_2 &= \frac{h_1}{2} - \frac{b_2}{2} = \frac{20}{2} - \frac{5,5}{2} = 7,25 \text{ см} \\x_C &= \frac{23,4 \cdot 0 + 12,0 \cdot 7,07}{23,4 + 12,0} = 2,4 \text{ см} \\y_C &= -\frac{23,4 \cdot 0 + 12,0 \cdot 7,25}{23,4 + 12,0} = 2,5 \text{ см.}\end{aligned}$$

Отложим полученные координаты, в соответствии с величиной, знаком и масштабом, от случайных осей $x_1C_1y_1$, получим положение центра тяжести составного сечения – точку C и положение центральных осей x_Cy_C .

Теперь положительный октант заключен парой центральных осей x_Cy_C (рисунок 2).

Определим расстояния между осями $x_1C_1y_1, x_2C_2y_2$ и x_Cy_C :

$$\begin{aligned}a_1 &= y_C = 2,5 \text{ см} \\a_2 &= y_2 - y_C = 7,25 - 2,5 = 4,75 \text{ см} \\d_1 &= x_C = 2,4 \text{ см} \\d_2 &= x_2 - x_C = 7,07 - 2,4 = 4,67 \text{ см.}\end{aligned}$$

Так как теперь положительный октант заключен между осями x_Cy_C , то $a_1 = 2,5$ см, $d_1 = -2,4$ см.

Определим величину осевых моментов инерции по отношению к центральным осям, используя зависимость при их параллельном расположении [1]:

$$I_{x_C} = I_{x_1} + a_1^2 \cdot A_1 + I_{x_2} + a_2^2 \cdot A_2 = 1520 + (2,5)^2 23,4 + 17,9 + + (-4,75)^2 12,0 = 1955 \text{ см}^4$$

$$I_{y_C} = I_{y_1} + d_1^2 \cdot A_1 + I_{y_2} + d_2^2 \cdot A_2 = 113 + (-2,4)^2 23,4 + 198 + + (4,67)^2 12 = 707,5 \text{ см}^4.$$

Величина центробежного момента инерции будет равна [1]

$$I_{x_Cy_C} = I_{x_1y_1} + a_1 d_1 \cdot A_1 + I_{x_2y_2} + a_2 d_2 \cdot A_2 = 0 + (2,5)(-2,4) \times \times 23,4 + 0 + 4,75 \cdot (-4,67) \cdot 12,0 = -406,6 \text{ см}^4.$$

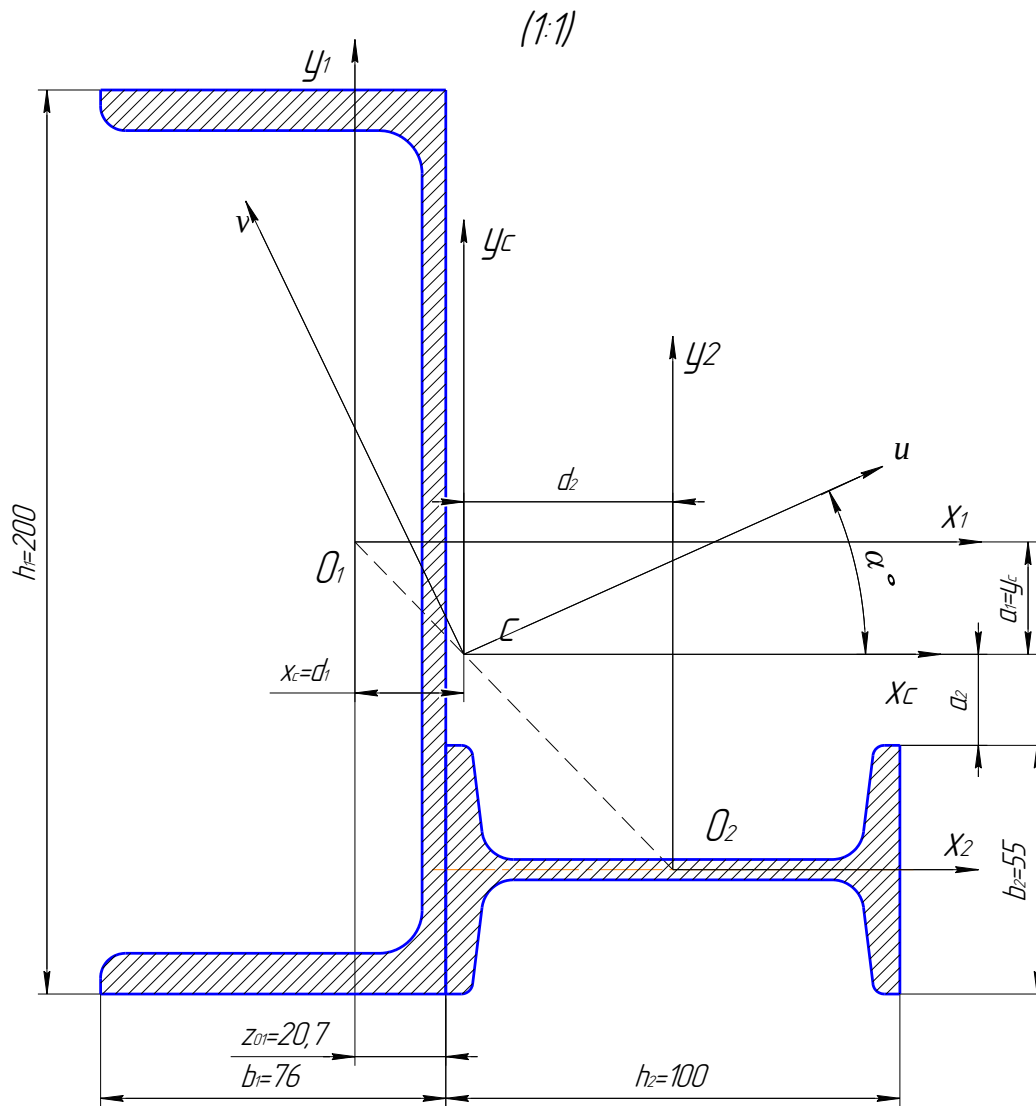


Рисунок 2 – Расчетная схема составного сечения

Определим положение главных центральных осей по формуле [1]

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2 I_{x_c y_c}}{I_{y_c} - I_{x_c}},$$

где α_0 – угол, определяющий положение главных центральных осей по отношению к центральным осям.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= \frac{-2 \cdot 406,6}{707,5 - 1955}; \\ 2\alpha_0 &= \operatorname{arctg}(0,652) \\ -2\alpha_0 &= 33,1^\circ \end{aligned}$$

В соответствии с правилом знака для угла, повернем пару центральных осей x_{cy_c} на угол $\alpha_0 = 16,55^\circ$ по часовой стрелке, отложив его от оси с наибольшим моментом инерции.

Определим значения осевых моментов инерции по отношению к главным центральным осям x_0, y_0 по формуле [1]

$$I_{max}(I_{min}) = \frac{I_{x_c} + I_{y_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_{x_c} - I_{y_c})^2 + 4(I_{x_c y_c})^2} +$$

$$\frac{1955 + 707,5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(1955 - 707,5)^2 + 4(406,5)^2} =$$

$$= 1331,25 \pm \frac{1}{2} 1489$$

откуда

$$I_{max} = 1331,25 + 744,5 = 2075,75$$

$$I_{min} = 1331,25 - 744,5 = 586,75.$$

Сделаем проверку выполненных расчетов:

а) докажем тождество

$$I_{x_c} + I_{y_c} = I_{max} + I_{min}$$

$$1955 + 707,5 = 2075,75 + 586,75.$$

б) определим значение центробежного момента инерции по отношению к главным центральным осям, используя в расчетах зависимость при повороте осей [1]

$$I_{uv} = \frac{I_{x_c} - I_{y_c}}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{x_c y_c} \cos 2\alpha_0 = \frac{1955 - 707,5}{2} \sin(33,1^\circ) -$$

$$- 406,6 \cdot \cos(-33,1^\circ) = 0,024 = 0.$$

Выводы.

Оси u и v являются главными центральными, так как:

- 1) они проходят через центр тяжести – точку C ;
- 2) осевые моменты инерции J_{min} и J_{max} относительно них принимают экстремальные значения;
- 3) центробежный момент инерции J_{uv} равен нулю.

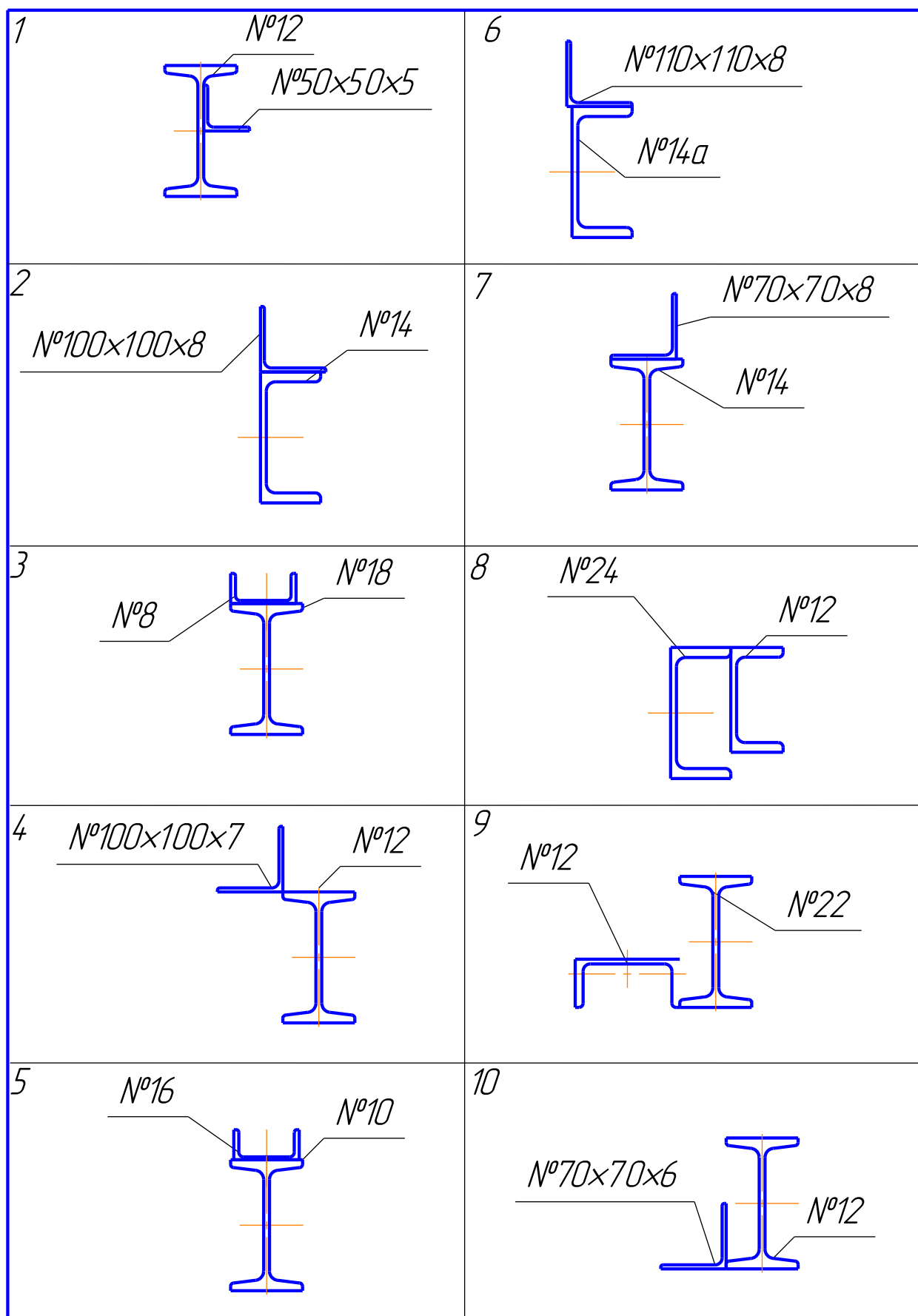


Рисунок 2.3 – Схема составного сечения к задаче № 2

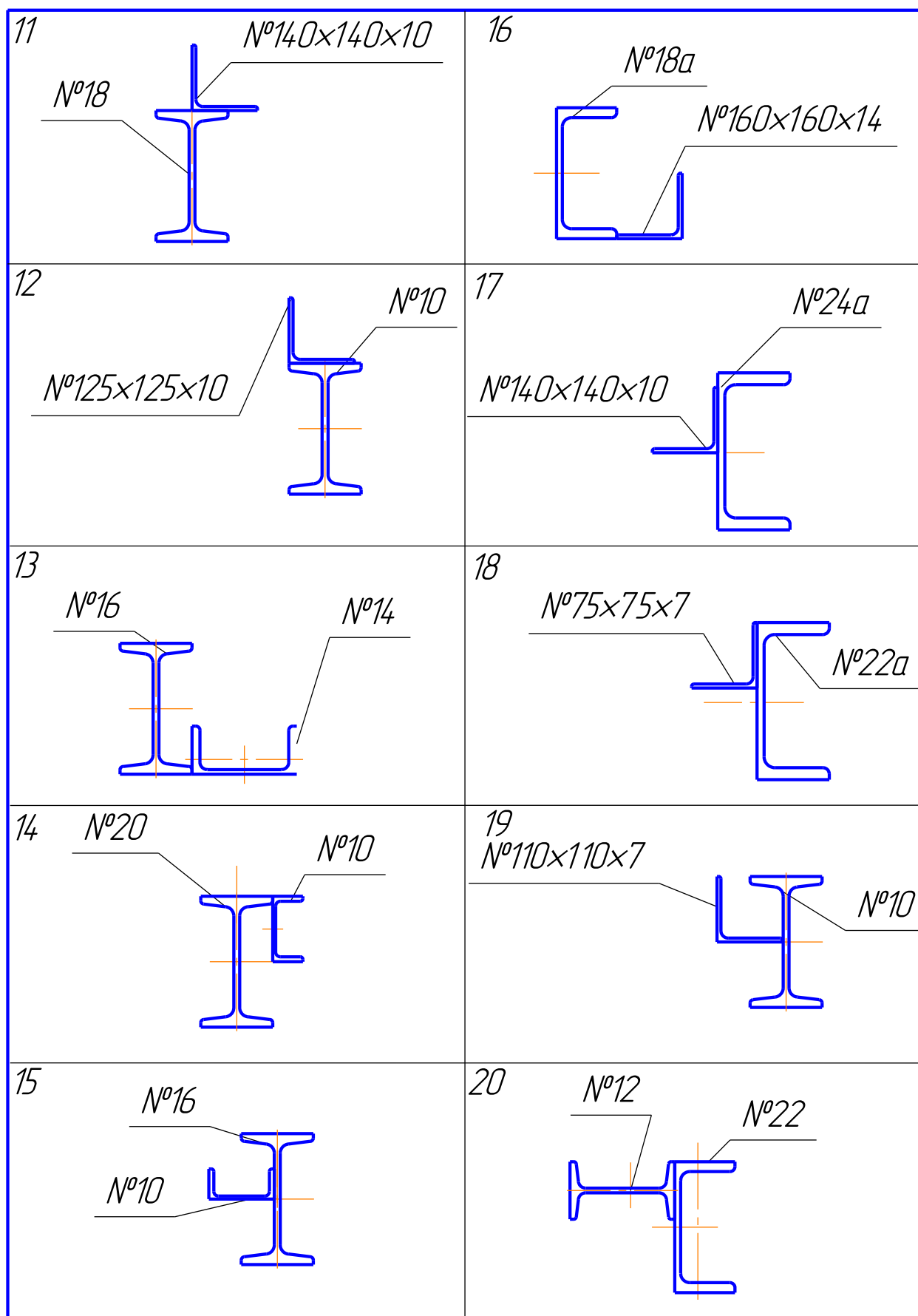


Рисунок 2.3 – Схема составного сечения к задаче № 2
(продолжение)

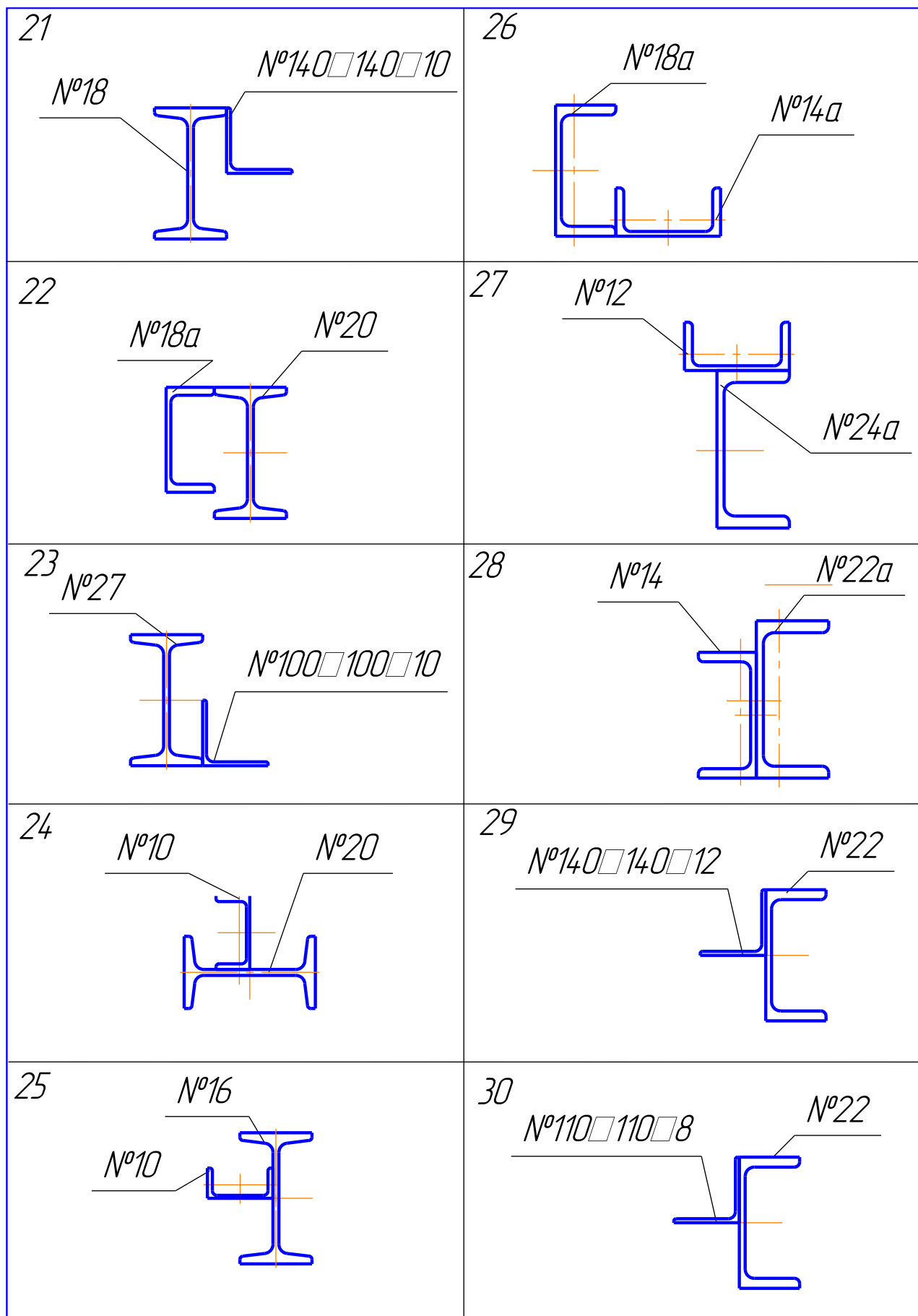


Рисунок 2.3 – Схема составного сечения к задаче № 2
(окончание)

3 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ

3.1 Определение напряжений при кручении вала круглого сечения. Расчеты на прочность

Определение: «Деформация кручения, вызываемая парой сил, действующих в плоскости перпендикулярной оси элемента конструкции, называется *крутящим моментом*».

Примеры. Крутящий момент на валу электрического двигателя. Карданный вал автомобиля, ВОМ трактора передают крутящий момент и т. д.

Крутящий момент (Н·м) связан с передаваемой мощностью и частотой вращения и определяется по формуле

$$T_{\text{кр}} = 9,55 \frac{P}{n},$$

где P – передаваемая мощность (Вт);

n – частота вращения, (мин⁻¹).

К валу, один конец которого жестко закреплен, приложим крутящий момент (T). Под действием этого крутящего момента образующие повернутся на некоторый угол γ , при этом оставаясь прямыми.

Длина скручиваемого элемента не изменится, а радиусы останутся прежними и повернутся на угол φ .

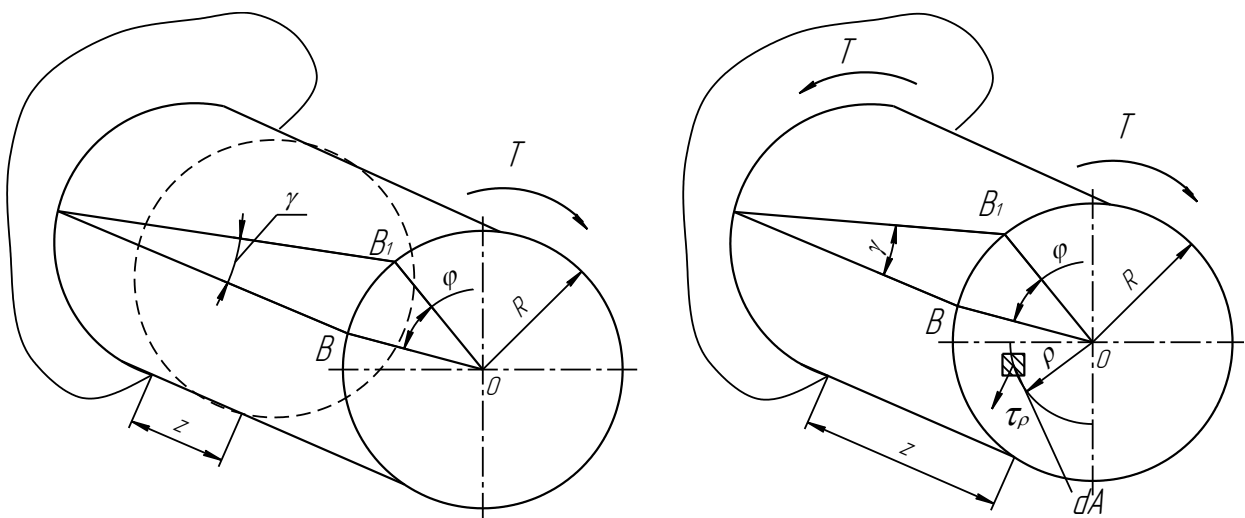


Рисунок 3.1 – Схема к определению касательных напряжений

Крутящий момент, действующий на вал, будет уравновешиваться внутренними силами упругости, действующими в той же

плоскости, но по направлению – навстречу крутящему моменту (касательные напряжения).

Рассечем плоскостью вал и отбросим его правую часть. В сечении возникнут внутренние силы упругости.

Выделим в сечении элементарную площадку dA на расстоянии ρ от оси вращения (рисунок 3.1).

На выделенную площадку будет действовать касательное напряжение τ_ρ .

Касательные напряжения в любой точке поперечного сечения вала при кручении определяются по формуле [2, 3]

$$\varphi_\rho = \frac{T}{I_\rho} \rho.$$

Условие прочности при деформации кручения определяется выражением [2, 3]

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_\rho} \leq [\varphi],$$

где $[\tau] = 0,5 \dots 0,6 [\sigma]$.

Для сплошного круглого сечения полярный момент инерции $I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32}$ и полярный момент сопротивления $W_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{16}$ [2, 3].

Для кольцевого (трубчатого) сечения, при $c = \frac{d}{D}$, полярный момент инерции – $I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - c^4)$ и полярный момент сопротивления $W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} (1 - c^4)$ [2, 4].

3.2 Определение деформаций при кручении вала круглого сечения. Условие жесткости

Дадим малое приращение dz по длине вала (рисунок 3.2). На длине вала dz приращение угла поворота будет $d\varphi$. Тогда $BB_1 = r \cdot d\varphi$. Относительный угол закручивания $d\varphi$ определяется по формуле

$$d\varphi = \frac{T dz}{GI_\rho}.$$

Проинтегрируем это выражение на длине l и определим абсолютный угол закручивания вала:

$$\varphi = \int_0^l \frac{T dz}{G \cdot I_\rho} = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_\rho}.$$

Для определения угла закручивания вала углы закручивания определяются по участкам, а затем алгебраически суммируются.

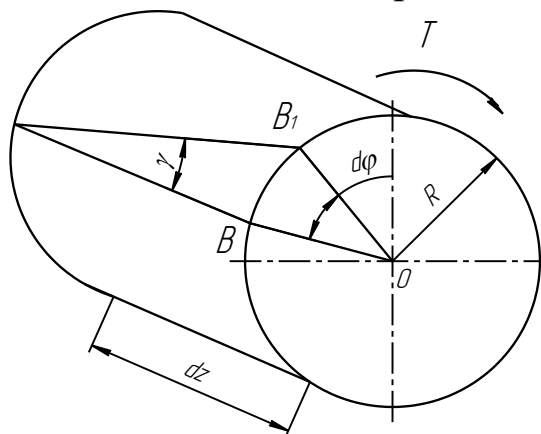


Рисунок 3.2 – Схема к определению угла закручивания

Условие жесткости при деформации кручения записывается следующим образом [2, 3]:

$$\theta_{\max} = \frac{T_{\max}}{G \cdot I_\rho} \leq [\theta],$$

где $[\theta] = 0,15 \dots 0,30 \text{ } ^\circ/1 \text{ м.}$

В практических расчетах допускаемый угол закручивания ($[\theta]$) переводят в рад/м.

3.3 Кручение стержней (валов) некруглого сечения

В инженерной практике довольно часто встречаются случаи кручения стержней (валов), имеющих некруглое сечение (квадрат, прямоугольник, двутавр и т. д.).

При кручении валов некруглого сечения, основная гипотеза – гипотеза плоских сечений, не применима, так как сечения искривляются, то есть, подвержены депланации.

Для определения деформаций и напряжений используют экспериментальные методы, один из которых – мембранная аналогия. На трубу надевается мембрана, и подается давление. Изменение формы мембраны будет соответствовать эпюре напряжений, возникающих в стержне при его кручении.

Эпюра распределения напряжений вала, имеющего прямоугольную форму сечения, представлена на рисунке 3.3.

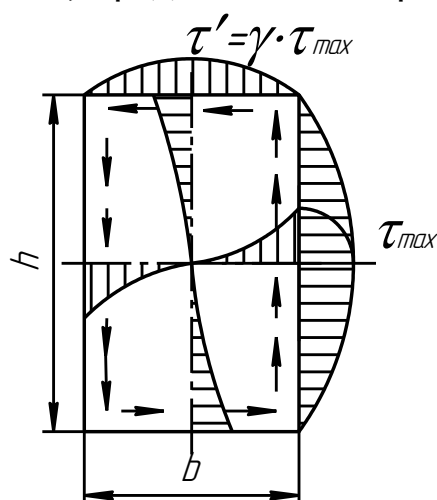


Рисунок 3.3 – Эпюра распределения напряжений по прямоугольному сечению

Наибольшие касательные напряжения при кручении вала прямоугольной формы сечения возникают на середине большей стороны и определяются по формуле [2, 3]

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_k},$$

где $W_k = \alpha \cdot h \cdot b^2$, величина аналогичная полярному моменту сопротивления (W_ρ).

На середине короткой стороны возникают касательные напряжения, определяемые по формуле [2, 3]:

$$\tau' = \gamma \cdot \tau_{max}.$$

По углам прямоугольного сечения вала касательные напряжения равны нулю.

Условие прочности при кручении валов некруглого поперечного сечения имеет вид [2, 3]

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_k} \leq [\tau].$$

Условие жесткости при кручении валов некруглого поперечного сечения имеет вид [2, 3]

$$\theta = \frac{T}{G \cdot I_k} \leq [\theta],$$

где $I_k = \beta \cdot h \cdot b^3$, величина аналогичная полярному моменту сопротивления (I_ρ).

Коэффициенты α , β , γ зависят от отношения $h : b$ и берутся по справочным таблицам.

Таблица 2 – Значения коэффициентов α , β , γ для прямоугольных сечений

$h:b$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
α	0,208	0,231	0,246	0,256	0,267
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263
γ	1	0,859	0,795	–	0,753

Задача № 3

Для стального вала, изображенного на рисунке 3.4, требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов;
- 2) определить размеры поперечного сечения сплошной круглой формы в опасном сечении из расчетов на прочность и жесткость. Наибольшую расчетную величину округлить до стандартных размеров по ГОСТ 6636-86 (приложение Б);
- 3) заменить вал сплошной круглой формы на кольцевую (полую) и прямоугольную, если $c = d_0/D = 0,8$ и $h/b = 1,5$;
- 4) определить угловые перемещения и построить их эпюры по длине вала сплошной круглой формы;
- 5) сравнить вес валов и сделать выводы о рациональном применении подобранных форм сечений;
- 6) построить эпюры распределения напряжений в опасных сечениях для всех валов.

Данные взять из таблицы 3.

Таблица 3 – Исходные данные к задаче 3

Номер строки	Крутящий момент, Нм	Расстояние, l м	$[\tau]$, МПа	$[\theta]$, $\%_m$	$c = \frac{d_0}{D}$
1	2800	0,7	16	0,90	0,7
2	2600	0,8	40	0,20	0,8
3	2200	0,9	15	0,88	0,9
4	2100	1,0	35	0,11	0,7
5	1800	0,5	18	0,82	0,8
6	2400	0,6	50	0,22	0,9
7	2300	1,1	20	0,60	0,7
8	1700	0,6	45	0,19	0,8
9	2300	0,7	14	0,78	0,9
10	2000	0,5	50	0,17	0,7

Пример расчета

Для стального вала, изображенного на рисунке 5.5, выполнить условие задачи № 3.

Дано:

вращающий момент $T = 1,2$ кНм;

длина $l = 0,8$ м;

допускаемое напряжение при растяжении $[\sigma] = 60$ МПа;

Способ приложения нагрузки – статический.

Решение:

Вал, как и любой другой элемент конструкции, должен находиться в статическом равновесии.

Составим одно из уравнений статического равновесия

$$\sum T_i = 0; \quad -0,3T - T + T_B - 0,6T - 0,5T = 0,$$

отсюда

$$T_B = T(0,3 + 1 + 0,6 + 0,5) = 2,4 T = 2,4 \cdot 1,2 = 2,88 \text{ кНм.}$$

Разделим вал на участки по границам действия силовых факторов. На каждом участке произвольно выберем центры сечений.

Составим уравнения крутящих моментов по отношению к произвольно выбранным центрам сечений

$$T_I = -0,3T = -0,3 \cdot 1,2 = -0,36 \text{ кНм}$$

$$T_{II} = -0,3T - T = 1,3T = 1,36 \cdot 1,2 = -1,56 \text{ кНм}$$

$$T_{III} = 0,6T + 0,5T = 1,1T = 1,1 \cdot 1,2 = 1,32 \text{ кНм}$$

$$T_{IV} = 0,5T = 0,5 \cdot 1,2 = 0,6 \text{ кНм.}$$

Построим эпюру крутящих моментов (рисунок 3.4 а). Скачки на эпюре соответствуют величинам вращающих моментов, передаваемых шкивами. Из построенной эпюры T_K следует, что опасными являются сечения вала участка ВС.

Наибольший крутящий момент $|T_{max}| = 1560$ Нм.

Определим размеры поперечного сечения вала сплошной круглой формы:

а) из расчетов на прочность.

Условие прочности при кручении [2]

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_\rho} \leq [\tau],$$

где τ_{max} – касательные напряжения в опасном сечении вала, Па;

W_ρ – полярный момент сопротивления сечения, м³;

$[\tau]$ – допускаемое напряжение, Па.

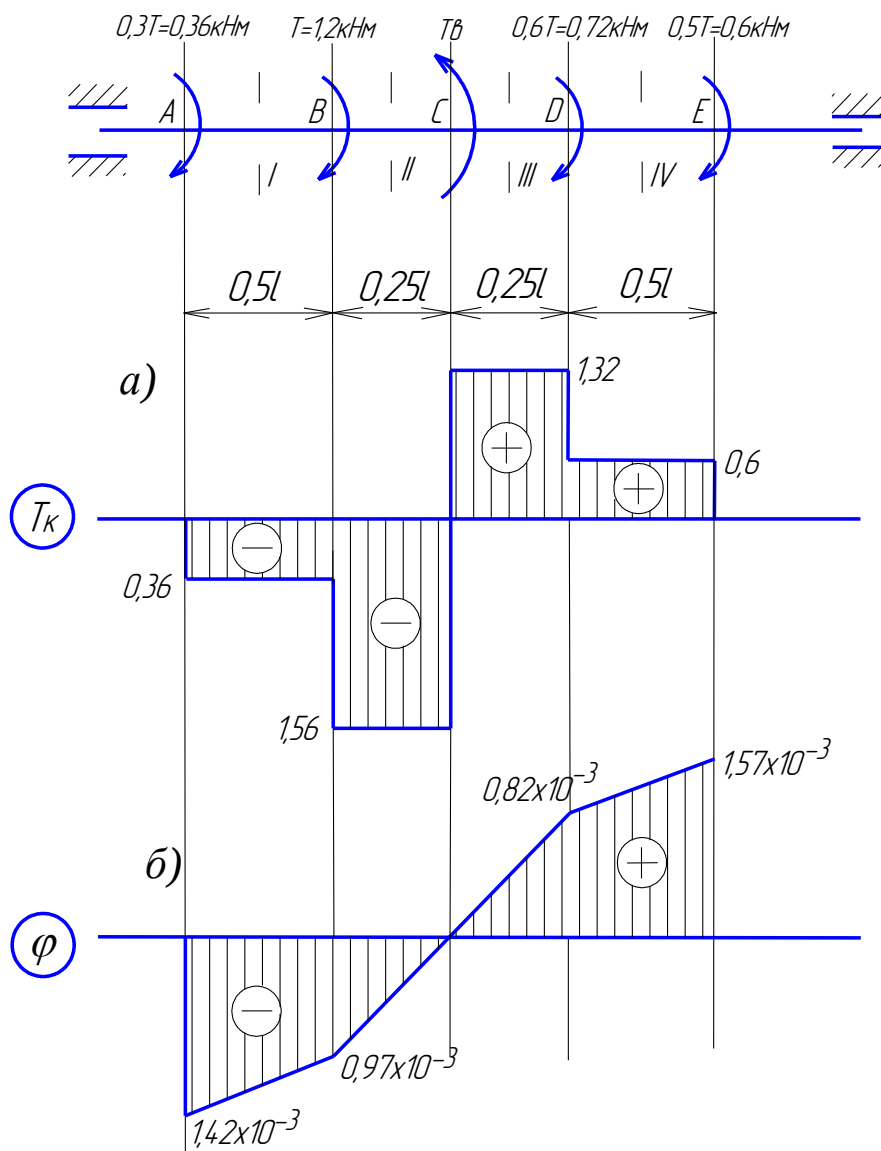


Рисунок 3.4 – Расчетная схема вала. Эпюры крутящих моментов и угловых перемещений

Для сплошной круглой формы [1]

$$W_{\rho} = \frac{\pi d^3}{16},$$

где d – диаметр вала, мм.

В зависимости от материала рассчитываемого вала по третьей теории прочности при чистом кручении можно принимать [1]

$$[\tau] = 0,5[\sigma],$$

где $[\sigma]$ – допускаемое напряжение на растяжение, МПа.

В зависимости от свойств материала, характера нагрузки и типа элемента конструкции

$$[\tau] = 0,5 \cdot 60 = 30 \text{ МПа.}$$

Подставив в условие прочности все величины, определим диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16 \cdot T_{max}}{\pi \cdot [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 1560}{3,14 \cdot 30 \cdot 10^6}} = 0,064 \text{ м.}$$

$d = 64 \text{ мм}$

б) из расчетов на жесткость.

Условие жесткости при кручении [1]

$$\theta_{max} = \frac{T_{max}}{G \cdot J_{\rho}} \leq [\theta],$$

где θ_{max} – максимальный относительный угол закручивания участка вала, рад/м;

G – модуль упругости второго рода, Па;

J_{ρ} – полярный момент инерции сечения, м⁴;

$[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания, рад/м.

$$[\theta] = 0,3 \frac{\pi}{180} = 0,00523 \text{ рад/м.}$$

Для углеродистых сталей [1]

$$G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа} = 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

Для сплошной круглой формы [1]

$$J_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32}.$$

Подставив в условие жесткости все величины, определим диаметр вала:

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32 \cdot T_{max}}{G \cdot \pi \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 1560}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14 \cdot 0,00523}} = 0,0785 \text{ м.}$$

Окончательно принимаем диаметр вала, полученный из расчета на жесткость, и округляем его до ближайшего стандартного по ГОСТ 6636-86:

$$d = 80 \text{ мм.}$$

Заменяем вал сплошной круглой формы на вал кольцевой (полый) формы сечения. Основываясь на предыдущих расчетах, замену проведем только по условию жесткости. Тогда

$$\theta_{max}^{кр} = \theta_{max}^{пр}$$

или $J_{\rho}^{кр} = J_{\rho}^{пр}.$

Для трубчатого сечения [2]

$$I_{\rho} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} (1 - c^4),$$

где D – наружный диаметр вала, м;
 d_0 – внутренний диаметр вала, м.

$$c = \frac{d_0}{D} = 0,8$$

Тогда получаем

$$\frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - c^4)$$

или $\pi \cdot d^4 = D^4 (1 - c^4).$

Определим размеры поперечного сечения полого вала:

$$D = \frac{d}{\sqrt[4]{1 - 0,8^4}} 91,3 \text{ мм.}$$

Принимаем $D = 95 \text{ мм}$
и $d_0 = 0,8 \cdot D = 0,8 \cdot 95 = 76 \text{ мм.}$

Заменим вал сплошной круглой формы на вал прямоугольного сечения. Сравнительный расчет также проведем по условию жесткости

$$\theta_{max}^{кр} = \theta_{max}^{пр}$$

или $I_{\rho}^{кр} = I_{\rho}^{пр}.$

где I_{κ} – осевой момент инерции некруглого сечения, м^4 .

Для прямоугольного сечения [2]

$$I_{\kappa} = \beta \cdot h \cdot b^3,$$

где h, b – стороны прямоугольного сечения, м;

α, β, γ – коэффициенты, зависящие от отношения $h : b$.

При соотношении $h : b = 1,5$ (таблица 5)

$$\alpha = 0,231, \beta = 0,196, \gamma = 0,859.$$

Тогда

$$\frac{\pi \cdot d^4}{32} = \beta \cdot h \cdot b^3, h = 1,5b.$$

Определим размеры поперечного сечения вала прямоугольной формы

$$b = \sqrt[4]{\frac{\pi \cdot d^4}{32 \cdot \beta \cdot 1,5}} = d \sqrt[4]{\frac{\pi}{48 \cdot \beta}} = 80 \sqrt[4]{\frac{3,14}{48 \cdot 0,196}} = 60,81 \text{ мм.}$$

Примем $b = 61$ мм.

$$h = 1,5 \cdot b = 1,5 \cdot 61 = 91,5 \text{ мм}$$

Определим деформацию участков вала по закону Гука [2]:

$$\varphi = \frac{T_K \cdot l}{G \cdot I_\rho},$$

где φ – угол закручивания одного сечения по отношению к другому, рад;

T – крутящий момент на произвольном участке, Н·м;

l – длина произвольного участка, м.

$$I_\rho = \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 8^4}{32} = 402 \text{ см}^4.$$

Для определения углов закручивания сечений вала сплошной круглой формы принимаем условно

$$\varphi_C = 0$$

$$\varphi_D = \varphi_C + \frac{T_{III} l_{DC}}{G \cdot I_\rho} = \frac{1320 \cdot 0,2 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 402 \cdot 10^{-8}} = 0,00082 \text{ рад}$$

$$\varphi_E = \varphi_D + \frac{T_{IV} l_{DE}}{G \cdot I_\rho} = 0,00082 + \frac{600 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 402 \cdot 10^{-8}} = 0,00157 \text{ рад}$$

$$\varphi_B = \varphi_C + \frac{T_{II} l_{BC}}{G \cdot I_\rho} = 0 - \frac{1560 \cdot 0,2}{8 \cdot 10^{10} \cdot 402 \cdot 10^{-8}} = -0,0097 \text{ рад}$$

$$\begin{aligned} \varphi_A &= \varphi_B + \frac{T_I l_{BA}}{G \cdot I_\rho} = -0,0097 - \frac{360 \cdot 0,4}{8 \cdot 10^{10} \cdot 402 \cdot 10^{-8}} = \\ &= -0,00142 \text{ рад.} \end{aligned}$$

Построим эпюру углов закручивания φ (рисунок 3, б).

Определим вес вала по формуле

$$P = \rho \cdot A \cdot \ell,$$

где ρ – удельный вес, Н/м³;

A – площадь поперечного сечения, м²;

ℓ – длина вала, м.

Для углеродистых сталей принимаем [1]

$$\rho = 78,5 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$$

а) сплошной круглой формы сечения

$$P = \frac{\pi \cdot d^2}{4} l \cdot \rho = \frac{3,14 \cdot 80^2}{4} 10^{-6} \cdot 1,2 \cdot 78,5 = 0,4733 \text{ кН};$$

б) кольцевой формы сечения

$$P = \frac{\pi}{4} (D^2 - d_0^2) l \cdot \rho = \frac{3,14}{4} (95^2 - 76^2) \cdot 10^{-6} \cdot 1,2 \cdot 78,5 = 0,2403 \text{ кН};$$

в) прямоугольной формы сечения

$$P = b \cdot h \cdot l \cdot \rho = 61 \cdot 91,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1,2 \cdot 78,5 = 0,5258 \text{ кН}.$$

Определим максимальные напряжения в опасном сечении вала по формуле [1]

Вал сплошной формы поперечного сечения

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} = \frac{3,14 \cdot 8^3}{16} = 100,5 \text{ см}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_\rho} = \frac{1560}{100,5 \cdot 10^{-6}} = 15,5 \cdot 10^6 \text{ Па} = 15,5 \text{ МПа};$$

б) вал трубчатой формы поперечного сечения

$$W_\rho = \frac{\pi \cdot d^3}{16} (1 - c^4) = \frac{3,14 \cdot 9,5^3}{16} (1 - 0,8^4) = 99,3 \text{ см}^3$$

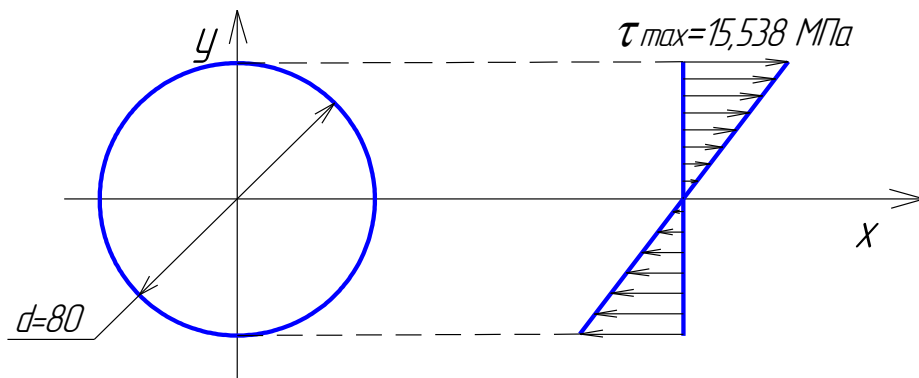
$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_\rho} = \frac{1560}{99,3 \cdot 10^{-6}} = 15,7 \cdot 10^6 \text{ Па} = 15,7 \text{ МПа};$$

в) прямоугольной формы сечения

$$W_K = \alpha \cdot h \cdot b^2 = 0,231 \cdot 91,5 \cdot 61^2 = 78,6 \text{ см}^3$$

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_K} = \frac{1560}{78,6 \cdot 10^{-6}} = 19,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 19,8 \text{ МПа}.$$

Построим эпюры распределения касательных напряжений по названным формам сечений (рисунок 3.5)



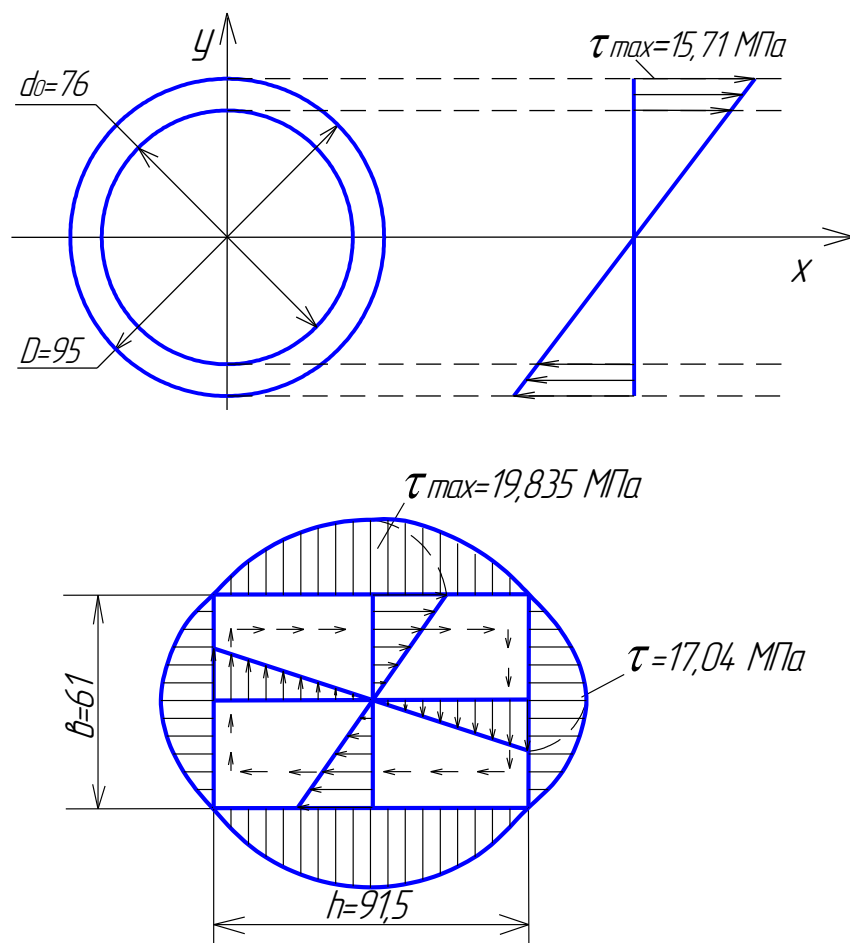


Рисунок 3.5 – Эпюры распределения касательных напряжений

Выводы:

- 1) анализ эпюры крутящих моментов показывает, что опасными будут сечения вала участка BC , так как здесь $|T_{max}| = 1560 \text{ Нм}$;
- 2) подобранные размеры поперечного сечения валов удовлетворяют условию прочности и жесткости;
- 3) вал трубчатой формы сечения (полый) при работе на кручение более рационален, так как он менее металлоемкий.

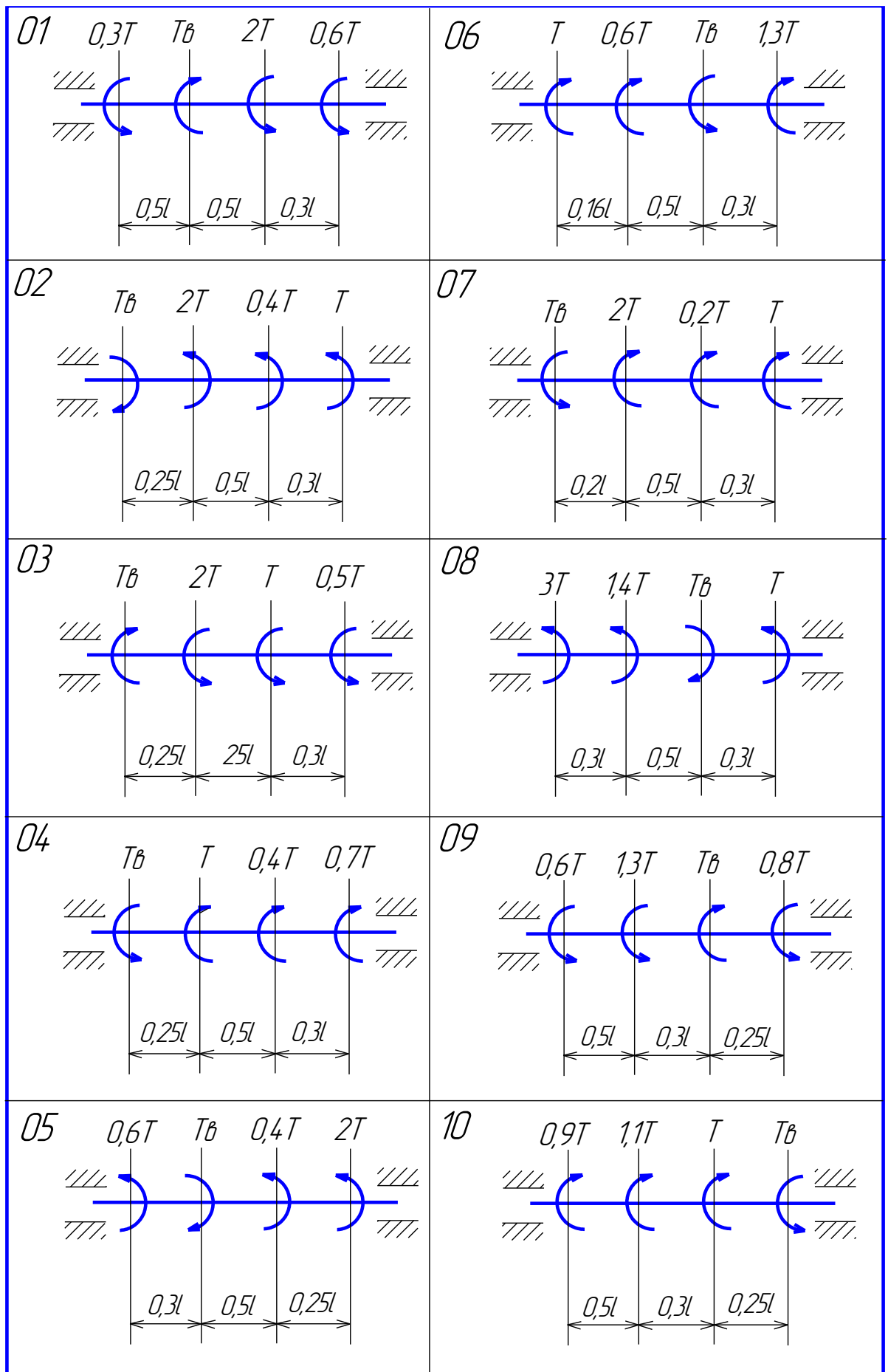


Рисунок 3.6 – Схема вала к задаче № 3

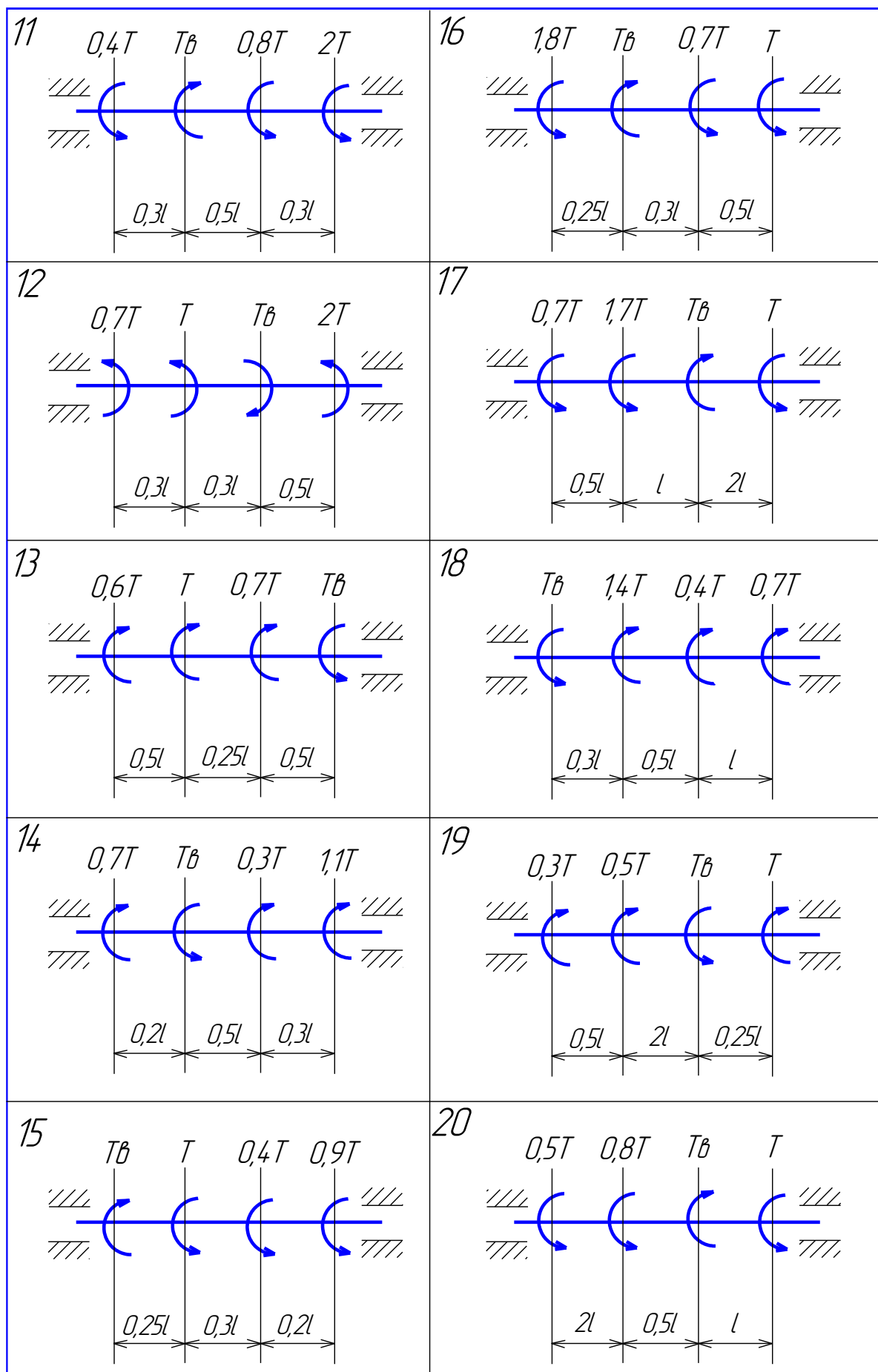


Рисунок 3.6 – Схема вала к задаче № 3 (продолжение)

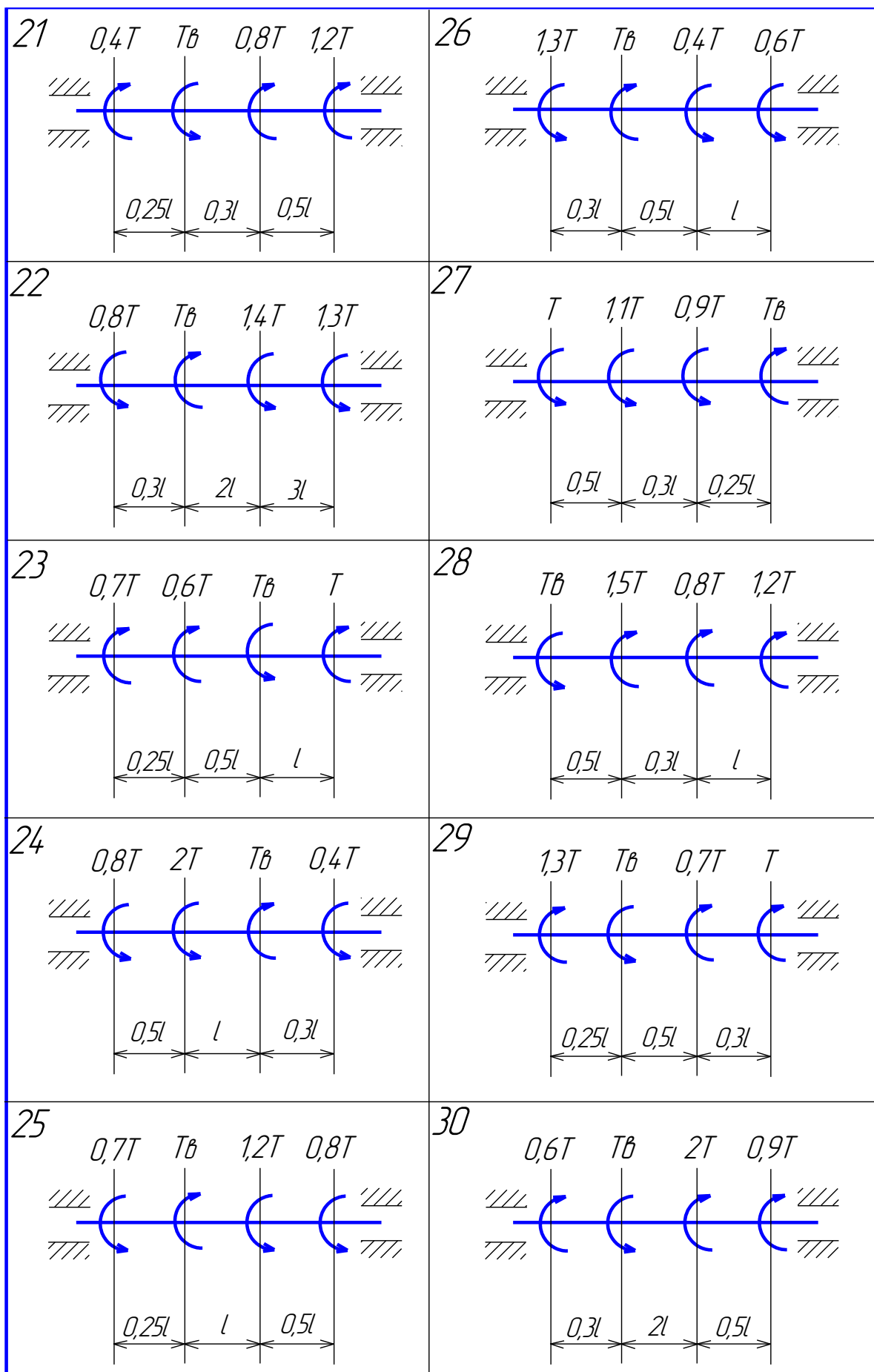


Рисунок 3.6 – Схема вала к задаче № 3 (окончание)

4 РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ И ЖЕСТКОСТЬ ПРИ ИЗГИБЕ

4.1 Нормальные напряжения при изгибе

При прямом поперечном изгибе в сечениях балки возникают два внутренних силовых фактора: изгибающий момент M и поперечная сила Q . Расчетная практика показывает, что изгибающий момент в большинстве случаев имеет решающее значение при подборе сечения и проверке прочности балок.

Поперечная сила Q_y представляет собой сумму проекций на ось OY всех внутренних касательных сил, возникающих в поперечном сечении.

Изгибающий момент M_x представляет собой сумму моментов относительно оси OX всех внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении. При этом не забываем, что оси OX и OY являются главными центральными осями того поперечного сечения, в котором определяются внутренние силовые факторы.

Продольная сила численно равна алгебраической сумме проекций на ось OZ всех внешних сил, действующих на отсеченную часть рамы (балки).

Поперечная сила численно равна алгебраической сумме проекций на ось OY всех внешних сил, действующих на отсеченную часть рамы (балки).

Изгибающий момент численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на отсеченную часть рамы (балки) относительно оси OX .

Изгибающий момент M представляет собой сумму моментов относительно главных центральных осей всех внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении.

Изгибающий момент численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на отсеченную часть рамы (балки) относительно оси.

От действия изгибающего момента в поперечном сечении балки возникают *нормальные напряжения*, то есть $\sigma = f(M)$, а от перерезывающей силы *касательные напряжения* $\tau = f(Q)$.

В нагруженном состоянии балка прогибается так, что ее нижние волокна удлиняются, а верхние укорачиваются, т.е. изгиб сопровождается появлением нормальных напряжений. При постепенном переходе от удлиняющихся волокон к укорачивающимся (или

наоборот) встречается промежуточный слой волокон, которые не меняют своей длины. Этот слой называется нейтральным, а линия его пересечения с плоскостью поперечного сечения балки – нейтральной линией или осью (ось x на рисунке 4.1). Следовательно, нейтральная линия является геометрическим местом точек, в которых нормальные напряжения равны нулю.

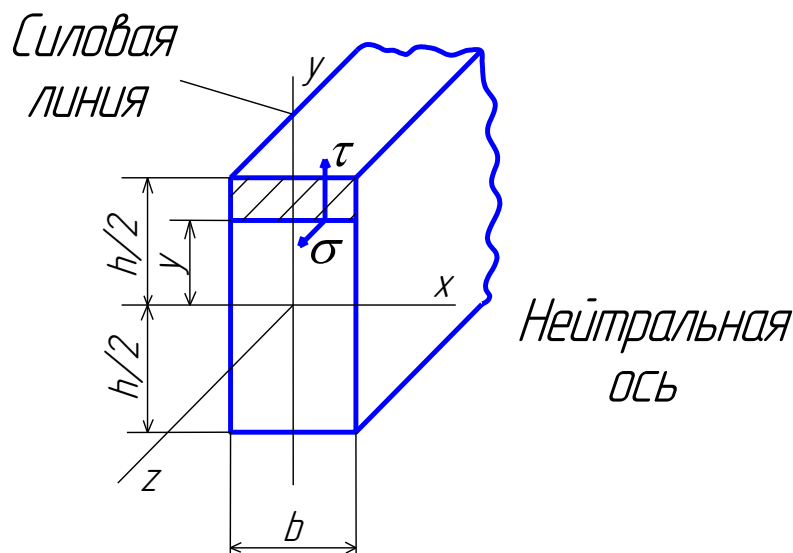


Рисунок 4.1 – Расположение плоскостей в балке

Нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения определяется по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{I_x} y, \quad (4.1)$$

где M_x – изгибающий момент, возникающий в рассматриваемом сечении;

I_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;

y – расстояние от нейтральной оси до точки, в которой вычисляется нормальное напряжение.

Изгибающий момент M_x и координату y удобнее всего брать по абсолютному значению, а знак напряжений устанавливать из характера деформирования балки (при растяжении – «плюс», при сжатии – «минус»), т. е. по эпюре M . Нормальные напряжения по высоте сечения изменяются по линейному закону и достигают наибольших значений в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси.

Для бруса постоянного сечения наибольшие нормальные напряжения возникают в поперечном сечении, где изгибающий момент максимален, и определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_{max}}{I_x} y_{max}. \quad (4.2)$$

Для сечений, симметричных относительно нейтральной оси,

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{I_x} \cdot \frac{h}{2}$$

отношение

$$\frac{I_x}{h/2} = W_x$$

называется моментом сопротивления сечения при изгибе или осевым моментом сопротивления.

Моменты сопротивления простейших сечений вычисляют по следующим формулам:

прямоугольного

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6}, \quad (4.3)$$

где b , h – стороны сечения;

круглого

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32}, \quad (4.4)$$

где d – диаметр;

кольца

$$W_x = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - c^4), \quad (4.5)$$

где D – наружный диаметр сечения;

d_0 – внутренний диаметр сечения.

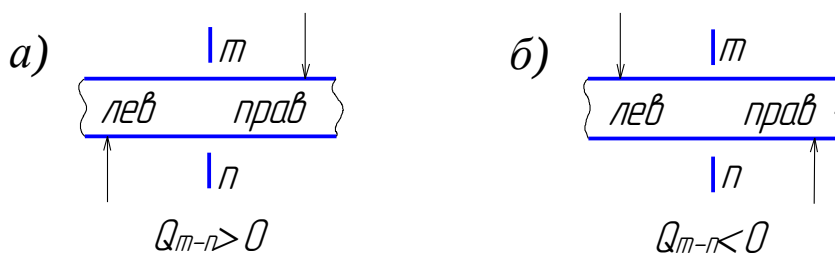
$$c = \frac{d_0}{D}.$$

Осевой момент сопротивления является геометрической характеристикой прочности прямого бруса, работающего на изгиб.

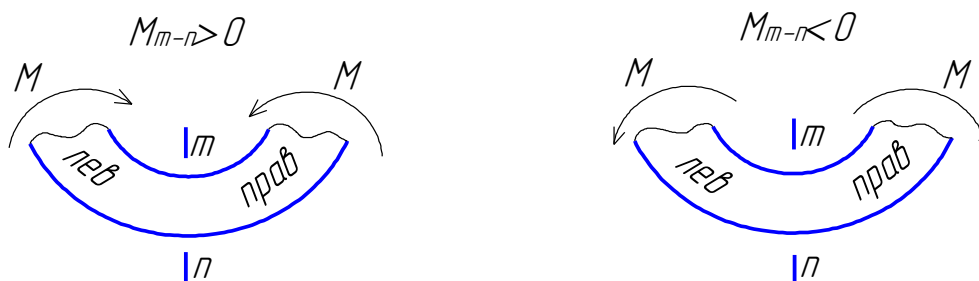
4.2 Правило знаков и контроль эпюр Q и M

Поперечная сила в сечении балки $m-n$ считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения

направлена снизу вверх, справа – сверху вниз, и отрицательной – в противоположном случае.



Правило знаков для изгибающего момента: изгибающий момент считается положительным, если в рассматриваемом сечении балка изгибается выпуклостью вниз, и отрицательным, если балка изгибается выпуклостью вверх. Еще и поэтому предложенное правило называют «правилом дождя».



Правила построения эпюр поперечных сил и изгибающих моментов:

1. Если на участке отсутствует равномерно распределенная нагрузка, то поперечная сила постоянна, а изгибающий момент изменяется по линейному закону;

2. Если на участке имеется равномерно распределенная нагрузка, то поперечная сила изменяется по линейному закону, а изгибающий момент – по закону квадратной параболы. При этом парабола всегда обращена выпуклостью навстречу распределенной нагрузке;

3. Если на участке поперечная сила имеет два знака («плюс» и «минус») и сечение, где осуществляется переход через нулевую линию, т. е. $Q_y = 0$, то изгибающий момент в этом сечении достигает экстремального значения (max или min);

4. В сечении балки, где приложена внешняя сосредоточенная сила, эпюра Q имеет скачок на величину этой силы, а эпюра M – излом (смежные участки эпюры не имеют плавного сопряжения);

5. В сечении, где приложен внешний сосредоточенный момент, эпюра M имеет скачок на величину этого момента. На эпюре Q это не отражается.

4.3 Расчет балок на прочность по нормальным напряжениям

В большинстве случаев расчет балок на прочность ведется по наибольшему нормальным напряжениям, возникающим в опасном поперечном сечении. Для балки из пластичного материала, имеющей постоянное сечение, опасным является то сечение, в котором изгибающий момент максимален. При сечениях, симметричных относительно нейтральной оси, формула для расчета на прочность имеет вид

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_x} \leq [\sigma]. \quad (4.6)$$

Условие прочности при изгибе, как и любое другое условие, позволяет производить три вида расчетов:

- 1) проверка прочности балки по известным размерам ее поперечного сечения, максимальному изгибающему моменту и допускаемому напряжению;
- 2) определение размеров поперечного сечения по максимальному изгибающему моменту и допускаемым напряжениям;
- 3) определение эксплуатационной способности (предельного изгибающего момента) по известным размерам поперечного сечения и допускаемому напряжению.

Подбор сечений при изгибе существенно отличается от подбора при осевом растяжении, который благодаря равномерному распределению напряжений сводится к определению требуемой площади, а форма сечения принимается исключительно по конструктивным соображениям.

При изгибе форма сечения играет существенную роль, поскольку прочность балки характеризуется значением момента сопротивления, зависящим как от размеров, так и от очертания сечения. Можно получить большой момент сопротивления при малой площади и, наоборот, малый момент – при большой площади. Совершенно очевидно, что первый вариант наиболее приемлем с точки зрения расхода материала и для благоприятной работы на изгиб.

Для балок из пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, следует применять сечения, симметричные относительно нейтральной оси. И наиболее рациональны те

формы поперечного сечения, у которых основная часть площади удалена как можно дальше от нейтральной оси. Этому условию удовлетворяют балки двутаврового сечения: основная масса материала у них сконцентрирована в удаленных от нейтрального слоя полках (рисунок 4.3).

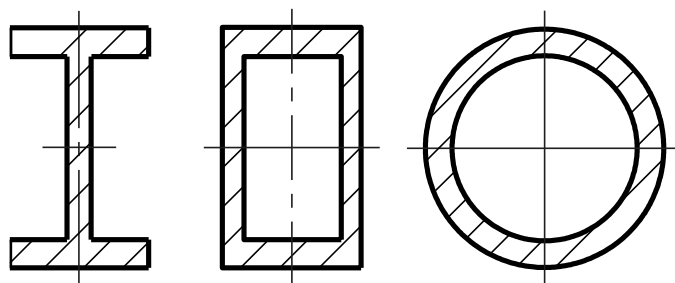


Рисунок 4.3 – Рациональные формы сечения балок, изготовленных из пластичных материалов

Менее выгодно прямоугольное сечение, особенно вытянутое вдоль нейтральной оси ($W_y < W_x$). Еще менее выгодно круглое сечение, так как оно имеет наибольшую толщину на уровне нейтрального слоя. Но момент сопротивления сплошного круга можно увеличить, если срезать сегменты (рисунок 4.4). Это широко используется в деревянных балках.

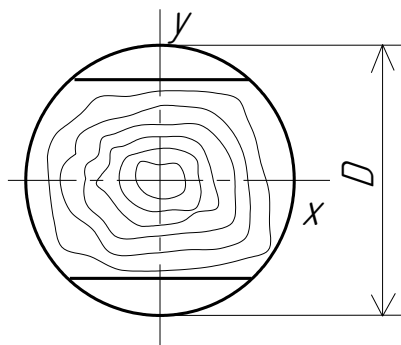


Рисунок 4.4 – Рациональная форма сечения деревянного бруса

Для балок из хрупких материалов, не одинаково работающих на растяжение и сжатие, рациональны сечения, несимметричные относительно нейтральной оси.

Расчет на прочность балки из хрупкого материала ведется либо по наибольшим растягивающим, либо по наибольшим сжимающим напряжениям, т. е. по одной из следующих зависимостей (рисунок 4.5):

$$\sigma_{Pmax} = \frac{M_{max}}{I_x} y_A \leq [\sigma_P]; \quad \sigma_{Cmax} = \frac{M_{max}}{I_x} y_B \leq [\sigma_C], \quad (4.7)$$

где y_A , y_B – расстояния от нейтральной оси до наиболее удаленных точек соответственно растянутой и сжатой зон асимметричного поперечного сечения.

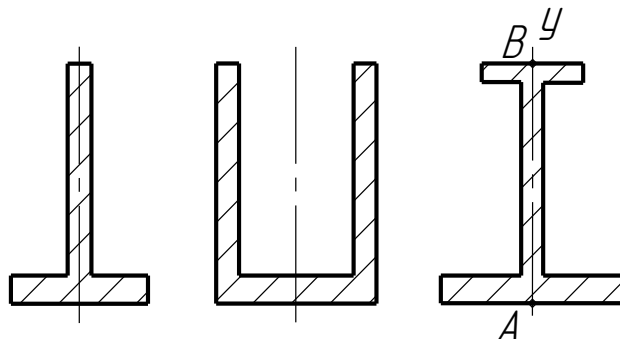


Рисунок 4.5 – Рациональные формы сечения балок, изготовленных из хрупких материалов

4.4 Касательные напряжения при поперечном изгибе

При поперечном изгибе действуют не только нормальные, но и касательные напряжения ($Q \neq 0$). Последние усложняют картину деформирования, приводя к искривлению поперечных сечений балки, в результате чего нарушается гипотеза плоских сечений. Однако исследования показывают, что искажения, вносимые касательными напряжениями, незначительно влияют на нормальные, подсчитанные по формуле (4.2). Таким образом, при определении нормальных напряжений в случае поперечного изгиба вполне применима теория чистого изгиба.

Касательные напряжения в произвольной точке поперечного сечения определяются по формуле

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{отс}}{b \cdot I_x}, \quad (4.8)$$

где Q – поперечная сила в рассматриваемом сечении;

$S_x^{отс}$ – статический момент относительно нейтральной оси той части сечения, которая расположена по одну сторону прямой, проведенной через данную точку (прямая проводится параллельно нейтральной оси);

b – ширина поперечного сечения на уровне рассматриваемой точки;

I_x – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси.

Эта формула была выведена Д.И. Журавским и часто называется его именем.

Для построения эпюры касательных напряжений по высоте балки необходимо установить закон изменения статического момента S_x . Следует иметь в виду, что принципиально безразлично, брать ли статический момент площади заштрихованной или остальной части поперечного сечения (рисунок 4.6). Оба статических момента равны и противоположны по знаку, поэтому их сумма, представляющая собой статический момент площади всего сечения относительно нейтральной оси (центральной оси x), равна нулю.

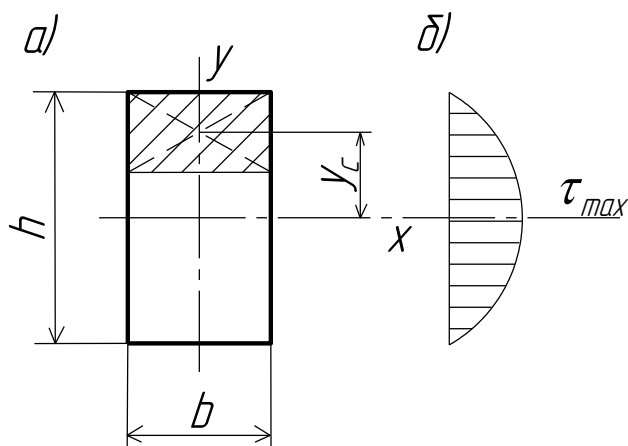


Рисунок 4.6 – Эпюра распределения касательных напряжений по прямоугольному сечению

Касательные напряжения в прямоугольном сечении изменяются по закону квадратной параболы, достигая максимума на уровне нейтральной оси (рисунок 4.6) при $y = 0$.

При $y = \pm h/2$ (в крайних волокнах) касательные напряжения равны нулю. Знак касательных напряжений принципиального значения не имеет, и его обычно не указывают.

Условие прочности балки по касательным напряжениям имеет вид

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{b \cdot I_x} \leq [\tau], \quad (4.9)$$

где $\tau_{\max}$ – максимальное касательное напряжение в опасном сечении балки;

Q_x – наибольшая по абсолютному значению расчетная поперечная сила;

$[\tau]$ – допускаемые касательные напряжения.

Для стальных балок принимают $[\tau] = 0,6[\sigma]$.

Допущение о равномерном распределении касательных напряжений по ширине прямоугольного сечения справедливо и для стенки двутавра вследствие ее малой толщины d (рисунок 4.7 а). Для волокон, лежащих в пределах стенки на произвольном расстоянии y от нейтральной оси, в формулу (4.8) следует также подставлять статический момент площади отсеченной части, в качестве ширины – толщину стенки.

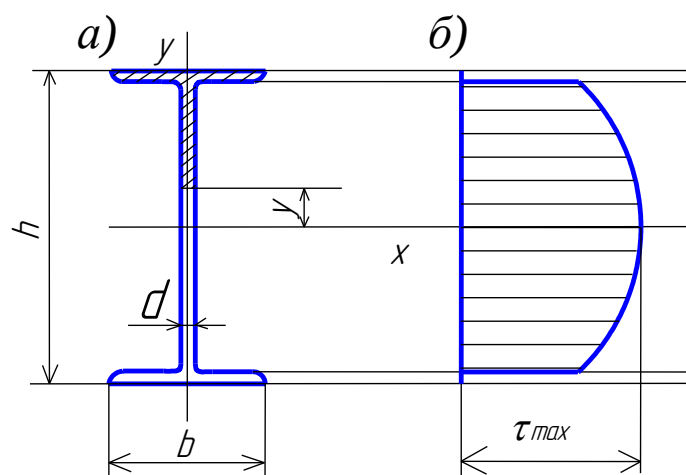


Рисунок 4.7 – Эпюры распределения касательных напряжений по двутавровому сечению

Чтобы не нарушать допущения о равномерном распределении касательных напряжений по ширине сечения, на практике эпюру τ по двутавру строят только в пределах стенки.

4.5 Главные и эквивалентные напряжения при изгибе

Установлено, что в общем случае прямого изгиба в поперечных сечениях балки возникают нормальные и касательные напряжения, которые изменяются как по длине, так и по ее высоте. Наибольшие

нормальные напряжения в симметричных сечениях проверяют по формуле (4.6), касательные – по формуле Журавского (4.9).

Наибольшие нормальные напряжения возникают в крайних, максимально удаленных от нейтральной оси точках поперечного сечения, где касательные напряжения отсутствуют. Поэтому для крайних волокон отличными от нуля главными напряжениями являются нормальные напряжения в поперечном сечении.

Наибольшие касательные напряжения в поперечном сечении возникают на уровне нейтрального слоя, где нормальные напряжения равны нулю. Следовательно, в волокнах нейтрального слоя главные напряжения определяются значением касательных напряжений.

В большинстве случаев достаточно проверить отдельно нормальные и отдельно касательные напряжения. Однако иногда наиболее напряженными оказываются промежуточные волокна, в которых возникают и те и другие напряжения. Так, для двутаврового сечения характерна эпюра нормальных напряжений того же очертания, что и для прямоугольного. В то же время касательные напряжения в двутавре значительно существеннее из-за малой толщины его стенки. С этой точки зрения наиболее опасны места примыкания стенки к полкам. В соответствующих волокнах возникают большие нормальные и значительные касательные напряжения. Совокупность этих напряжений свидетельствует о том, что материал находится в условиях плоского напряженного состояния и необходима проверка эквивалентных (приведенных) напряжений.

Для расчета балок из пластичных материалов рекомендуется пользоваться условиями прочности, полученными по III и IV теориям:

$$\sigma_{\text{эквIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma] \quad (4.10)$$

$$\sigma_{\text{эквIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma]. \quad (4.11)$$

Следует заметить, что эквивалентные напряжения в прокатных балках, как правило, не превышают нормальных напряжений в крайних волокнах и поэтому не требуют специальной проверки. Объясняется это тем, что толщина стенок прокатных профилей достаточно велика, в силу чего касательные напряжения незначительны и при обычных соотношениях между изгибающим момен-

том и поперечной силой не оказывают существенного влияния на эквивалентные напряжения.

4.6 Линейные и угловые перемещения при прямом изгибе

Перемещения поперечных сечений балок приходится определять в двух случаях: при расчете балок на жесткость; при расчете статически неопределимых балок. Различают перемещения линейные и угловые. Допущение о малости перемещений позволяет считать, что линейные перемещения – прогибы y – направлены перпендикулярно продольной оси недеформированной балки (оси z). Так как величина y переменна по длине балки, т. е. зависит от абсциссы z , прогиб обозначают как $y(z)$. Наибольший прогиб называется стрелой прогиба f . Согласно принятому на рисунке 4.8 направлению осей координат, положительным будем считать прогиб вверх, отрицательным – вниз. На рисунке 4.8 $y(z) < 0$.

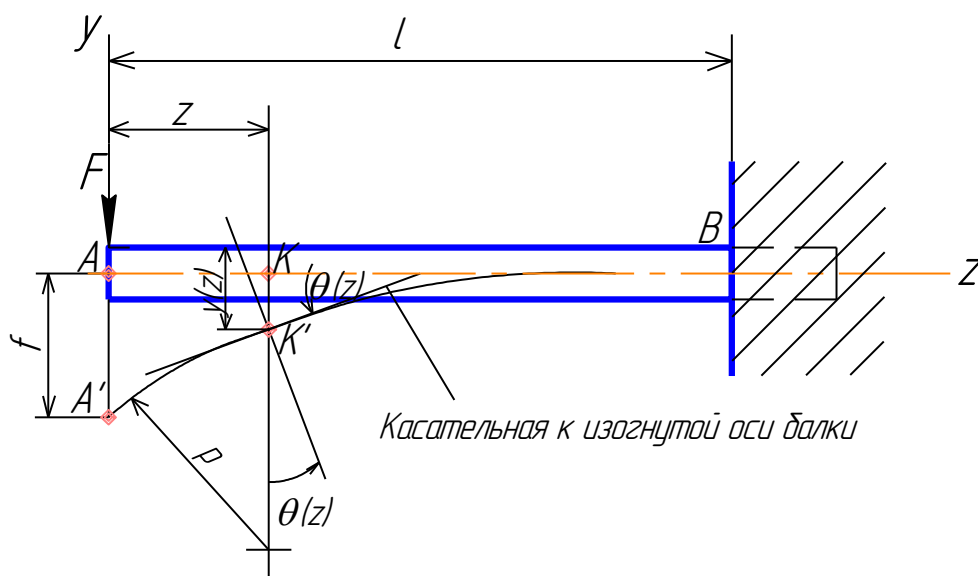


Рисунок 4.8 – Схема линейных и угловых перемещений балки

Угловые перемещения представляют собой углы поворота Θ поперечных сечений балки вокруг их нейтральных линий, или углы между направлениями продольной оси балки до и после деформирования. Величина Θ также зависит от координаты z , а угол поворота обозначают как $\Theta(z)$.

Условимся считать угол положительным, если сечение поворачивается против хода часовой стрелки, если оно поворачивается по ходу часовой стрелки. На рисунке 4.8 $\theta(z) > 0$.

Кривая, в которую обращается продольная ось балки при деформировании, называется изогнутой осью (линия А' К' В'). Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки имеет вид

$$y''(z) = \frac{M(z)}{EI_x}.$$

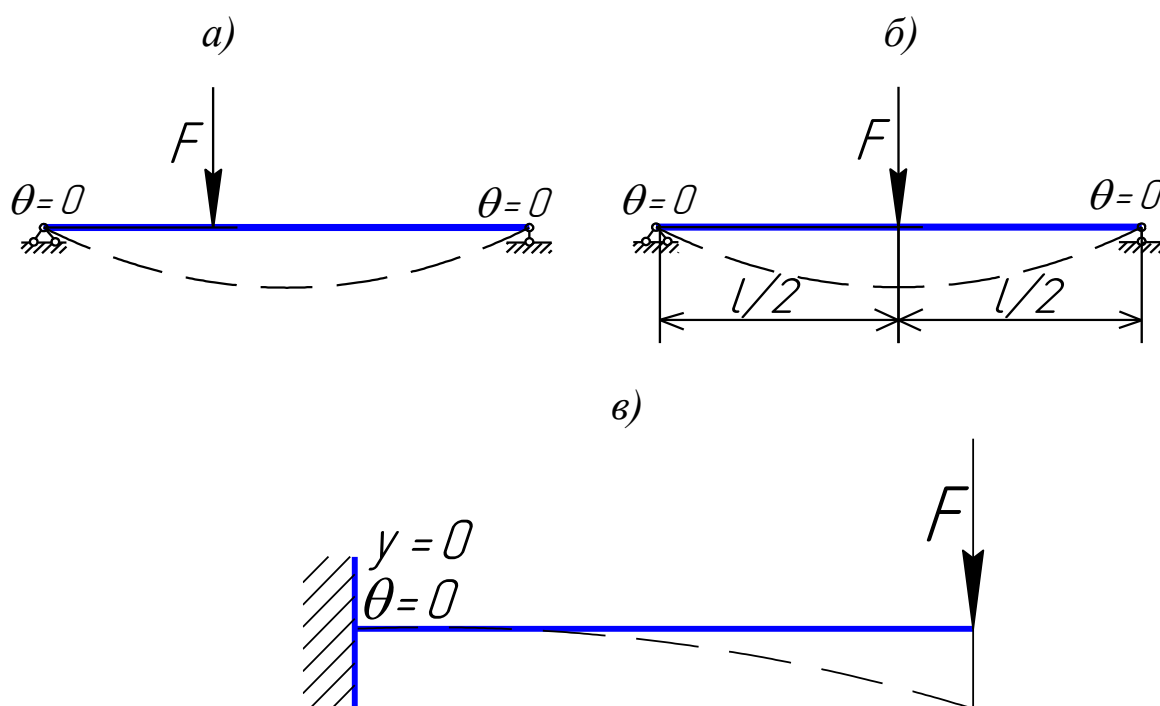


Рисунок 4.9 – Частные случаи линейных и угловых перемещений сечений балок

Оно позволяет с приемлемой для практических целей точностью определять прогибы и углы поворота в любом сечении балки от любой нагрузки. Так, у свободно лежащей балки (рисунок 4.9, а) прогибы на обеих шарнирных опорах равны нулю. Кроме того, при симметричном нагружении равен нулю и угол поворота сечения в середине пролета (рисунок 4.9, б)

Консоль имеет нулевые прогиб и угол поворота в заделке (рисунок 4.9, в), на границе смежных участков балки прогиб и угол поворота одинаковы как для левого, так и для правого участка, т. е.

перемещение, полученное из уравнения для левого участка, обязательно равно перемещению, найденному из уравнения для правого участка.

Во многих случаях по эксплуатационным соображениям максимальные прогибы балок ограничиваются определенной величиной – допускаемым прогибом $[y]$. Допускаемый прогиб зависит от назначения сооружения или машины. Например, для подкрановых балок принимают

$$[y] = \left(\frac{1}{600} \cdots \frac{1}{700} \right) l,$$

где l – длина пролета балки.

В машиностроении норма допускаемого прогиба колеблется в довольно широких пределах; в зависимости от назначения детали принимают

$$[y] = \left(\frac{1}{600} \cdots \frac{1}{700} \right) l.$$

Наибольшие углы наклона опорных сечений валов на роликовых подшипниках не должны превышать

$$[\theta] = 0,001 \text{ рад.}$$

Существует достаточное количество методов определения угловых и линейных перемещений в балках, но многие из них носят частный характер.

Метод Мора представляет собой универсальный способ для определения линейных и угловых перемещений в любых плоских и пространственных системах, состоящих из шарнирно- или жестко-соединенных прямых брусев.

При определении линейного перемещения к системе, освобожденной от заданных нагрузок, в направлении искомого перемещения (в заданной точке) прикладывается безразмерная единичная сила. И при определении углового перемещения в заданном сечении прикладывается пара сил (в плоскости искомого поворота) с моментом, равным безразмерной единице.

При рассмотрении плоских систем (балок и плоских рам) будем учитывать только энергию деформации, связанную с изгибающими моментами, что позволит получить формулу для определе-

ния перемещений, правая часть которой называется интегралом Мора,

$$\Delta_{KF} = \int_l \frac{M_z^0 \cdot M_z}{E \cdot I_x} dz, \quad (6.12)$$

где Δ_{KF} – искомое перемещение (линейное или угловое).

Первый индекс K указывает точку и направление, в которых определяется перемещение, второй индекс F – причину, вызывающую это перемещение;

$M_{(z)}$ – аналитическое выражение изгибающего момента от заданной внешней нагрузки, составленное по отношению к произвольно выбранному центру сечения участка;

M_z^0 – аналитическое выражение изгибающего момента от единичного силового фактора (силы или момента), составленное по отношению к произвольно выбранному центру сечения участка;

EI_x – жесткость сечения балки при изгибе.

Для обозначения искомого перемещения могут использоваться буквенные или числовые индексы, если приходится определять несколько перемещений одного и того же или разных сечений.

При определении углового перемещения формула (6.12) дает его величину, выраженную в радианах.

Знак суммы в формуле (6.12) указывает на то обстоятельство, что в общем случае, когда уравнения от внешнего и единичного моментов для отдельных участков системы различны, интеграл вычисляется по участкам и результаты суммируются.

Формула (6.12) применима для вычисления перемещений в балках с прямой и ломаной осью (рамках).

4.7 Пример расчета на изгиб консольной балки

Для балки, жестко защемленной одним концом и загруженной, как показано на рисунке 4.10, построить эпюры внутренних силовых факторов N , Q , M .

В точке C балка жестко защемлена. В соответствии с типом опоры покажем направление реакций – H_C , R_C , m_C . Величину их можно не определять, так как другой конец балки свободен (консоль).

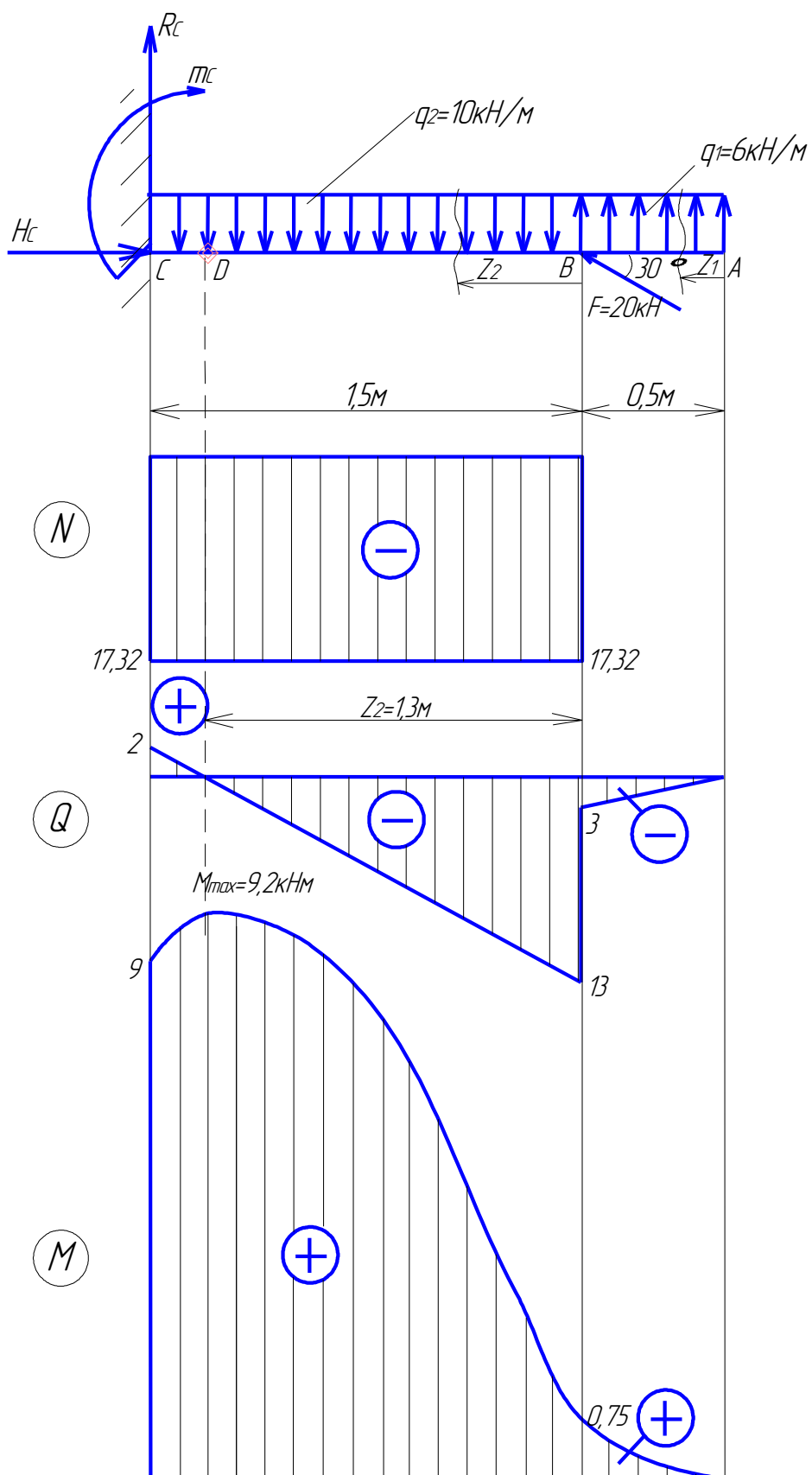


Рисунок 4.10 – Расчетная схема балки. Эпюры внутренних силовых факторов

Мысленно разделим балку на участки по границам действия сил.

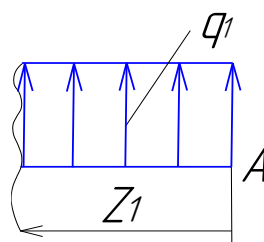
Произвольно на каждом участке выберем центр и переменной z_1 покажем направление обхода. Индекс 1 обозначает номер участка, на котором проведено сечение. Применяемые нами здесь обозначения N_z , Q_z и M_z подчеркивают, что силовые факторы являются функциями абсциссы поперечного сечения балки.

Устанавливаем пределы изменения переменной в границах одного участка.

Участок AB : $0 \leq z_1 \leq 0,5$ м.

На отсеченную правую часть, длина которой обозначена переменной z_1 , действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q_1 и направлена вверх. Следуя определениям и правилу знаков получим:

а) продольная сила на первом участке будет равна



$$N_{z1} = 0$$

$$N_A = N_B = 0;$$

б) поперечная сила

$$Q_{z1} = -q \cdot z_1.$$

Поперечная сила изменяется по закону прямой линии. Для построения эпюры достаточно определить ординаты в двух крайних точках участка, т. е.

$$\text{при } z_1 = 0 \quad Q_A = 0$$

$$z_1 = 0,5 \text{ м} \quad Q_B = -6 \cdot 0,5 = -3,0 \text{ кН.}$$

Изгибающий момент изменяется по закону параболы, т. е. для построения эпюры нужно определить ординаты в трех сечениях. Практика построения эпюр позволяет сделать некоторые упрощения;

в) изгибающий момент

$$M_{z1} = -q \frac{z_1^2}{2}.$$

Если на эпюре Q мы видим только один знак («плюс» или «минус»), то эпюру моментов можно представить ветвью параболы, выпуклость которой направлена навстречу действию равно-

мерно распределенной нагрузки. А для построения ветви можно ограничиться двумя ординатами, поэтому

при $z_1 = 0$ $M_A = 0$

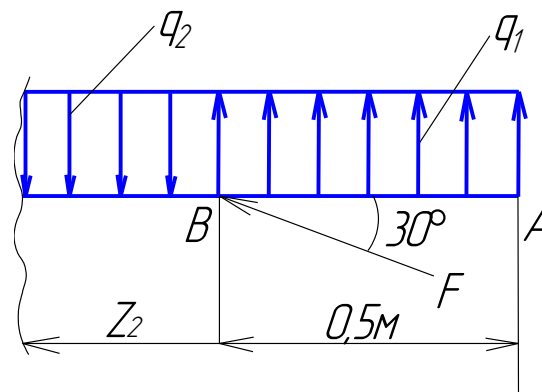
при $z_1 = 0,5$ м

$$M_B = 6 \frac{(0,5)^2}{2} = 0,75 \text{ кНм.}$$

Участок ВС: $0 \leq z_2 \leq 1,5$ м.

На отсеченную правую часть, длина которой $(z_2 + 0,5)$ м, действуют равнодействующая нагрузки $q_1 \cdot 0,5$, направленная вверх, равнодействующая нагрузки $q_2 \cdot z_2$, направленная вниз, и сосредоточенная сила F , приложенная под углом к оси и направленная вверх.

Составим уравнения внутренних силовых факторов:



а) уравнение продольной силы

$$N_{z_2} = -F \cdot \cos 30^\circ.$$

Как видно из уравнения, продольная сила одинакова во всех сечениях участка ВС (const), а эпюра будет ограничена прямой, параллельной оси балки

$$N_B = N_C = -20 \cdot 0,866 = -17,32 \text{ кН.}$$

б) уравнение поперечной силы

$$Q_{z_2} = -q_1 \cdot 0,5 + q_2 \cdot z_2 - F \cdot \sin 30;$$

$$\text{при } z_2 = 0 \quad Q_B = -6 \cdot 0,5 - 20 \cdot 0,5 = -13 \text{ кН}$$

$$\text{при } z_2 = 1,5 \text{ м } Q_C = -6 \cdot 0,5 + 10 \cdot 1,5 - 20 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН;}$$

в) уравнение изгибающего момента

$$M_{z_2} = q_1 \cdot 0,5 \left(\frac{0,5}{2} + z_2 \right) - q_2 \frac{z_2^2}{2} + F \cdot \sin 30 \cdot z_2$$

при $z_2 = 0$

$$M_B = 6 \frac{(0,5)^2}{2} = 0,75 \text{ кНм}$$

при $z_2 = 1,5$ м

$$M_C = 6 \cdot 0,5 \left(\frac{0,5}{2} + 1,5 \right) - 10 \frac{1,5^2}{2} + 20 \cdot 0,5 \cdot 1,5 = 9 \text{ кНм.}$$

Уравнение изгибающего момента показывает, что эпюра M будет ограничена параболой. Опять обратим внимание на эпюру Q . Здесь мы видим, что под участком BC эпюра имеет два знака («плюс» и «минус») и пересекает нулевую линию, т. е. $Q_D = 0$. Тогда для построения эпюры M определим ординаты в трех сечениях – под точками B , C и D , где в свою очередь момент будет иметь экстремальное значение, если q направлено вверх – $\min$, если q направлено вниз – $\max$.

Чтобы определить его величину приравняем нулю уравнение Q второго участка

$$Q_{z2} = -q_1 \cdot 0,5 + q_2 \cdot z_2 - F \cdot \sin 30 = 0,$$

отсюда получаем:

$$z_2 = \frac{q_1 \cdot 0,5 + F \cdot \sin 30}{q_2} = \frac{6 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5}{10} = 1,3 \text{ м}$$

и подставим полученное значение переменной в уравнение M_{z_2} , т. е. при $z_2 = 1,3$ м

$$M_{\max} = 6 \cdot 0,5 \left(\frac{0,5}{2} + 1,3 \right) - 10 \frac{1,3^2}{2} + 20 \cdot 0,5 \cdot 1,3 = 9,2 \text{ кНм.}$$

Построим вышеназванные эпюры в выбранном произвольном масштабе (рисунок 4.10) и проведем контроль их построения.

Под сечением C на эпюрах имеются скачки, численно равные величине опорных реакций заделки, а знаки эпюр указывают на их направление. Тогда

$$H_C = 17,32 \text{ кН (сжатие);}$$

$$R_C = 2 \text{ кН (левая сторона – вверх);}$$

$$m_C = 9 \text{ кНм («дождь» собирается).}$$

Не определяя опорных реакций на консоли, на эпюрах мы получили их значения и направление.

Выводы.

Построенные эпюры внутренних силовых факторов показывают, что опасным будет сечение балки в сечении D . Здесь продольная сила и изгибающий момент имеют наибольшие абсолютные значения.

4.8 Пример расчета деформаций консольной балки

Для балки, жестко зашеченной одним концом и нагруженной, как показано на рисунке 4.11, определить величину деформаций (прогиб и угол поворота) свободного конца (точка К).

Дано:

сосредоточенная сила

$$F = 8 \text{ кН};$$

интенсивность равномерно

распределенной нагрузки

$$q = 12 \text{ кН/м};$$

внешний изгибающий момент

$$M = 20 \text{ кНм};$$

$$a = 2,0 \text{ м}; b = 4 \text{ м}.$$

Для двутавра № 27: $I_x = 5010 \text{ см}^4$.

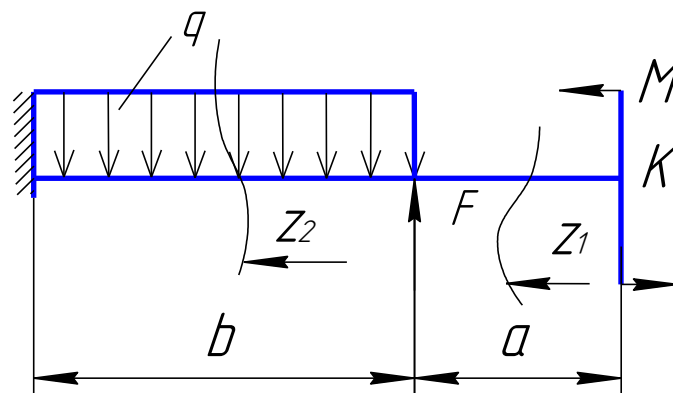


Рисунок 4.11 – Расчетная схема балки

Балку, под действием заданных нагрузок работающую на изгиб, мы поделили на два участка, показали направление обхода каждого из них и составили уравнения изгибающих моментов

$$M_{z1} = M$$

$$M_{z2} = M + F \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2}.$$

Определим заданные величины перемещений:

а) угла поворота поперечного сечения балки в точке К.

Составим расчетную схему (рисунок 4.12).

К системе (рисунок 4.12), освобожденной от заданных нагрузок, в заданной точке прикладываем пару сил с моментом, равным безразмерной единице.

С балкой, нагруженной единичным силовым фактором, мы поступим аналогично, т. е. сохраним количество участков и направление их обхода. Составим аналитические выражения изгибающих моментов от единичного момента (рисунок 4.12).

$$M_{z1}^0 = M^0; \quad M_{z2}^0 = M^0.$$

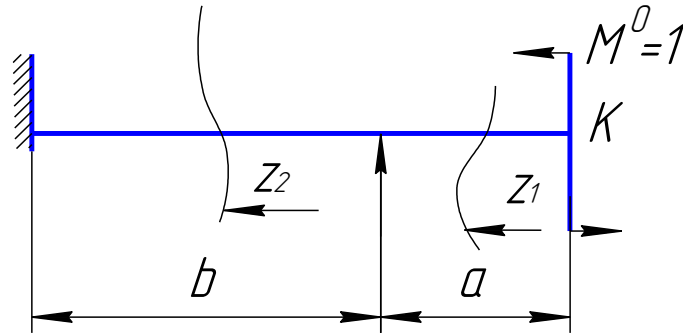


Рисунок 4.12 – Расчетная схема балки с единичным силовым фактором

Полученные выражения подставим в формулу (4.12) и определим величину угла поворота сечения балки в точке К:

$$\begin{aligned} \theta_K &= \int_0^a \frac{M_{z1}^0 \cdot M_{z1}}{E \cdot I_x} dz_1 + \int_0^b \frac{M_{z2}^0 \cdot M_{z2}}{E \cdot I_x} dz_2 = \int_0^a \frac{M^0 \cdot M}{E \cdot I_x} dz_1 + \\ &+ \int_0^b \frac{M^0 \cdot \left(M + F \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2} \right)}{E \cdot I_x} dz_2 = \frac{1}{E \cdot I_x} \times \\ &\times \left(\int_0^a M dz_1 + \int_0^b M dz_2 + \int_0^b F \cdot z_2 dz_2 - \int_0^b \frac{q \cdot z_2^2}{2} dz_2 \right) = \\ &= \frac{1}{E \cdot I_x} \left(M \cdot z_1 \Big|_0^a + M \cdot z_2 \Big|_0^b + \frac{F \cdot z_2^2}{2} \Big|_0^b - \frac{q \cdot z_2^3}{3} \Big|_0^b \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} \left(20 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + \frac{8 \cdot 4^2}{2} - \frac{12 \cdot 4^3}{3} \right) = \\ &= 0,0092 \text{ рад;} \end{aligned}$$

б) прогиба свободного конца балки в точке К.

Составим расчетную схему (рисунок 4.13). К системе (рисунок 4.13), освобожденной от заданных нагрузок, в заданной точке прикладываем безразмерную единичную силу.

Составим аналитические выражения изгибающих моментов от единичной силы (рисунок 4.13):

$$\begin{aligned} M_{z1}^0 &= F^0 \cdot z_1 \\ M_{z2}^0 &= F^0 \cdot (a + z_2). \end{aligned}$$

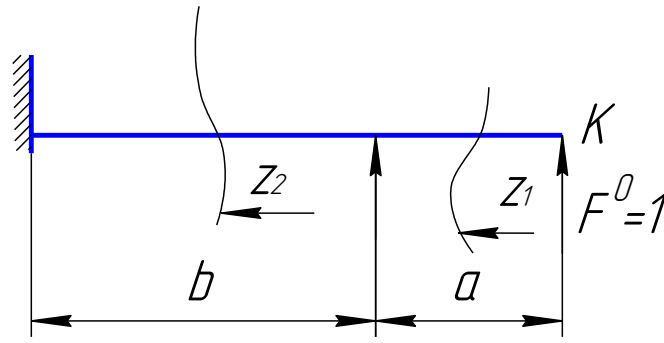


Рисунок 4.13 – Расчетная схема балки с единичным силовым фактором

Полученные выражения подставим в формулу (4.12) и определим величину прогиба балки в точке К:

$$\begin{aligned}
 y_K &= \int_0^a \frac{M_{z1}^0 \cdot M_{z1}}{E \cdot I_x} dz_1 + \int_0^b \frac{M_{z2}^0 \cdot M_{z2}}{E \cdot I_x} dz_2 = \int_0^a \frac{F^0 \cdot z_1 \cdot M}{E \cdot I_x} dz_1 + \\
 &+ \int_0^b \frac{(F^0(a + z_2)) \cdot \left(M + F \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2}\right)}{E \cdot I_x} dz_2 = \frac{1}{E \cdot I_x} \times \\
 &\times \left(\int_0^a M \cdot z_1 dz_1 + \int_0^b M \cdot a dz_2 + \int_0^b M \cdot z_2 dz_2 + \int_0^b F \cdot a \cdot z_2 dz_2 + \right. \\
 &\left. + \int_0^b F \cdot z_2^2 dz_2 - \int_0^b \frac{q \cdot a \cdot z_2^2}{2} dz_2 - \int_0^b \frac{q \cdot z_2^3}{2} dz_2 \right) = \frac{1}{E \cdot I_x} \times \\
 &\times \left(\frac{M \cdot z_1^2}{2} \Big|_0^a + M \cdot a \cdot z_2 \Big|_0^b + \frac{M \cdot z_2^2}{2} \Big|_0^b + \frac{F \cdot a \cdot z_2^2}{2} \Big|_0^b + \frac{F \cdot z_2^3}{3} \Big|_0^b - \right. \\
 &\left. - \frac{q \cdot a \cdot z_2^3}{3} \Big|_0^b - \frac{q \cdot z_2^4}{4} \Big|_0^b \right) = \frac{1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5010 \cdot 10^{-8}} \left(\frac{20 \cdot 2^2}{2} + 20 \cdot 2 \cdot 4 \right. \\
 &\left. + \frac{20 \cdot 4^2}{2} + \frac{8 \cdot 2 \cdot 4^2}{2} + \frac{8 \cdot 4^3}{3} - \frac{12 \cdot 2 \cdot 4^3}{3} - \frac{12 \cdot 4^4}{4} \right) = -0,062 \text{ м.}
 \end{aligned}$$

Знак «минус» показывает, что балка в точке К будет прогибаться в направлении, противоположном предполагаемому. На рисунке 4.13 направление единичной силы предполагает направление прогиба вверх. В действительности сечение балки в точке К будет перемещаться вниз.

Задача № 4

Для стальной балки, схема которой изображена на рисунке 4.14, требуется:

1) построить эпюры внутренних силовых факторов – поперечных сил Q и изгибающих моментов M ;

2) из расчета на прочность по нормальным напряжениям в опасном сечении балки определить размеры поперечного сечения, двутавровой, прямоугольной и сплошной круглой формы;

3) определить напряжения в опасном сечении балки от изгиба, построить эпюры их распределения по названным формам сечений;

4) определить вес балок всех форм сечений, сделать выводы о рациональности их применения.

Данные для расчетов взять из таблицы 4.

Таблица 4 – Исходные данные к задаче № 4

Номер строки	F , кН	M , кНм	q , кН/м	ℓ , м	Материал	σ_t , МПа	n	$h:b$
01	20	30,0	6,0	1,2	Сталь 30	320	2,4	2,5
02	29	10,0	5,0	1,5	Сталь 25	280	2,0	3,0
03	28	12,0	4,0	1,8	Сталь 45	360	2,6	3,5
04	40	34,0	12,0	1,0	Сталь 40	340	2,5	4,0
05	42	16,0	7,0	2,0	Ст. 5	270	2,6	2,0
06	34	18,0	11,0	2,1	Ст. 2	220	1,7	2,5
07	37	20,0	10,0	1,9	Сталь 20Г	280	2,2	3,0
08	24	22,0	9,0	1,4	Ст. 3	250	2,0	3,5
09	35	24,0	8,0	1,3	Сталь 10	220	1,8	4,0
10	36	26,0	3,0	2,1	Ст. 5	280	1,6	2,0

Пример расчета

Дано:

сосредоточенная сила

$$F = 42 \text{ кН};$$

интенсивность равномерно

распределенной нагрузки

$$q = 7 \text{ кН/м};$$

внешний изгибающий момент

$$M = 16 \text{ кНм};$$

материал балки

Ст.5;

предел текучести

$$\sigma_t = 270 \text{ Мпа};$$

коэффициент запаса прочности

$$n = 2,6;$$

$$h : b = 2,0 \quad l = 2,0 \text{ м.}$$

Решение

Составляем уравнения статического равновесия, определяем величину и направление опорных реакций:

$$\begin{aligned}\sum F_z &= 0; H_B = 0 \\ \sum m_B &= 0. -q \cdot 1,2l \frac{1,2l}{2} + q \cdot 1,7l \frac{1,7l}{2} + F \cdot 1,7l - R_D 2,5l + M = 0 \\ R_D &= \frac{q \cdot 1,7l \frac{1,7l}{2} - q \cdot 1,2l \frac{1,2l}{2} + F \cdot 1,7l + M}{2,5l} = \\ &= \frac{7 \cdot \frac{(1,7 \cdot 2,0)^2}{2} - 7 \cdot (1,2 \cdot 2,0) \frac{1,2 \cdot 2,0}{2} + 42 \cdot 1,7 \cdot 2,0 + 16}{2,5 \cdot 2,0} = \\ &= 35,82 \text{ кНм.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum m_D &= 0. -q \cdot 2,9l \left(0,8l + \frac{2,9l}{2}\right) - F \cdot 0,8l + R_B 2,5l + M = 0 \\ R_B &= \frac{q \cdot 2,9l \left(0,8l + \frac{2,9l}{2}\right) + F \cdot 0,8l + R_D 2,5l - M}{2,5l} = \\ &= \frac{7 \cdot 2,9 \cdot 2,0 \left(0,8 \cdot 2,0 + \frac{2,9 \cdot 2,0}{2}\right) + 42 \cdot 0,8 \cdot 2,0 - 16}{2,5 \cdot 2,0} = \\ &= 46,78 \text{ кНм.}\end{aligned}$$

Проверка: $\sum F_y = 0. R_B - q \cdot (3,7l) - F + R_D = 0$
 $46,78 - 7 \cdot 2,9 \cdot 2,0 - 42 + 35,82 = 0.$

Значит, балка находится в равновесии. Значения опорных реакций определены правильно, каждая из них направлена вверх.

Поделим балку на участки по границам действия силовых факторов: АВ, ВС, CD.

Покажем направление обхода участков и составим уравнения поперечных сил и изгибающих моментов по участкам.

Участок АВ: $0 \leq z_1 \leq 2,4 \text{ м.}$

$$Q_{z1} = -q \cdot z_1.$$

При $z_1 = 0 \quad Q_A = 0$

$z_1 = 2,40 \text{ м} \quad Q_B = -7 \cdot 2,4 = -16,8 \text{ кН;}$

$$M_{z1} = -q \frac{z_1^2}{2}.$$

При $z_1 = 0$ м

$$M_A = 0 \text{ кН}$$

$$z_1 = 2,4 \text{ м}$$

$$M_B = -7 \frac{(2,4)^2}{2} = -20,16 \text{ кНм.}$$

Участок CD: $0 \leq z_2 \leq 1,6 \text{ м.}$

$$Q_{z2} = -R_D$$

При $z_2 = 0$ $Q_D = -35,82 \text{ кН}$

$z_2 = 1,60 \text{ м}$ $Q_C = -35,82 \text{ кН.}$

$$M_{z2} = R_D z_2$$

При $z_2 = 0$

$$M_D = 0 \text{ кНм}$$

$$z_2 = 1,60 \text{ м}$$

$$M_C = 35,82 \cdot 1,6 = 57,3 \text{ кНм.}$$

Участок BC: $0 \leq z_3 \leq 3,4 \text{ м.}$

$$Q_{z3} = -R_D + F + q \cdot z_3.$$

При $z_3 = 0$ $Q_C = -35,82 + 42 = 6,18 \text{ кН}$

$z_3 = 3,4 \text{ м}$ $Q_B = -35,82 + 42 + 7 \cdot 3,4 = 29,98 \text{ кН}$

$$M_{z3} = R_D (0,8l + z_3) - F \cdot z_3 - q \frac{z_3^2}{2}$$

При $z_3 = 0$ $M_C = 35,82 \cdot 1,6 - 0 - 0 = 57,3 \text{ кНм}$

$$z_3 = 3,4 \text{ м}$$

$$M_B = 35,82 \cdot (1,6 + 3,4) - 42 \cdot 3,4 - 7 \frac{3,4^2}{2} = -4,16 \text{ кНм.}$$

По полученным данным построим эпюры внутренних силовых факторов Q и M (рисунок 4.14).

Опасным будет сечение балки на участке СВ, где $M_{max} = 57,3 \text{ кНм.}$

Размеры поперечного сечения балки двутавровой формы определим из условия прочности при изгибе [1]:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} \leq [\sigma],$$

где σ_{max} – напряжения в опасном сечении балки, Па;

M_{max} – максимальный изгибающий момент, Нм;

W_x – осевой момент сопротивления, м³;

$[\sigma]$ – допускаемые напряжения, Па.

Определим допускаемые напряжения:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_m}{n} = \frac{270}{2,6} = 103,8 \text{ МПа.}$$

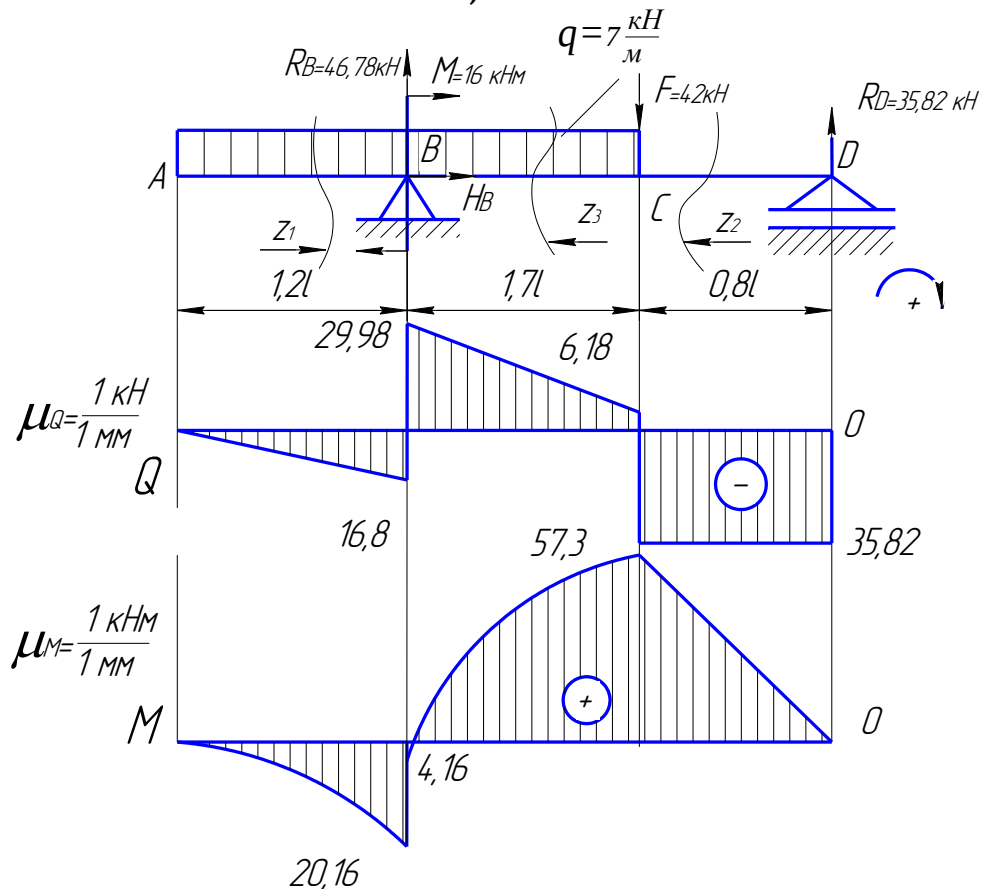


Рисунок 4.14 – Расчетная схема балки, эпюры перерезывающих сил и изгибающих моментов

Из условия (1) выразим геометрическую характеристику прочности балки – осевой момент сопротивления

$$W_x \geq \frac{M_{max}}{[\sigma]} = \frac{57,3 \cdot 10^3}{103,8 \cdot 10^6} = 552 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 552 \text{ см}^3.$$

Определим размеры поперечных сечений балок следующих форм:

а) двутавровой.

По сортаменту на прокатные профили принимаем двутавр № 33 (приложение И1), для которого $W_x = 597 \text{ см}^3$;

б) прямоугольной.

Для прямоугольной формы сечения [1]

$$W_x = \frac{bh^2}{6},$$

где b, h – размеры поперечного сечения балки, мм, $b = h/2,0$.

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{h^3}{12}.$$

$$h \geq \sqrt[3]{12 \cdot W_x} = \sqrt[3]{12 \cdot 552} = 19,0 \text{ см.}$$

Принимаем $h = 190$ мм; тогда $b = 190/2,0 = 95$ мм;

в) круглой.

Для круглой формы сечения

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32},$$

где d – диаметр балки, мм.

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 552}{\pi}} = 17,9 \text{ см.}$$

По ГОСТ 6636-86 (приложение Ж) принимаем $d = 180$ мм.

Максимальные нормальные напряжения в точках поперечного сечения определим по формуле [1]

$$\sigma = \frac{M}{W_x}.$$

Для двутавра максимальные напряжения равны

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{57300}{597 \cdot 10^{-6}} = 96,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 96,0 \text{ МПа.}$$

Для прямоугольной формы сечения максимальные напряжения равны

$$W_x = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{9,5 \cdot 19^2}{6} = 572 \text{ см}^3.$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{57300}{572 \cdot 10^{-6}} = 100,2 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100,2 \text{ МПа.}$$

Для круглой формы сечения максимальные напряжения равны

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 18^3}{32} = 573 \text{ см}^3$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{57300}{573 \cdot 10^{-6}} = 100,0 \cdot 10^6 \text{ Па} = 100,0 \text{ МПа.}$$

По полученным данным строим эпюры распределения нормальных напряжений по точкам поперечных сечений (рисунок 4.15).

Определим вес балки круглого сечения по формуле

$$P = V \cdot \rho = A \cdot \ell \cdot \rho,$$

где P – вес, Н;

V – объем, м³;

A – площадь поперечного сечения, м²;

ℓ – длина балки, м;

ρ – плотность материала, Н/м³;

Для углеродистых сталей $\rho = 78,5$ кН/м³;

$$P = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \ell \cdot \rho = \frac{3,14 \cdot 180^2}{4} 10^{-6} \cdot 7,4 \cdot 78,5 = 14,78 \text{ кН.}$$

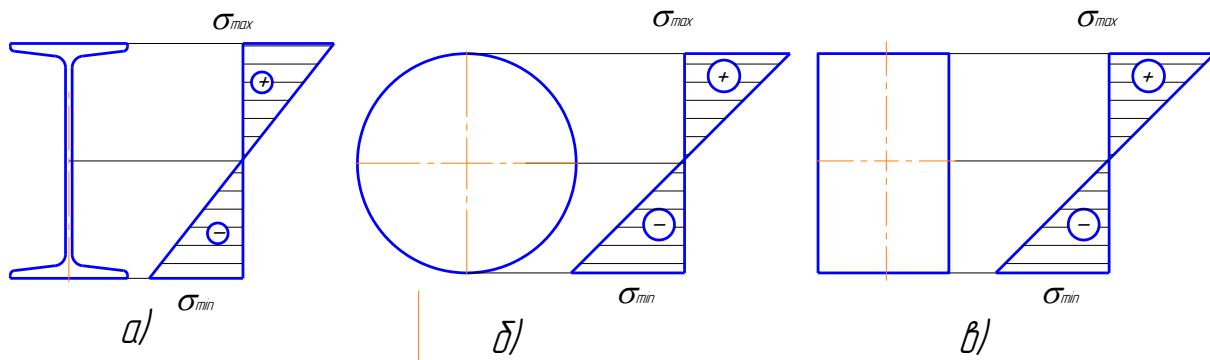


Рисунок 4.15 – Эпюры распределения нормальных напряжений по сечениям балки

Определим вес балки прямоугольного сечения:

$$P = b \cdot h \cdot \ell \cdot \rho = 95 \cdot 190 \cdot 10^{-6} \cdot 7,4 \cdot 78,5 = 10,48 \text{ кН.}$$

Определим вес балки из прокатного профиля двутавровой формы:

$$P = m \cdot \ell \cdot g,$$

где m – масса 1-го погонного метра, кг, $m = 42,2$ кг/1 м [1];

g – ускорение свободного падения, м/сек².

$$P = 42,2 \cdot 7,4 \cdot 9,81 = 3060 \text{ Н} = 3,06 \text{ кН.}$$

Выводы:

1) анализ эпюры изгибающих моментов показывает, что опасными будет сечения балки в точке C , так как здесь $|M_{\max}| = 57,3$ кНм;

2) подобранные размеры поперечного сечения балок обеспечивают надежную работу, так как напряжения в опасном сечении не превышают допустимой величины $\sigma_{\max} < [\sigma]$, т. е. условие прочности выполняется;

3) наиболее рациональной является балка двутавровой формы, так как она менее металлоемкая.

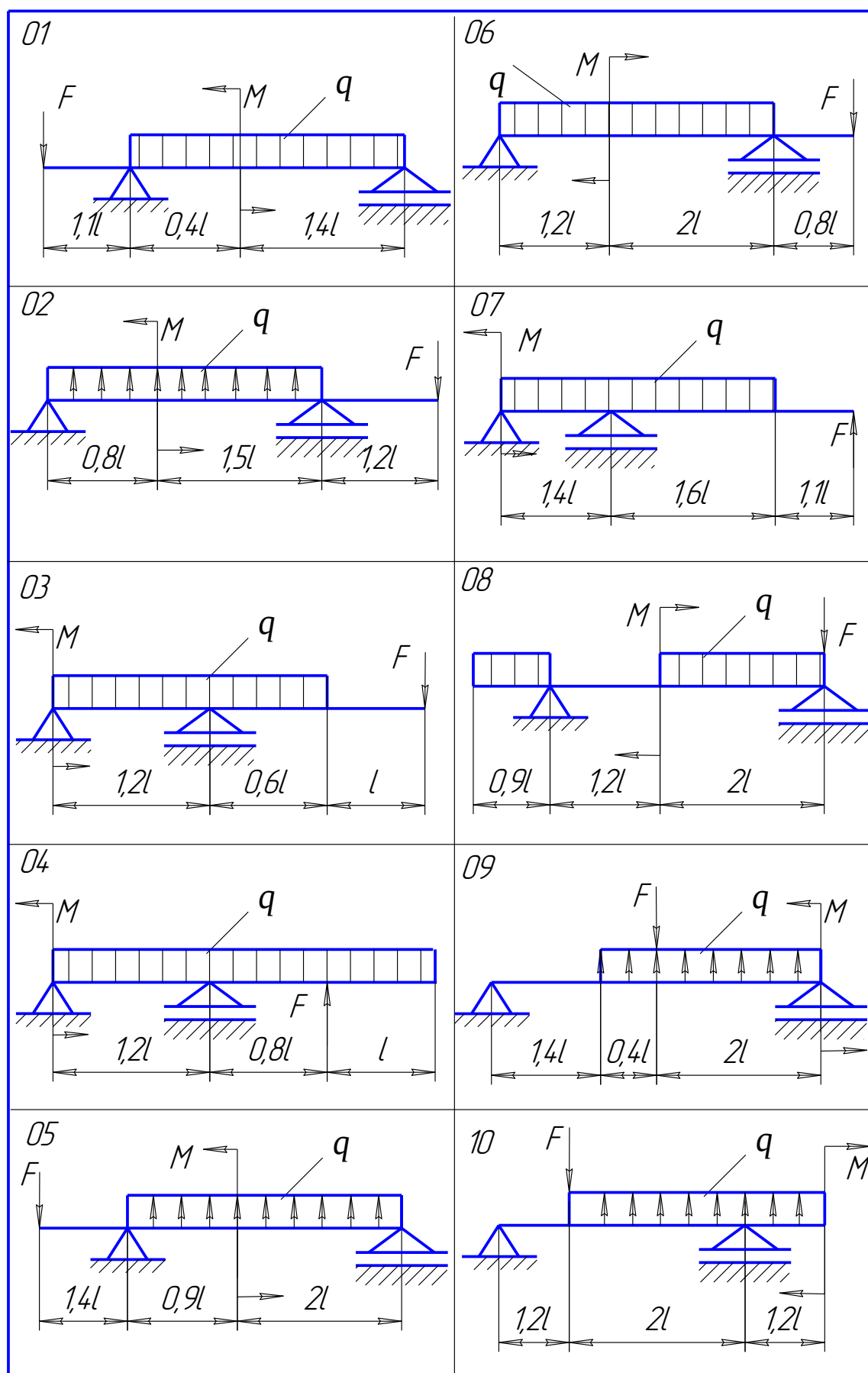


Рисунок 4.16 – Схема балки к задаче № 4

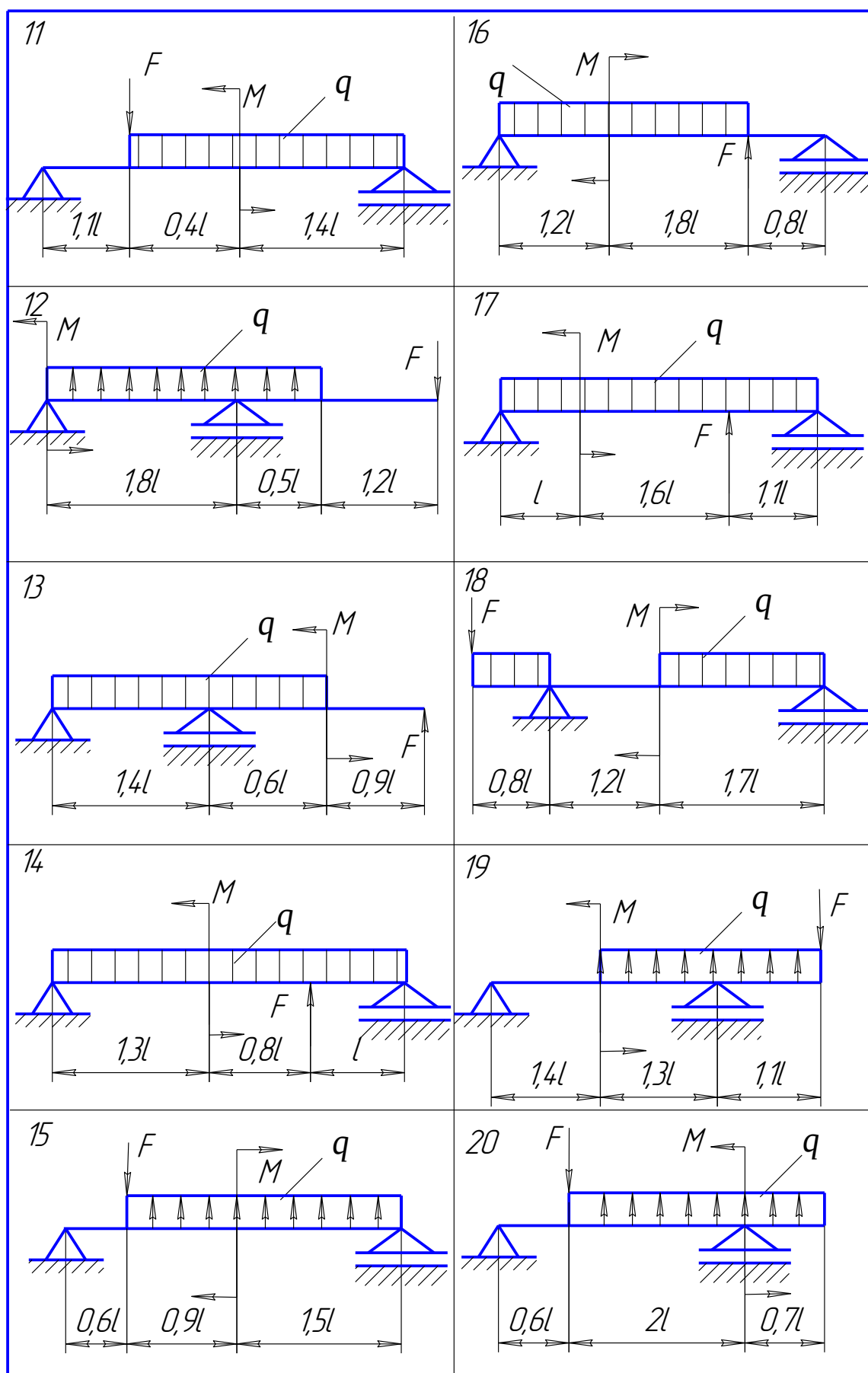


Рисунок 4.16 – Схема балки к задаче № 4 (продолжение)

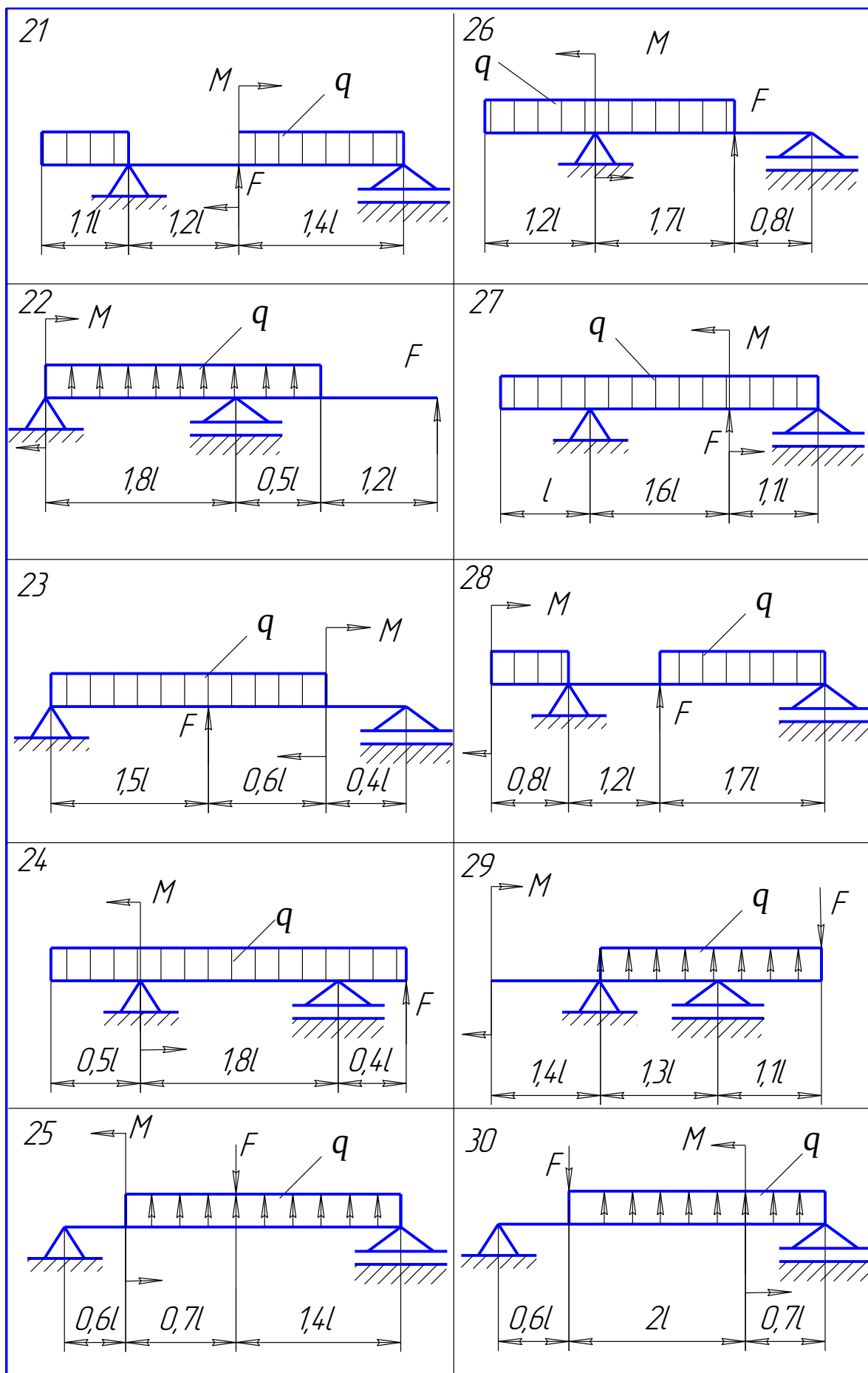


Рисунок 4.16 – Схема балки к задаче № 4 (окончание)

5 СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

5.1 Внецентренное растяжение (сжатие)

Внецентренное растяжение (сжатие) представляет собой случай изгиба с растяжением (сжатием), когда на брус действует сила параллельная оси бруса, но не проходящая через центр тяжести бруса.

Точка, в которой действует сила, называется полюсом силы.

Внешняя сила F приложена к колонне на некотором расстоянии от оси z . Координаты точки приложения силы F в системе главных центральных осей инерции x_F и y_F , а расстояние от точки приложения силы F до оси z $OA = e$ называется эксцентриситет (рисунок 5.1).

Определение: эксцентриситет – это расстояние от точки приложения силы до центра тяжести поперечного сечения.

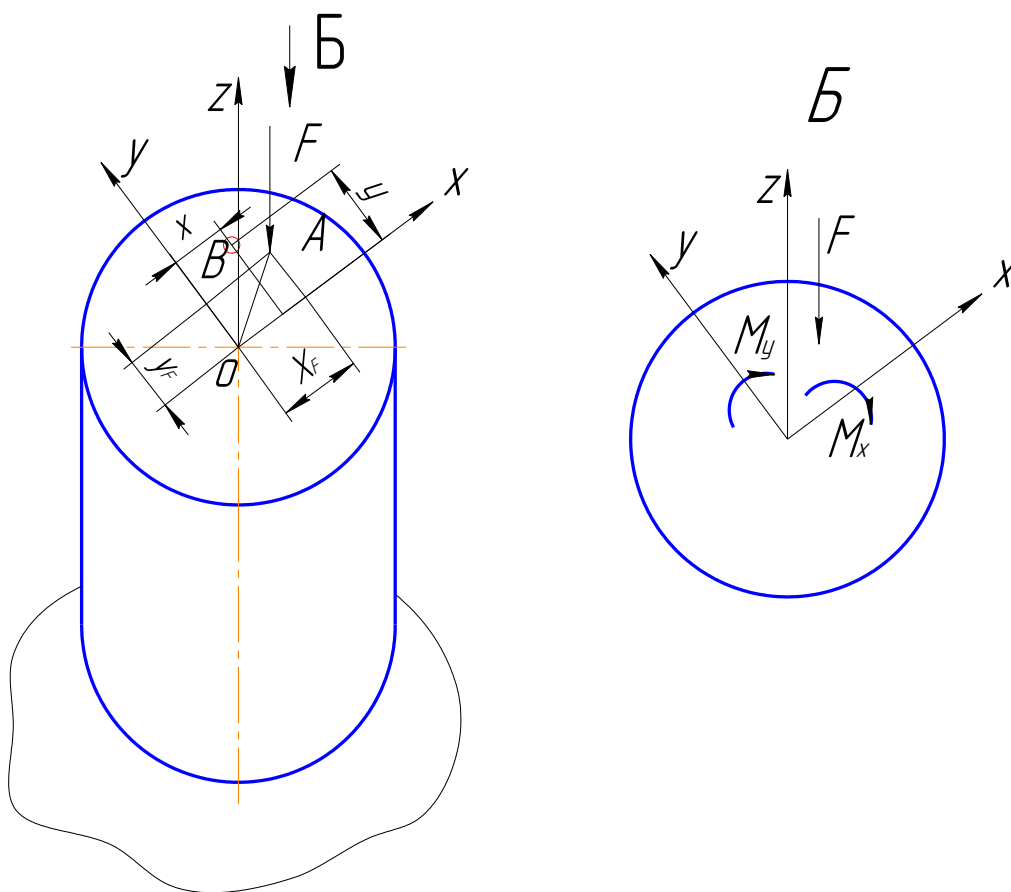


Рисунок 5.1 – Внецентренное сжатие

В поперечном сечении колонны будут действовать продольная сила $N = -F$ и изгибающие моменты относительно главных центральных осей: $M_y = F x_F$; $M_x = F y_F$.

Полное напряжение в точке **В** с координатами **x** и **y** определится как алгебраическая сумма.

$$\sigma = -\left(\frac{F}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x\right) = -\left(\frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F y}{I_x} + \frac{F \cdot x_F x}{I_y}\right) \quad (5.1)$$

Формула для определения напряжений в любой точке поперечного сечения.

Данное выражение может быть записано в следующем виде

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{A \cdot y_F y}{I_x} + \frac{A \cdot x_F x}{I_y}\right) = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2}\right), \quad (5.2)$$

где $i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$, (м) и $i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ (м) – радиусы инерции.

Формула для определения напряжений в любой точке поперечного сечения.

При использовании формул 5.1 и 5.2 следует соблюдать следующие правила:

1. Главные центральные оси направляют таким образом, чтобы сила, вызывающая внецентренное растяжение (сжатие), лежала в первой четверти (квадранте);
2. В формулу ставится знак «минус», если внешняя сила сжимает брус сжатие и «плюс», если – растягивает;
3. Координаты «**x**» и «**y**» берутся со своими знаками.

Для нахождения опасных точек с наибольшими напряжениями, необходимо определить положение нейтральной линии (оси).

Обозначив координаты нейтральной оси через x_0 и y_0 и подставив их в выражение 5.2, приравняв его к нулю на основании того, что напряжения на нейтральной оси равны нулю, получили уравнение нейтральной линии

$$\frac{y_F y_0}{i_x^2} + \frac{x_F x_0}{i_y^2} = -1, \quad (5.3)$$

При $y_0 = 0$ и $x_0 = 0$ отрезки x_0 и y_0 определяются по формулам

$$x_0 = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad y_0 = -\frac{i_x^2}{y_F}. \quad (5.4)$$

Из представленного рисунка следует, что максимальные и минимальные напряжения возникают в точках **В** и **С** (рисунок 5.2).

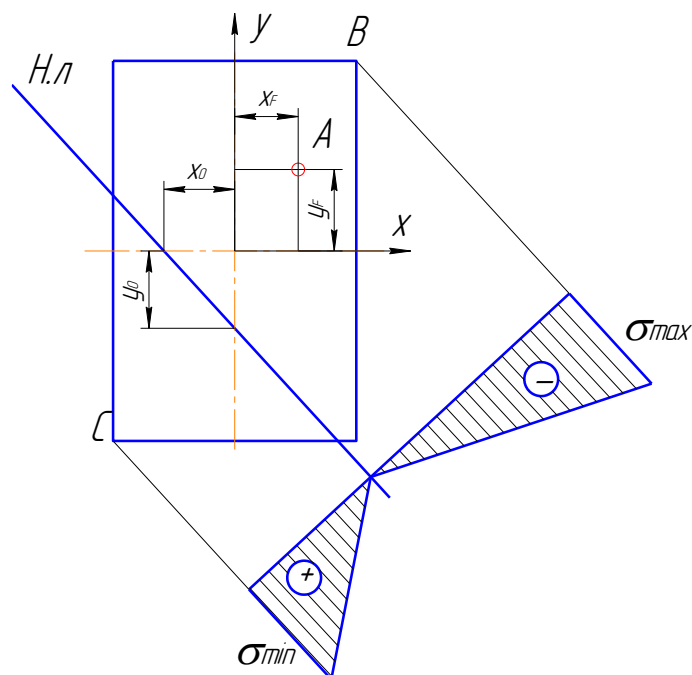


Рисунок 5.2 – Положение нейтральной оси

Напряжения в этих точках определяются следующим выражением, и они не должны превышать допускаемых значений (условие прочности при внецентренном растяжении (сжатии)):

$$\sigma_{B,C} = \pm \frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_F y}{i_x^2} + \frac{x_F x}{i_y^2} \right) \leq [\sigma]. \quad (5.5)$$

Для простых форм поперечного сечения используют следующую формулу:

$$\sigma_{max} = \pm \left(\frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F}{W_x} + \frac{F \cdot x_F}{W_y} \right) \leq [\sigma]. \quad (5.6)$$

Нейтральная ось и точка приложения внешней силы находятся по разные стороны от центра тяжести поперечного сечения.

Определение. Ядром сечения называется область вокруг центра тяжести, что при приложении в которую внешней силы, в поперечном сечении возникают напряжения одного знака.

Определим положение ядра сечения у бруса прямоугольной формы с сторонами **b** и **h**. Для этого воспользуемся формулами (5.4).

Осевые моменты инерции прямоугольника определяться по формулам:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}; \quad I_y = \frac{h \cdot b^3}{12}.$$

Нейтральная ось должна находиться за пределами сечения и тогда из рисунка следует, что $x_0 = \frac{b}{2}$ и $y_0 = \frac{h}{2}$, тогда координаты приложения силы x_F и y_F определятся следующим образом

$$y_F = -\frac{b \cdot h^3 \cdot 2}{12b \cdot h \cdot h} = -\frac{h}{6}; \quad x_F = -\frac{h \cdot b^3 \cdot 2}{12b \cdot h \cdot b} = -\frac{b}{6}.$$

С приближением точки приложения силы к центру тяжести поперечного сечения нейтральная ось удаляется от него и наоборот.

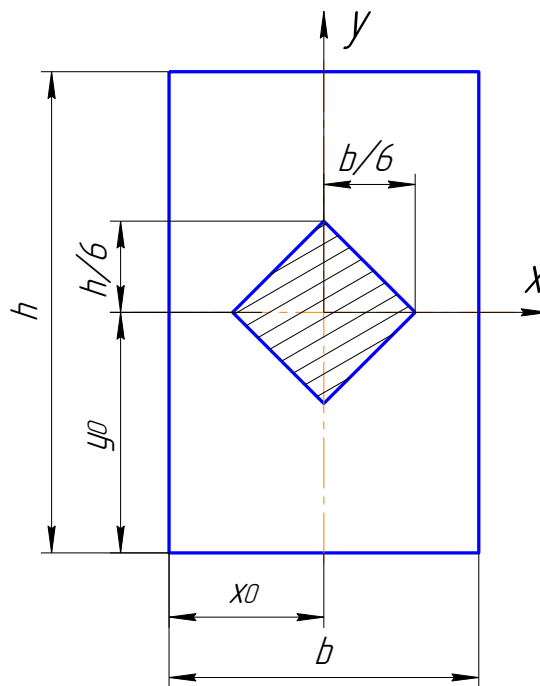


Рисунок 5.3 – Ядро сечения

Эпюры распределения нормальных напряжений по прямоугольному сечению при различных значениях эксцентриситета представлены на рисунке 5.4.

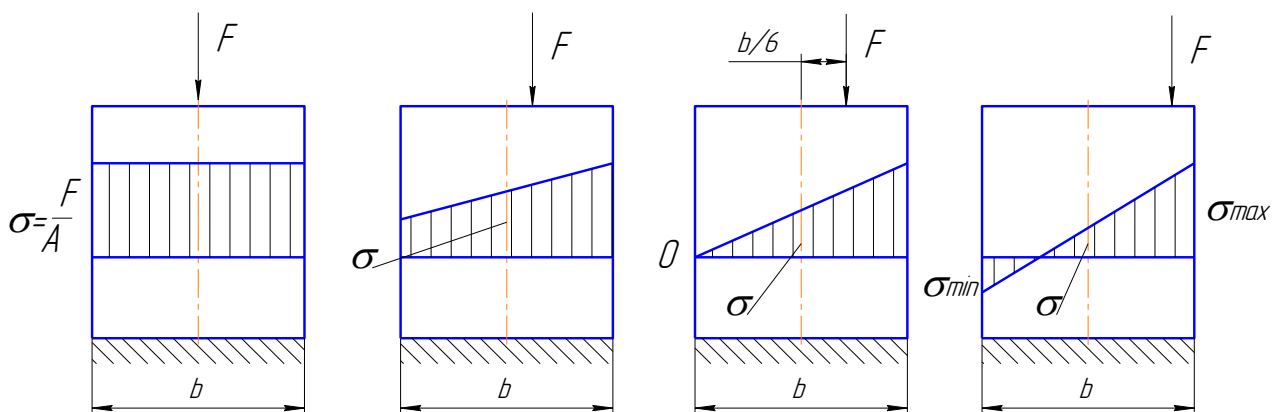


Рисунок 5.4 – Эпюры напряжений

5.2 Косой изгиб

Косым изгибом бруса называется такой случай изгиба, при котором силовая плоскость проходит через центр тяжести поперечного сечения бруса, но не совпадает ни с одной из его главных осей инерции, силовая плоскость и плоскость изгиба при косом изгибе не совпадают (рисунок 5.5).

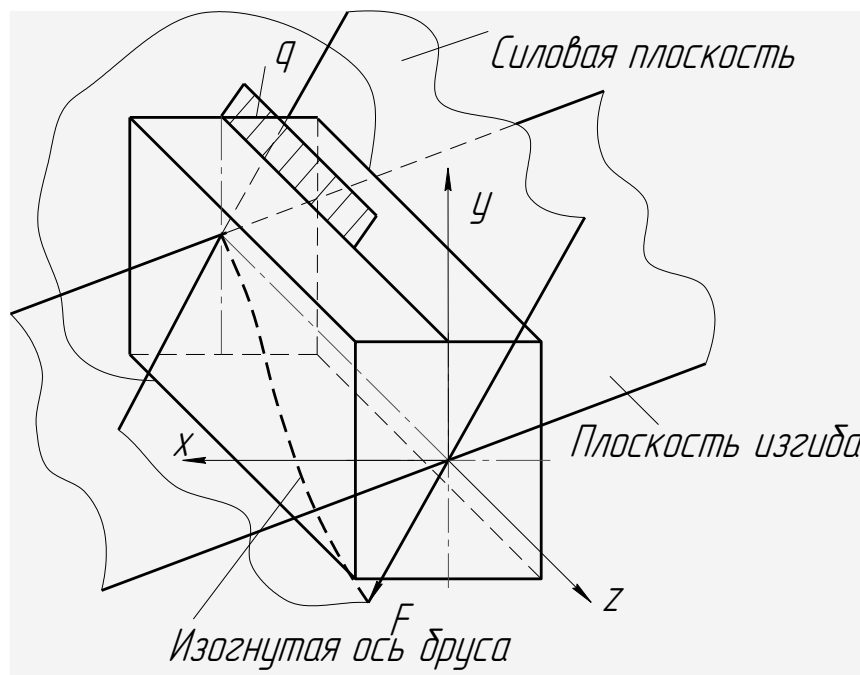


Рисунок 5.5 – Косой изгиб

При косом изгибе нагрузки могут располагаться как в одной, так и в разных плоскостях.

Если при косом изгибе нагрузки лежат в одной плоскости (рисунок 5.5), изгиб называется плоским косым изгибом. Изогнутая ось балки при этом будет плоской кривой.

Если при косом изгибе нагрузки не лежат в одной плоскости, изгиб называется пространственным косым изгибом (рисунок 5.6). Изогнутая ось бруса при этом будет пространственной кривой. Силовые плоскости при косом пространственном изгибе могут совпадать и не совпадать с главными осями инерции поперечного сечения балки.

Для расчета при косом изгибе нагрузки раскладывают по главным осям инерции поперечного сечения, что приводит к двум поперечным изгибам относительно главных осей инерции (рисунок 5.7, а, б).

Возникающие напряжения и деформации при косом изгибе определяют по принципу независимости действия сил, то есть:

$$\sigma = \pm \sigma_x \pm \sigma_y; \quad y = \sqrt{y_x^2 + y_y^2}.$$

Нормальные напряжения σ и прогиб определяют по формулам плоского изгиба. Возникающие касательные напряжения в сравнении с нормальными незначительны и поэтому в расчет не принимаются.

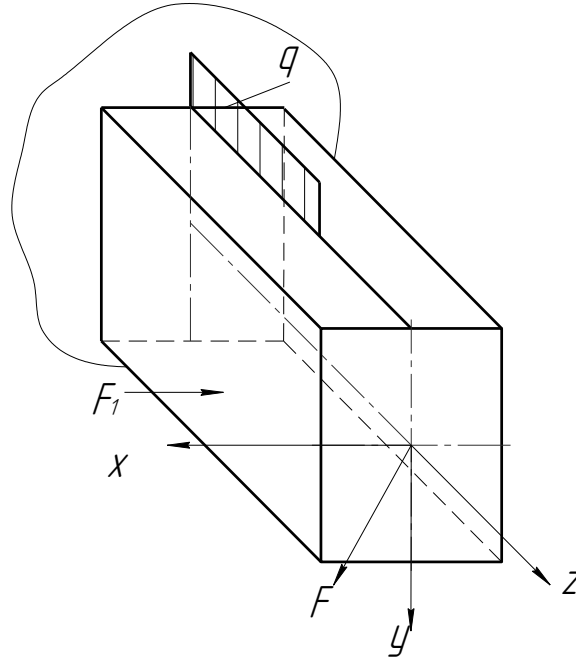


Рисунок 5.6 – Схема действия сил

Условие прочности при косом изгибе имеет вид

$$\sigma_{max} = \pm \sigma_x \pm \sigma_y \leq [\sigma] \text{ или } \sigma_{max} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma],$$

где M_x , M_y – изгибающий момент в вертикальной и горизонтальной плоскостях;

W_x , W_y – моменты сопротивления сечения относительно осей x и y .

Для того, чтобы найти опасную точку поперечного сечения, надо определить положение нулевой линии. Положение нейтральной линии определяется углом β (рисунок 5.7) из формулы [2]

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{I_x}{I_y} \operatorname{tg} \varphi_0,$$

где φ_0 – угол, определяющий положение силовой плоскости в данном поперечном сечении. Величину угла φ определяют из формулы [2]

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{M_y}{M_x}.$$

При определении положения нулевой линии надо помнить, что:

1. Если силовая плоскость проходит через четные квадранты, то нулевая линия – через нечетные и наоборот;

2. Углы φ_0 и β откладывают от различных осей и имеют они одинаковый знак.

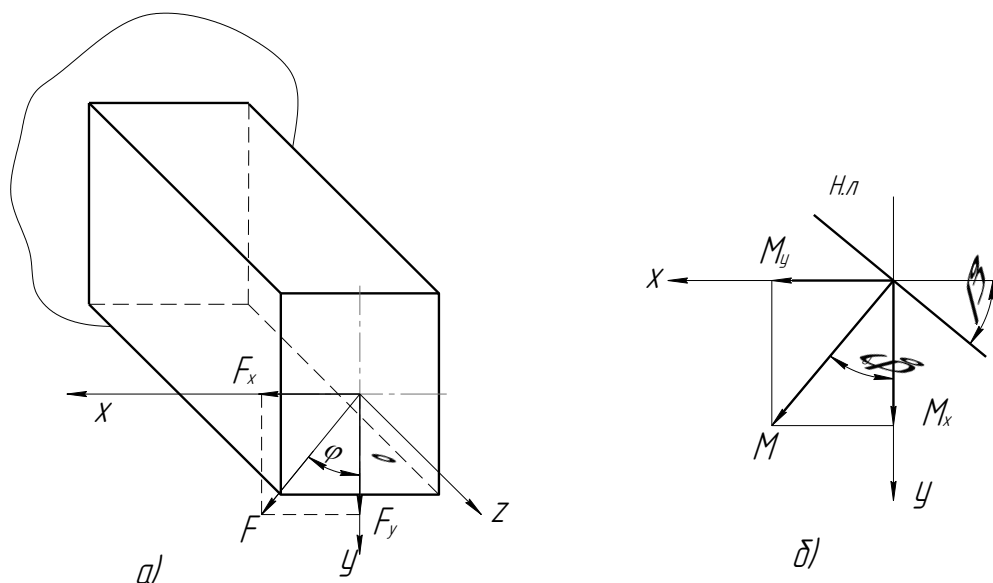


Рисунок 5.7 – Косой изгиб и нейтральная линия

Наибольшие нормальные напряжения в поперечном сечении возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. Положение их определяется касательными, проведенными к сечению параллельно нейтральной линии (рисунок 5.8).

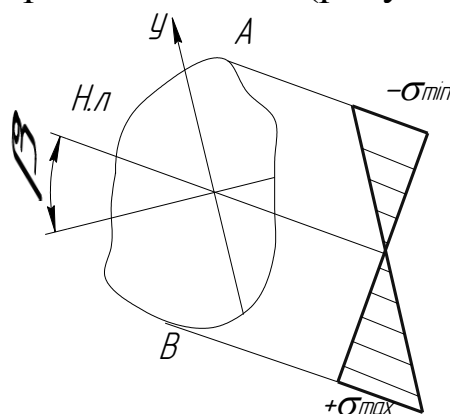


Рисунок 5.8 – Нормальные напряжения при косом изгибе

Для определения величины и направления изгибающих моментов M_x и M_y строят эпюры моментов от сил, действующих в главных плоскостях инерции.

Задача

К консольному брусу длиной l приложена сила F , под углом φ , а на расстоянии l_1 момент M ; сечение бруса прямоугольное.

Определить наибольшее напряжение, размеры поперечного сечения, положение нейтральной линии.

Пример расчета

Дано:

сосредоточенная сила

$$F = 10 \text{ кН};$$

угол

$$\varphi = 30^\circ;$$

внешний изгибающий момент

$$M = 20 \text{ кНм};$$

допускаемое напряжение

$$[\sigma] = 8 \text{ Мпа};$$

коэффициент запаса прочности

$$n = 1,5;$$

$$h : b = 2,0; l = 1 \text{ м}; l_1 = 0,4.$$

Решение

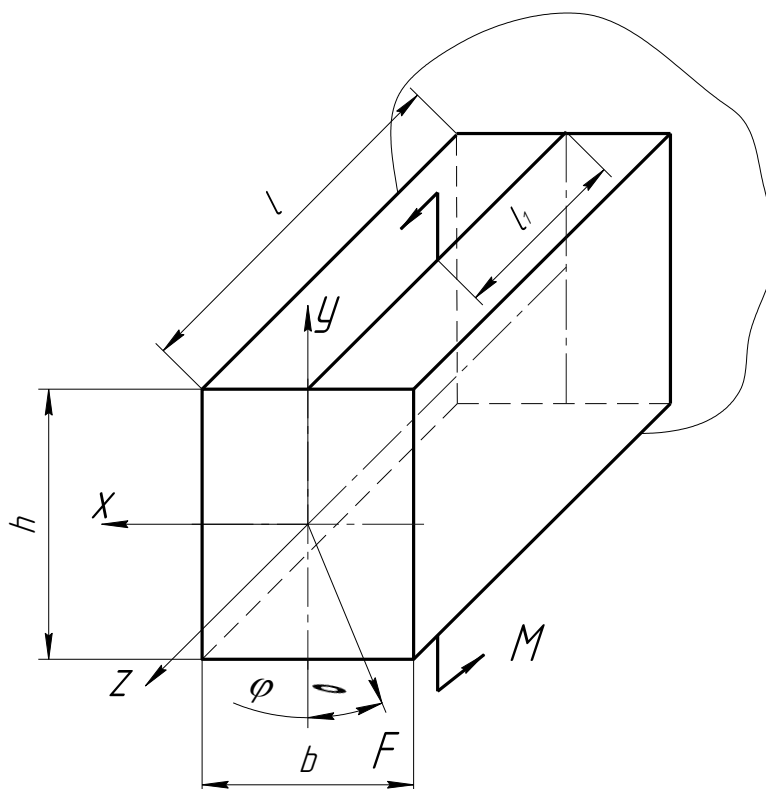


Рисунок 5.9 – Расчетная схема

Решение

1. Разложим силу F по осям координат (рисунок 5.10) и найдем ее составляющие:

$$F_y = F \cdot \cos 30^\circ = 10 \cdot 0,866 = 8,66 \text{ кН};$$

$$F_x = F \cdot \sin 30^\circ = 10 \cdot 0,5 = 5 \text{ кН}.$$

2. Определим изгибающие моменты в вертикальной и горизонтальной плоскостях балки и построим эпюры изгибающих моментов:

а) вертикальная плоскость (рисунок 5.11).

$$M_C = -F_y \cdot 0,6 = -8,66 \cdot 0,6 = -5,2 \text{ кНм (слева от сечения)};$$

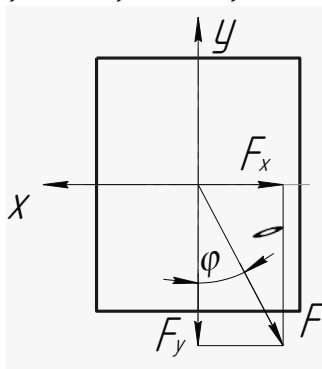


Рисунок 5.10 – Разложение сил по плоскостям

$$M_C = -F_y \cdot 0,6 - M = -5,2 - 20 = -25,2 \text{ кНм (справа от сечения)};$$

$$M_B = -F_y \cdot AB - M = -8,66 \cdot 1 - 20 = -28,66 \text{ кНм (справа от сечения)};$$

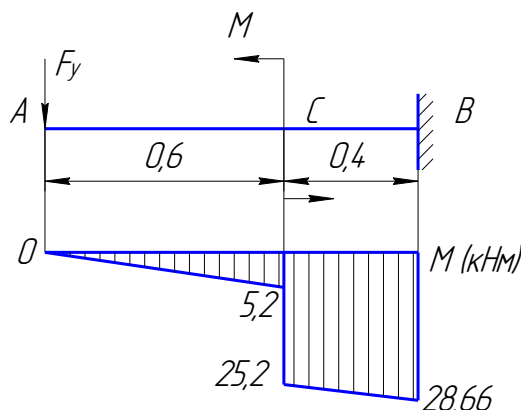


Рисунок 5.11 – Эпюра изгибающих моментов вертикальной плоскости

б) горизонтальная плоскость (рисунок 5.12).

$$M_A = -F_x \cdot 0 = -5 \cdot 0 = -0 \text{ кНм};$$

$$M_B = -F_x \cdot AB = -5 \cdot 1 = -5 \text{ кНм (справа от сечения)}.$$

Рассматривая совместно эпюры M_x и M_y , устанавливаем, что опасным является сечение B с изгибающими моментами:

$$M_x = 28,66 \text{ кНм и } M_y = 3 \text{ кНм}.$$

3. Определим размеры поперечного сечения балки из условия прочности [3]

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma],$$

где $W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b(2b)^2}{6} = 0,67b^3$; $W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{b^2 \cdot 2b}{6} = 0,33b^3$.

Подставляя значения изгибающих моментов и моментов сопротивления в уравнение прочности и, решая его относительно (b), получим:

при $[\sigma] = 8 \text{ МПа}$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{28,66 \cdot 10^3}{0,67 \cdot (8 \cdot 10^6)} + \frac{3 \cdot 10^3}{0,33 \cdot (8 \cdot 10^6)}} \approx 0,19 \text{ м.}$$

$$b = 0,19 \text{ м} = 190 \text{ мм}; \quad h = 0,38 \text{ м} = 380 \text{ мм.}$$

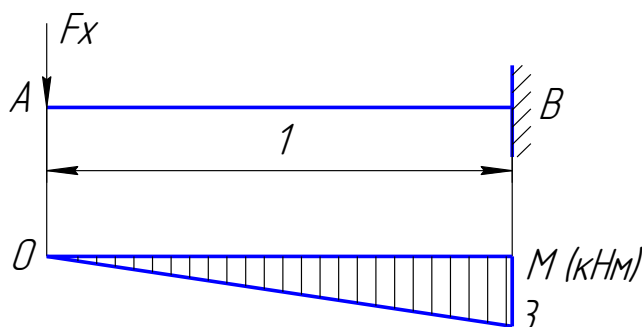


Рисунок 5.12 – Эпюра изгибающих моментов горизонтальной плоскости

4. Определим положение нулевой линии (рисунок 5.13):

а) найдем угол φ_0 , определяющий положение силовой плоскости

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{M_y}{M_x} = \frac{3}{28,66} = 0,11, \quad \varphi_0 = 5^\circ 50';$$

б) определим осевые моменты инерции поперечного сечения

$$I_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,19 \cdot 0,38^3}{12} = 0,00087 \text{ м}^4$$

$$I_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{0,38 \cdot 0,19^3}{12} = 0,00022 \text{ м}^4.$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \varphi_0 \frac{I_y}{I_x} = 0,11 \frac{0,00087}{0,00022} = 0,435; \quad \beta = 23^\circ 38'.$$

5. Определим нормальные напряжения в точках 1, 2, 3, 4 опасного сечения и построим эпюры напряжений (рисунок 5.14).

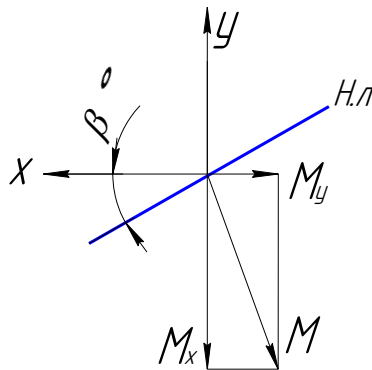


Рисунок 5.13– Эпюра изгибающих моментов горизонтальной

Максимальные нормальные напряжения в общем случае определяются по формуле

$$\sigma_x = \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \text{ или } \sigma_x = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} = \pm \sigma_x \pm \sigma_y.$$

В нашем случае

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{0,19 \cdot 0,38^2}{6} = 0,0046 \text{ м}^3; W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{0,38 \cdot 0,19^2}{6} = 0,0023 \text{ м}^3.$$

$$\sigma_x = \frac{28,66 \cdot 10^3}{0,0046} = 6,23 \text{ МПа}; \sigma_y = \frac{3 \cdot 10^3}{0,0023} = 1,3 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$\sigma_1 = \sigma_x + \sigma_y = 6,23 + 1,3 = 7,53 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = \sigma_x - \sigma_y = 6,23 - 1,3 = 4,93 \text{ МПа}$$

$$\sigma_3 = -\sigma_x - \sigma_y = -6,23 - 1,3 = -7,53 \text{ МПа}$$

$$\sigma_4 = -\sigma_x + \sigma_y = -6,23 + 1,3 = -4,93 \text{ МПа}.$$

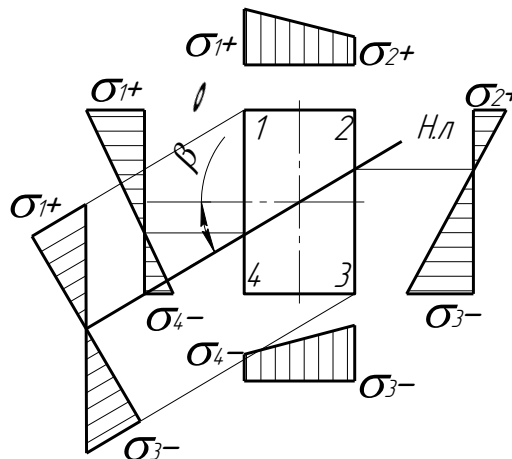


Рисунок 5.14– Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении

5.3 Изгиб с кручением

Силы, действующие на валы в зубчатых и ременных передачах, приводят к появлению нормальных и касательных напряжений в поперечных сечениях вала.

При расчете на совместное действие изгиба и кручения, как правило, учитывают нормальные напряжения от действия изгибающего момента и касательные напряжения от действия крутящего момента. Касательными напряжениями от поперечной силы при расчетах валов обычно пренебрегают из-за малости этих напряжений по сравнению с касательными напряжениями от кручения.

Наибольшие напряжения от кручения и изгиба возникают на поверхности вала. Каждое из этих напряжений, взятое в отдельности, может быть меньше допускаемого напряжения, но одновременное их действие может оказаться опасным для вала. При совместном действии кручения и изгиба определяют приведенное или эквивалентное напряжение, используя для пластичных материалов третью и четвертую теории прочности, а для хрупких – теорию прочности Мора.

Если внешние силы, действующие на вал, не лежат в одной плоскости, то каждую из них раскладывают на составляющие: вертикальную и горизонтальную. Чтобы установить опасные сечения, строят эпюры крутящих моментов T_k и изгибающих моментов в двух плоскостях – вертикальной M_v и горизонтальной M_h .

Далее строят эпюры результирующего изгибающего момента M_Σ [2]:

$$M_\Sigma = \sqrt{M_v^2 + M_h^2}.$$

В общем случае эпюра M_Σ криволинейна, и только если эпюры M_v и M_h пересекают нулевую линию на одной вертикали, то на этом участке эпюра M прямолинейна (обычно на крайних участках вала). Если непосредственно по эпюрам T_k и M_Σ нельзя достоверно установить опасное сечение, приходится проверять прочность вала в нескольких сечениях.

Проверка прочности производится по расчетному моменту, величина которого зависит от используемой теории прочности:

– по третьей теории прочности [1, 2]

$$M_{III} = \sqrt{M_\Sigma^2 + T_k^2}$$

и условие прочности $\frac{M_{III}}{W_x} \leq [\sigma]_p$,

где $[\sigma]_p$ допускаемое напряжение при растяжении;

– по четвертой теории прочности

$$M_{IV} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + 0,75 \cdot T_{\kappa}^2}, \quad \frac{M_{IV}}{W_x} \leq [\sigma]_p;$$

– по теории прочности Мора [1, 2]

$$M_M = \frac{1-k}{2} M_{\Sigma} + \frac{1+k}{2} \sqrt{M_{\Sigma}^2 + T_{\kappa}^2},$$

где $k = \frac{[\sigma]_p}{[\sigma]_{сж}}$ и $\frac{M_M}{W_x} \leq [\sigma]_p$.

Здесь k – коэффициент, учитывающий разную способность хрупких материалов сопротивляться растяжению и сжатию;

$[\sigma]_{сж}$ – допускаемое напряжение при сжатии.

Во всех формулах W_x – момент сопротивления вала на изгиб.

Если производится подбор сечения, то, на основании выше-приведенных формул:

$$W_x \geq \frac{M_{III}}{[\sigma]_p} \text{ – по третьей теории прочности;}$$

$$W_x \geq \frac{M_{IV}}{[\sigma]_p} \text{ – по четвертой теории прочности;}$$

$$W_x \geq \frac{M_M}{[\sigma]_p} \text{ – по теории прочности Мора.}$$

Задача № 5

Шкив с диаметром D_1 и с углом наклона ремня к горизонту α_1 делает n оборотов в минуту и передает N киловатт мощности. Два других шкива имеют одинаковый диаметр D_2 и одинаковые углы α_2 наклона ветвей ремня к горизонту P , и каждый из них передает мощность – $P/2$ (рисунок 5.15).

Требуется:

1) по заданным величинам P и n определить моменты, приложенные к шкивам;

2) построить эпюру крутящих моментов $T_{кр}$;

3) определить окружные усилия s_2 и s_2 , действующие на шкивы, по найденным моментам и заданным диаметрам шкивов D_1 и D_2 ;

4) определить давление на вал, принимая их равными трем окружным усилиям;

5) определить силы, изгибающие вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях (вес шкивов и вала не учитывать);

6) построить эпюры изгибающих моментов от горизонтальных сил M_{Γ} и от вертикальных сил $M_{\text{в}}$;

7) построить эпюру суммарных изгибающих моментов, пользуясь формулой

$$M_{\text{изг}} = \sqrt{M_{\text{гор}}^2 + M_{\text{верт}}^2}$$

(для каждого поперечного сечения вала имеется своя плоскость действия суммарного изгибающего момента, но для круглого сечения можно совместить плоскость M_{Σ} для всех поперечных сечений и построить суммарную эпюру в плоскости чертежа; при построении эпюры надо учесть, что для некоторых участков вала она не будет прямолинейной);

8) при помощи эпюр $T_{\text{кр}}$ и M_{Σ} найти опасное сечение и определить величину максимального расчетного момента (по третьей теории прочности);

9) подобрать диаметр вала d при и округлить его величину, согласно ГОСТ 6636-86.

Данные взять из таблицы 5.

Таблица 5 – Исходные данные к задаче № 5

Номер строки	N , кВт	n , об/мин	a , м	b , м	c , м	D_1 , м	D_2 , м	α_1 град	α_2 град	$[\sigma]$ МПа
1	10	100	1,1	1,1	1,1	1,1	0,3	10°	0°	70
2	14	200	1,2	1,2	1,2	1,2	0,5	0°	20°	65
3	20	300	1,3	1,3	1,3	1,3	0,6	30°	0°	50
4	22	400	0,4	1,4	1,4	0,4	0,2	0°	40°	55
5	18	500	0,5	1,5	1,5	0,5	0,3	50°	0°	40
6	25	600	0,6	0,6	0,6	0,6	0,2	0°	60°	60
7	30	700	0,7	0,7	0,7	0,7	0,2	45°	0°	80
8	28	800	0,8	0,8	0,8	0,8	0,3	0°	80°	45
9	16	900	0,9	0,9	0,9	0,9	0,4	35°	0°	75
10	18	1000	1,0	1,0	1,0	1,0	0,6	0°	25°	85

Пример расчета

Шкив диаметром $D_1 = 1$ м и углом наклона ремня к горизонту $\alpha_1 = 30^\circ$ делает $n = 700$ (мин⁻¹) оборотов и передает мощность $P = 7,36$ кВт. Два ведомых шкива диаметром $D_2 = 0,8$ м и углом

наклона ремня к горизонту $\alpha_2 = 60^\circ$ передают каждый мощность $P/2$ (кВт), $a = 0,5$ м; $b = 1$ м; $c = 0,5$ м (рисунок 5.15).

Решение

1. Определим вращающие моменты на шкивах с диаметром D_1 и D_2 :

$$T_1 = 9,545 \frac{P}{n} = 9,545 \frac{7,36}{700} = 100 \text{ Нм.}$$

Так как дополнительных условий нет, считаем, что вращающие моменты на ведомых шкивах одинаковы и равны

$$T_2 = \frac{T_1}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ Нм.}$$

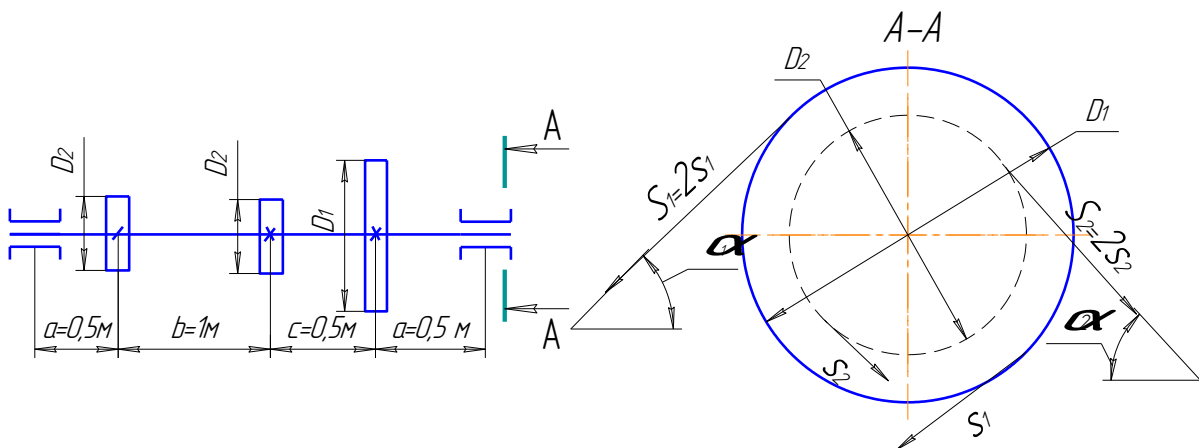


Рисунок 5.15 – Схема действия сил на вал

2. Изображаем расчетную схему для определения крутящих моментов (рисунок 5.17, а) и строим эпюру крутящих моментов.

Разбиваем вал на участки и определяем крутящие моменты:

$$T_{a-a} = -T_1 = -100 \text{ Нм.}$$

$$T_{b-b} = -T_1 + T_2 = -100 + 50 = -50 \text{ Нм.}$$

$$T_{c-c} = -T_1 + T_2 + T_2 = -100 + 50 + 50 = 0 \text{ Нм.}$$

3. Определяем окружные усилия, действующие на шкивы, по формуле

$$T = \frac{D}{2} S,$$

где S – окружное усилие ветви ремня, Н;

D – диаметр шкива, м.

Так как, согласно условию $S = 2s$, получаем:

$$s_1 = \frac{2T_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 100}{1} = 200 \text{ Н}$$

$$s_2 = \frac{2T_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 50}{0,8} = 125 \text{ Н.}$$

4. Определяем усилия (давления) на вал R_1 и R_2 , принимая их равными трем окружным усилиям (рисунок 5.16):

$$R_1 = S_1 + s_1 = 3s_1$$

$$R_2 = S_2 + s_2 = 3s_2.$$

5. Усилия (давления) действующие на вал R_1 и R_2 , направлены под углом к горизонтальной и вертикальной осям. Следовательно, необходимо рассмотреть действие усилий (давлений) в двух, горизонтальной и вертикальной, плоскостях.

Спроецируем результирующие R_1 и R_2 на горизонтальную ось и составим расчетную схему вала в горизонтальной плоскости

$$R_1^r = R_1 \cos \alpha_1 = 3 \cdot 200 \cdot 0,866 = 520 \text{ Н}$$

$$R_2^r = R_2 \cos \alpha_2 = 3 \cdot 125 \cdot 0,5 = 109 \text{ Н.}$$

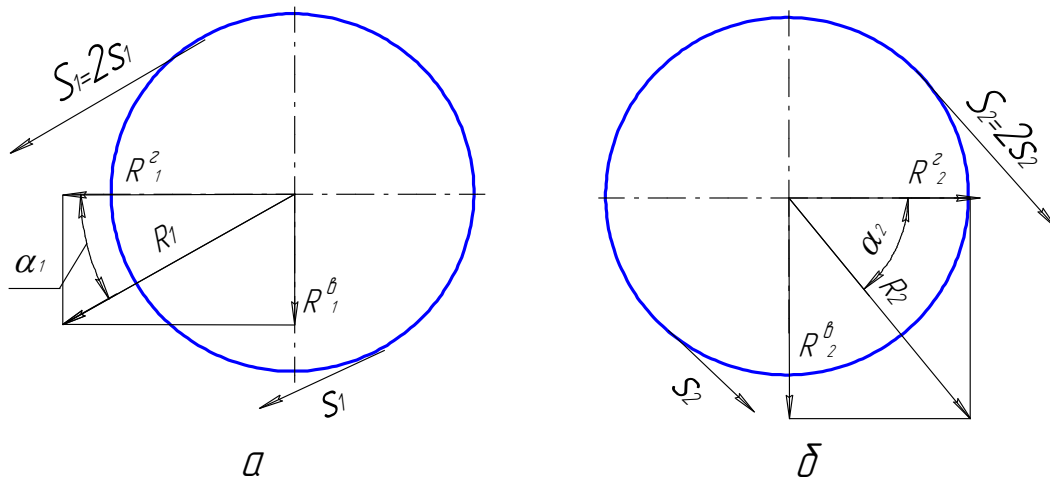


Рисунок 5.16 – Разложение результирующих сил R_1 и R_2 , действующих на вал в горизонтальной и вертикальной плоскостях

Спроецируем результирующие R_1 и R_2 на вертикальную ось и составим расчетную схему вала в вертикальной плоскости

$$R_1^b = R_1 \sin \alpha_1 = 3 \cdot 200 \cdot 0,5 = 300 \text{ Н}$$

$$R_2^b = R_2 \sin \alpha_2 = 3 \cdot 125 \cdot 0,866 = 325 \text{ Н.}$$

6. Составим уравнения статического равновесия и определим реакции опор от действия сил в горизонтальной плоскости (рисунок 5.17, б)

$$\sum m_A = 0 \quad R_L^r(2a + c + b) + R_1^r(c + b + a) - R_2^r(b + a) - R_2^r a = 0$$

$$R_L^r = \frac{-R_1^r(c+b+a) + R_2^r(b+a) + R_2^r a}{(2a+c+b)} =$$

$$= \frac{-520 \cdot (0,5 + 1 + 0,5) + 109 \cdot (1 + 0,5) + 109 \cdot 0,5}{(2 \cdot 0,5 + 0,5 + 1)} = -329 \quad \text{Н}.$$

$$\sum m_L = 0 \quad -R_A^r(2a+c+b) - R_1^r d + R_2^r(c+a) + R_2^r(b+c+a) = 0$$

$$R_A^r = \frac{-R_1^r a + R_2^r(c+a) + R_2^r(b+c+a)}{(2a+c+b)} =$$

$$= \frac{-520 \cdot 0,5 + 109(0,5 + 0,5) + 109(1 + 0,5 + 0,5)}{(2 \cdot 0,5 + 0,5 + 1)} = 27 \quad \text{Н}.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0$$

$$R_A^r + R_1^r + R_L^r - 2R_2^r = 0$$

$$27 + 520 - 329 - 2 \cdot 109 = 0.$$

Проведенная проверка показала, что реакции в опорах определены правильно.

7. Определяем изгибающие моменты в горизонтальной плоскости.

$$M_{x1}^r = R_L^r x_1; \quad 0 \leq x_1 \leq 0,5 \text{ м}.$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_L = -329 \cdot 0 = 0 \text{ Нм}$$

$$x_1 = 0,5 \quad M_D = -329 \cdot 0,5 = -164,5 \text{ Нм}.$$

$$M_{x2}^r = R_L^r(x_2 + a) + R_1^r x_2; \quad 0 \leq x_1 \leq 0,5 \text{ м}.$$

$$\text{При } x_2 = 0 \quad M_D = -329 \cdot (0,5 + 0) + 520 \cdot 0 = -164,5 \text{ Нм}$$

$$x_2 = 0,5 \quad M_C = -329 \cdot (0,5 + 0,5) + 520 \cdot 0,5 = -69 \text{ Нм}.$$

$$M_{x3}^r = R_A^r x_3; \quad 0 \leq x_1 \leq 0,5 \text{ м}.$$

$$\text{При } x_3 = 0 \quad M_A = 27 \cdot 0 = 0 \text{ Нм}$$

$$x_3 = 0,5 \quad M_B = 27 \cdot 0,5 = 13,5 \text{ Нм}.$$

$$M_{x4}^r = R_A^r(x_4 + a) - R_2^r x_4; \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м}.$$

$$\text{При } x_4 = 0 \quad M_B = 27 \cdot (0,5 + 0) - 109 \cdot 0 = 13,5 \text{ Нм};$$

$$x_4 = 1 \quad M_C = 27 \cdot (0,5 + 1) - 109 \cdot 1 = -69 \text{ Нм}.$$

По полученным данным строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости (рисунок 5.17, б).

8. Составим уравнения статического равновесия от действия сил в вертикальной плоскости (рисунок 5.17, в):

$$\sum m_A = 0; \quad -R_L^b(2a+c+b) + R_1^b(c+b+a) + R_2^b(b+a) + R_2^b a = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{откуда } R_L^B &= \frac{R_1^B(c+b+a) + R_2^B(b+a) + R_2^B a}{(2a+c+b)} = \\ &= \frac{300 \cdot (0,5+1+0,5) + 325 \cdot (1+0,5) + 325 \cdot 0,5}{(2 \cdot 0,5+0,5+0,5)} = 500 \text{ Н.} \end{aligned}$$

$$\sum m_L = 0 \quad R_A^B(2a+c+b) - R_1^B a - R_2^B(c+a) - R_2^B(b+c+a) = 0,$$

$$\begin{aligned} \text{откуда } R_A^B &= \frac{R_1^B a + R_2^B(c+a) + R_2^B(b+c+a)}{(2a+c+b)} = \\ &= \frac{300 \cdot 0,5 + 325 \cdot (0,5+0,5) + 325 \cdot (1+0,5+0,5)}{(2 \cdot 0,5+0,5+0,5)} = 450 \text{ Н.} \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum Y &= 0; \\ R_A^B - R_1^B + R_L^B - 2R_2^B &= 0; \\ 450 - 300 + 500 - 2 \cdot 325 &= 0. \end{aligned}$$

Проведенная проверка показала, что реакции в опорах определены правильно.

9. Определяем изгибающие моменты в вертикальной плоскости:

$$M_{x1}^B = R_L^B x_1; \quad 0 \leq x_1 \leq 0,5 \text{ м.}$$

$$\text{При } x_1 = 0 \quad M_L = 500 \cdot 0 = 0 \text{ Нм;}$$

$$x_1 = 0,5 \quad M_D = 500 \cdot 0,5 = 250 \text{ Нм.}$$

$$M_{x2}^B = R_L^B(x_2 + a) - R_1^B x_2; \quad 0 \leq x_1 \leq 0,5 \text{ м.}$$

$$\text{При } x_2 = 0 \quad M_D = 500 \cdot (0,5+0) + 300 \cdot 0 = 250 \text{ Нм;}$$

$$x_2 = 0,5 \quad M_C = 500 \cdot (0,5+0,5) - 300 \cdot 0,5 = 350 \text{ Нм.}$$

$$M_{x3}^B = R_A^B x_3; \quad 0 \leq x_1 \leq 0,5 \text{ м.}$$

$$\text{При } x_3 = 0 \quad M_A = 450 \cdot 0 = 0 \text{ Нм;}$$

$$x_3 = 0,5 \quad M_B = 450 \cdot 0,5 = 225 \text{ Нм.}$$

$$M_{x4}^B = R_A^B(x_4 + a) - R_2^B x_4; \quad 0 \leq x_1 \leq 1 \text{ м.}$$

$$\text{При } x_4 = 0 \quad M_B = 450 \cdot (0,5 + 0) - 325 \cdot 0 = 225 \text{ Нм}$$

$$x_4 = 1 \quad M_C = 450 \cdot (0,5 + 1) - 325 \cdot 1 = 350 \text{ Нм.}$$

По полученным данным строим эпюру изгибающих моментов в горизонтальной плоскости (рисунок 5.17, в).

10. Определяем значения суммарных изгибающих моментов в точках «А, В, С, D, L» от действия сил в вертикальной и горизонтальной плоскостях, по формуле

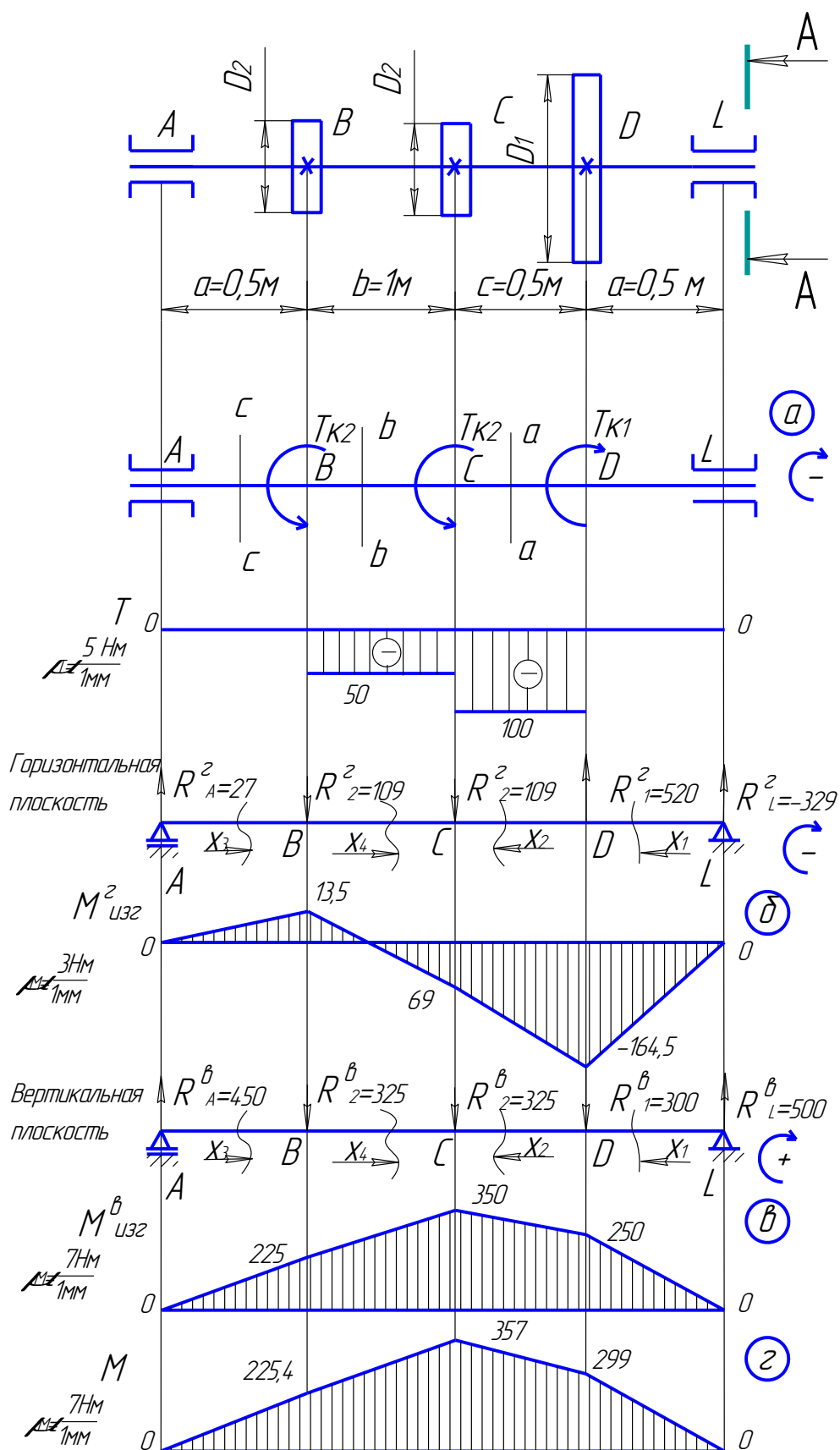


Рисунок 5.17 – Расчетная схема, эпюры крутящих и изгибающих моментов в горизонтальной и вертикальной плоскостях

$$M_{изг} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2}.$$

$$M_L^{изг} = 0 \text{ Нм}$$

$$M_D^{изг} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2} = \sqrt{(-164,5)^2 + 250^2} = 299 \text{ Нм}$$

$$M_C^{изг} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2} = \sqrt{(-69)^2 + 350^2} = 357 \text{ Нм}$$

$$M_B^{изг} = \sqrt{M_{гор}^2 + M_{верт}^2} = \sqrt{13,5^2 + 225^2} = 225,4 \text{ Нм}$$

$$M_A^{изг} = 0 \text{ Нм.}$$

Строим суммарную эпюру изгибающих моментов (рисунок 5.17, г).

Опасное сечение выбираем по наибольшему суммарному изгибающему моменту. Опасное сечение будет в точке С, где суммарный изгибающий момент равен $M = 367 \text{ Нм}$, а крутящий $T = 100 \text{ Нм}$.

11. Определяем расчетный момент в сечении С по третьей теории прочности

$$M_{III} = \sqrt{M_{\Sigma}^2 + T_{\kappa}^2} = \sqrt{357^2 + 100^2} = 371 \text{ Нм.}$$

12. Определяем необходимый диаметр вала, учитывая, что $[\sigma]_p = 70 \text{ МПа}$ и осевой момент сопротивления для круга

$$W_x = \frac{\pi d^3}{32},$$

где d – диаметр вала, м.

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{III}}{\pi \cdot [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 371}{\pi \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,0376 \text{ м.}$$

По ГОСТ 6636-86 принимаем диаметр вала $d = 40 \text{ мм}$.

$$W_x = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 4^3}{32} = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3.$$

Расчетные напряжения определяются

$$\sigma = \frac{M_{III}}{W_x} = \frac{371}{6,28 \cdot 10^{-6}} = 59,1 \cdot 10^6 \text{ Па} = 59,1 \text{ МПа.}$$

Выводы

Подобранный диаметр обеспечивает прочность вала при заданных нагрузках.

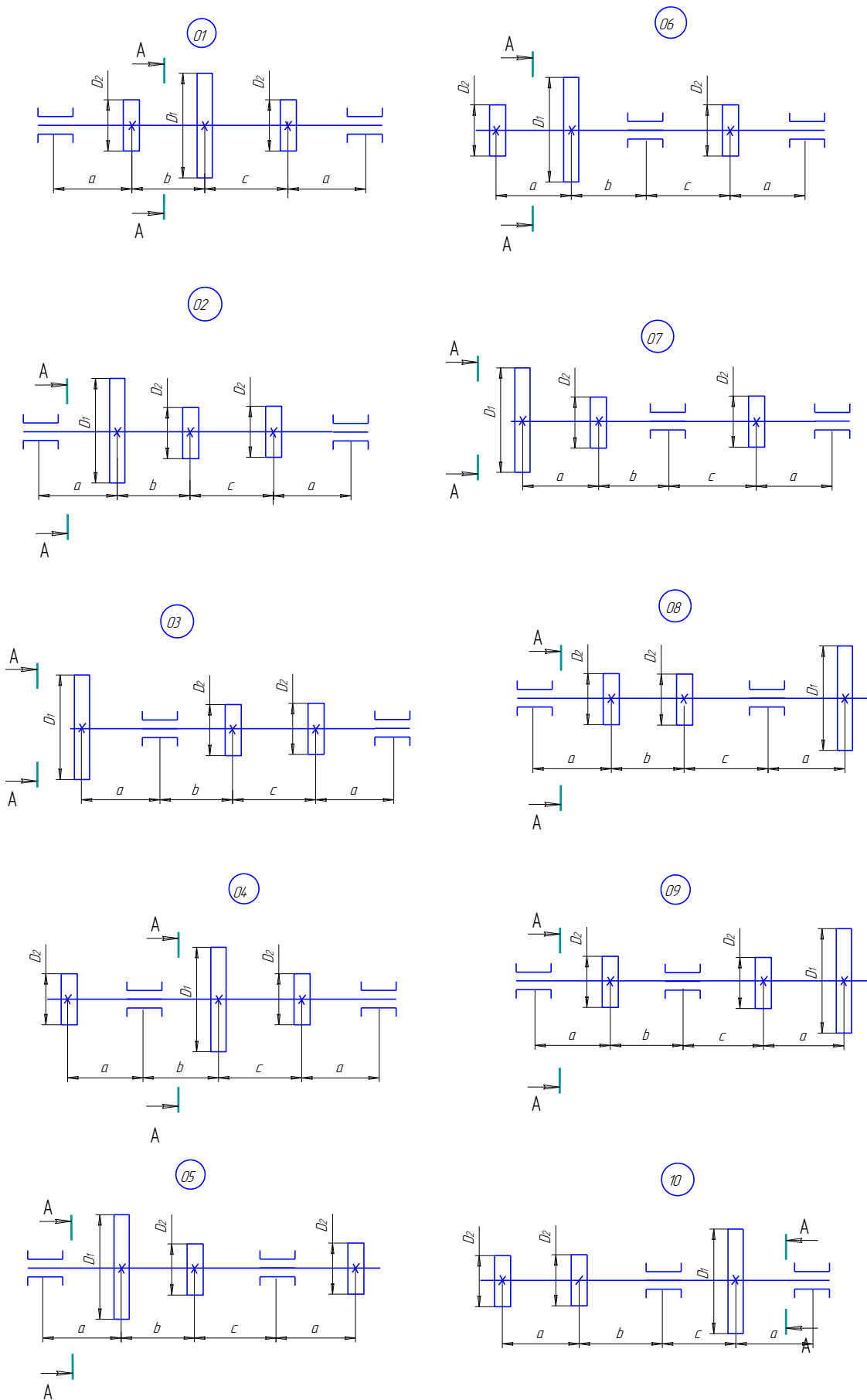


Рисунок 5.18 – Варианты схем к задаче № 5

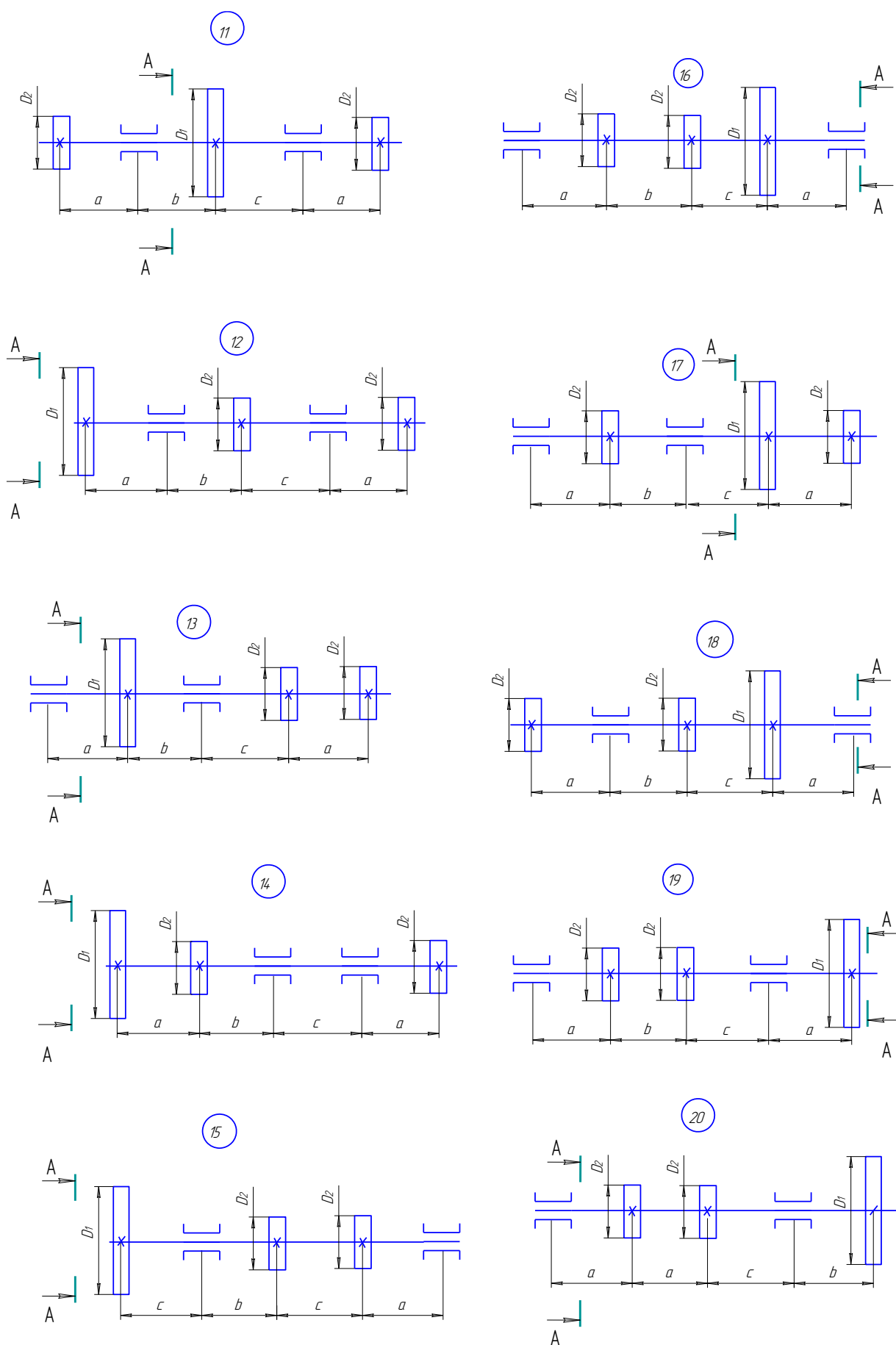


Рисунок 5.18 – Варианты схем к задаче № 5 (продолжение)

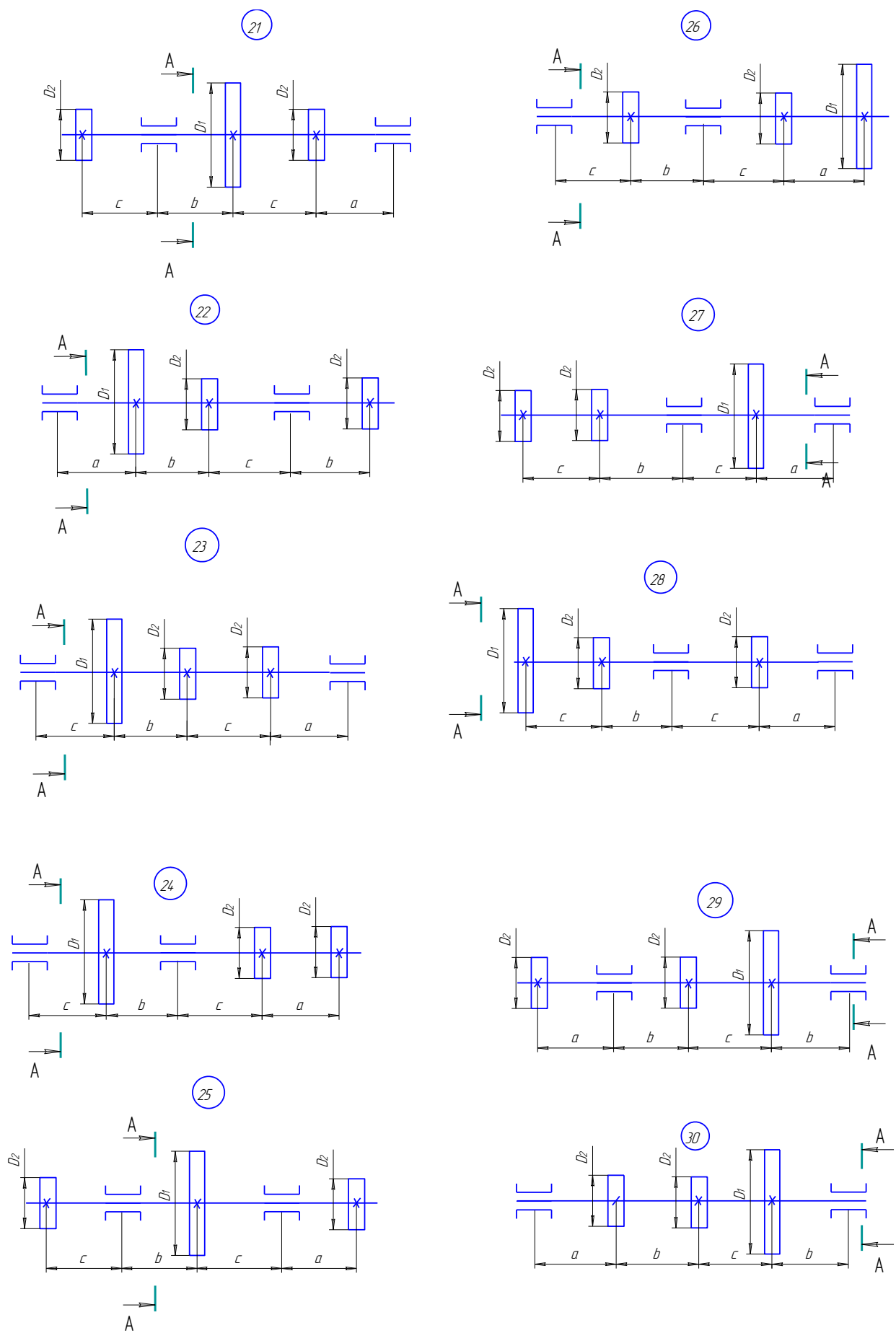


Рисунок 5.18 – Варианты схем к задаче № 5 (окончание)

6 ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ

6.1 Устойчивость сжатых стержней

Центрально сжатый достаточно длинный брус может при определенной величине силы утратить прямолинейную форму равновесия, т. е. изогнуться. Такой случай потери устойчивости прямолинейной формы равновесия называют продольным изгибом.

Предельное значение силы, при которой прямолинейная форма равновесия бруса становится неустойчивой, называется критической силой.

Достижение нагрузки критических значений весьма опасно, так как потеря устойчивости обычно происходит внезапно и при низких значениях напряжений, когда прочность конструкции при нормальной форме равновесия не вызывает сомнений. При потере устойчивости резко возрастают деформации, появляется изгибающий момент, который вызывает дополнительные напряжения, и конструкция может внезапно разрушиться.

Если продольный изгиб наступает при напряжениях меньших предела пропорциональности, то для определения критической силы можно использовать формулу Эйлера [1, 5]:

$$F_k = \frac{E \cdot I_{\min} \cdot \pi^2}{l_{\text{пр}}^2},$$

где $l_{\text{пр}} = \mu \cdot l$ – приведенная длина бруса, м;

l – длина бруса, м;

μ – коэффициент приведения длины, зависящей от условий закрепления бруса;

$I_{\min}$ – наименьший момент инерции поперечного сечения бруса, м⁴;

E – модуль упругости первого рода, МПа.

Критическое напряжение равно [1, 2]

$$\sigma_k = \frac{F_{\text{кр}}}{A_{\text{бр}}} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2},$$

где $A_{\text{бр}}$ – площадь поперечного сечения без учета местных ослаблений (площадь брутто), м²;

λ – гибкость бруса.

Условие устойчивости заключается в требовании, чтобы сжимающая брус сила в n_y раз меньше $F_{\text{кр}}$:

$$F \leq \frac{F_{кр}}{n_y}.$$

Коэффициент запаса на устойчивость n_y всегда принимается несколько большим, чем коэффициент запаса на простое сжатие и лежит в пределах $1,8 \dots 3,2$.

Условие устойчивости можно записать в виде

$$\sigma = \frac{[\sigma_{кр}]}{n_y} \text{ или } \sigma \leq [\sigma_y].$$

Имеются нормативные таблицы коэффициентов φ , устанавливающих связь между допускаемыми напряжениями на простое сжатие и устойчивостью в зависимости от гибкости бруса λ

$$\varphi = \frac{[\sigma]_y}{[\sigma]_{сж}}.$$

Так как

$$[\sigma]_{сж} \geq \frac{F}{A_{бр}},$$

то окончательно условие устойчивости можно записать в виде

$$\sigma = \frac{F}{\varphi \cdot A_{бр}} \leq [\sigma]_{сж}.$$

При проектировочном расчете (подбор сечения) приходится пользоваться методом последовательных приближений, задаваясь несколькими значениями коэффициента φ .

Помимо случая, для которого была выведена формула Эйлера, на практике встречаются и другие способы крепления стержней.

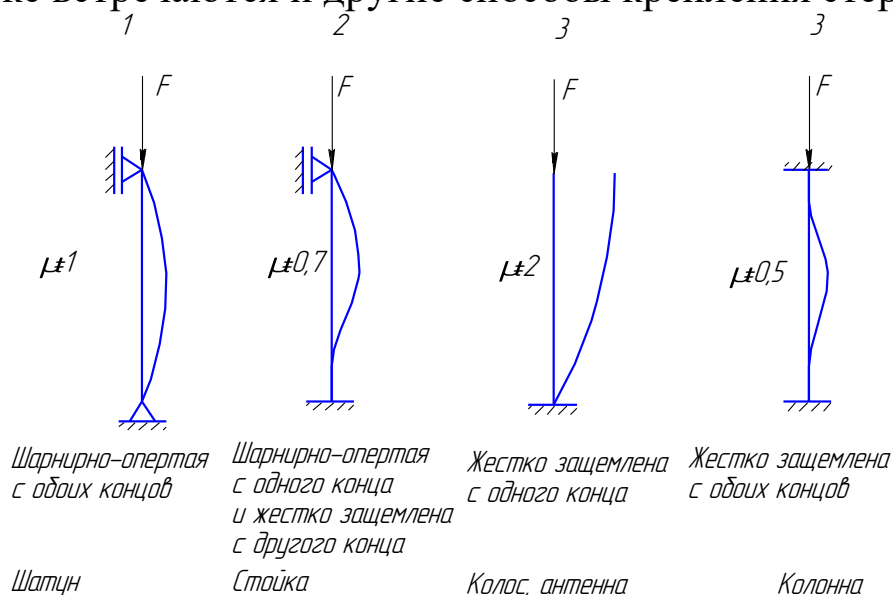


Рисунок 6.1 – Способы крепления стержней

Первый вид крепления считается основным, и остальные виды приводятся с помощью коэффициента приведения длины к данному виду.

С учетом выше изложенного формула Эйлера примет следующий вид [1, 5]:

$$F_k = \frac{E \cdot I_x \cdot \pi^2}{(\mu \cdot l)^2}.$$

Отношение $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$ называется гибкостью стержня.

Формула Эйлера применима только при соблюдении условия, что критические напряжения должны быть равны или быть меньше предела пропорциональности ($\sigma_{кр} \leq \sigma_{пц}$).

Таким образом, мы можем определить предельную гибкость стержня, при которой применима формула Эйлера.

Итак, предельная гибкость стержня будет определяться следующим образом [2]:

$$\lambda_{п} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{\sigma_{пц}}}.$$

Проведенные многочисленные эксперименты показали, что формула Эйлера справедлива только для тонких и длинных стержней. На практике, как известно, встречаются и короткие стержни, расчет которых на устойчивость также необходимо проводить.

Ф.С. Ясинским на основе изучения экспериментальных данных была предложена эмпирическая формула для определения напряжений в коротких стержнях [1, 5]

$$\sigma_k = a - b \cdot \lambda,$$

где a и b коэффициенты, зависящие от материала и определяемые опытным путем, для малоуглеродистых сталей, $a = 310$ МПа, $b = 1,14$ МПа.

Задача № 6

Стальной стержень длиной l сжимается силой F . Найти размеры поперечного сечения или номер сортамента проката при допускаемом напряжении на простое сжатие $[\sigma]_{сж} = 120$ МПа (сталь 3 при $\sigma_T = 240$ МПа, $n_T = 2,0$), величину критической силы и коэффициента запаса устойчивости.

Расчет производить последовательными приближениями, предварительно задавшись величиной коэффициента $\varphi = 0,5$.

Коэффициент приведения длины μ определить по условиям закрепления концов стержня. Расчетные схемы представлены на рисунке 6.4, данные для расчета в таблице 6.

Таблица 6 – Исходные данные к задаче № 6

Номер строки	F , кН	l , м	Номер строки	F , кН	l , м
1	350	3,0	6	225	3,0
2	325	2,5	7	330	3,1
3	250	2,8	8	280	2,5
4	275	3,5	9	320	2,6
5	200	2,2	10	340	3,5

Пример расчета

Стальная стойка длиной $l = 2$ м, заземленная на обоих концах, сжимается силой $F = 300$ кН (рисунок 6.2) Найти размеры прямоугольного сечения при соотношении сторон $h : b = 3$, если допускаемое напряжение на простое сжатие $[\sigma]_{сж} = 160$ МПа. Расчет проводится последовательным приближением, предварительно задаваясь величиной коэффициента φ .

Решение

Подбор поперечного сечения производится методом последовательных приближений с использованием условия устойчивости

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_y = \varphi \cdot [\sigma]_{сж},$$

где σ_{max} – наибольшее напряжение в стойке, МПа;

F – сжимающая сила, Н;

A – площадь поперечного сечения, м²;

$[\sigma]_y$ – допускаемые напряжения на устойчивость, МПа;

φ – коэффициент уменьшения напряжений;

$[\sigma]_{сж}$ – допускаемые напряжения при сжатии, МПа.

Первая попытка

Для первой попытки коэффициент допускаемого напряжения, зависящего от гибкости стойки, принимаем равным 0,5 и находим площадь поперечного сечения:

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{300 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 150 \cdot 10^6} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 40 \text{ см}^2.$$

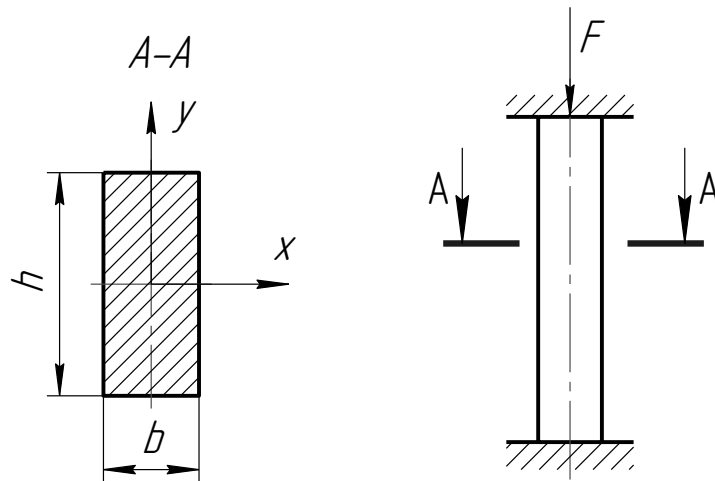


Рисунок 6.2 – Расчетная схема стойки

Для отношения $h : b = 3$ площадь будет
 $A = h \cdot b = 3 \cdot b^2 = 40 \text{ см}^2$.

Откуда $b = \sqrt{\frac{40}{3}} = 3,65 \text{ см}$.

Определим минимальный радиус инерции сечения i_{min} :

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{h \cdot b^3}{12 \cdot h \cdot b}} = \frac{b}{3,46} = \frac{3,65}{3,46} = 1,06 \text{ см}.$$

Определяем гибкость стержня (для стержня с двумя зашечленными концами) $\mu = 0,5$:

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{0,5 \cdot 200}{1,06} = 94.$$

Для этой гибкости по таблице находим коэффициент уменьшения допускаемого напряжения методом интерполяции (приложение Е).

Гибкость 151 попадает в интервал

$$\begin{array}{ll} \lambda = 90 & \varphi = 0,69 \\ \lambda = 100 & \varphi = 0,60 \end{array}$$

Подставляем $\varphi' = 0,60 + \left(\frac{0,69 - 0,60}{10} \right) \cdot 6 = 0,654$.

Определяем допускаемое напряжение на устойчивость.

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma]_{сж} = 0,654 \cdot 150 = 98,1 \text{ МПа}.$$

Определяем наибольшее напряжение в стойке и сравниваем с допускаемыми напряжениями на устойчивость.

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} = \frac{300 \cdot 10^3}{40 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 75 \text{ МПа} < 98,1 \text{ МПа}.$$

Стойка значительно недогружена, поэтому делаем вторую попытку.

Вторая попытка

Коэффициент уменьшения допускаемого напряжения берем среднеарифметически:

$$\varphi'' = \frac{0,5 + 0,654}{2} = 0,577.$$

Определяем площадь сечения:

$$A \geq \frac{300 \cdot 10^3}{0,577 \cdot 150 \cdot 10^6} = 3,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 35 \text{ см}^2.$$

По найденной площади определяем h , b и i_{min}

$$b = \sqrt{\frac{35}{3}} = 3,41 \text{ см.}$$

Минимальный радиус инерции сечения i_{min}

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{A}} = \sqrt{\frac{h \cdot b^3}{12 \cdot h \cdot b}} = \frac{b}{3,46} = \frac{3,41}{3,46} = 0,99 \text{ см.}$$

Гибкость стойки

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 200}{0,99} = 101.$$

Гибкость 101 попадает в интервал

$$\lambda = 100 \quad \varphi = 0,60$$

$$\lambda = 110 \quad \varphi = 0,52.$$

$$\varphi''' = 0,52 - \left(\frac{0,60 - 0,52}{10} \right) 9 = 0,592$$

тогда $[\sigma]_y = 0,592 \cdot 150 = 89 \text{ МПа}$

$$\sigma_{max} = \frac{300 \cdot 10^3}{35 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 86 < 89 \text{ МПа.}$$

$$\text{Недонапряжение } \delta = \frac{89 - 86}{89} 100 \% = 3,4 \%.$$

Недонапряжение 3,4 %, что допустимо, так как меньше 5 %.

Окончательно устанавливаем поперечное сечение, которое обеспечит продольную устойчивость заданного стержня

$$h = 10,23 \text{ см; } b = 3,41 \text{ см; } A = 35 \text{ см}^2.$$

Пример расчета

Подобрать размер сечения для швеллера длиной $l = 5 \text{ м}$. Сжимающая сила $F = 400 \text{ кН}$ (рисунок 6.3). Оба конца защемлены. Допускаемое напряжение на сжатие $[\sigma]_{сж} = 160 \text{ МПа}$.

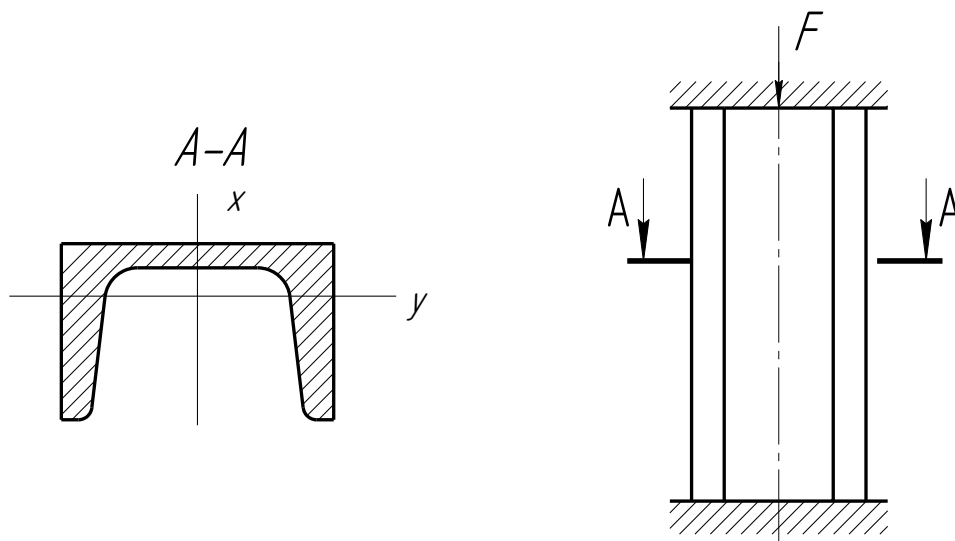


Рисунок 6.3 – Расчетная схема стойки

Для первой попытки коэффициент допускаемого напряжения, зависящего от гибкости стойки, принимаем равным 0,5 и находим площадь поперечного сечения:

$$A \geq \frac{F}{\varphi \cdot [\sigma]} = \frac{400 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 50 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем швеллер № 36:

$$A = 53,4 \text{ см}^2; I_{\min} = I_y = 513 \text{ см}^4; i_{\min} = i_y = 3,1 \text{ см}.$$

Определяем гибкость стержня (для стержня с двумя зашечленными концами) $\mu = 0,5$.

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 500}{3,1} = 80,6.$$

Для этой гибкости по таблице находим коэффициент уменьшения допускаемого напряжения методом интерполяции (приложение Е).

Гибкость 80,6 попадает в интервал:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 80 & \varphi = 0,75 \\ \lambda = 90 & \varphi = 0,69. \end{array}$$

$$\text{Подставляем } \varphi' = 0,69 + \left(\frac{0,75 - 0,69}{10} \right) \cdot 9,4 = 0,744.$$

Определяем допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \varphi [\sigma]_{\text{сж}} = 0,744 \cdot 160 = 120 \text{ МПа}.$$

Определяем наибольшее напряжение в стойке и сравниваем с допускаемыми напряжениями на устойчивость:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{400 \cdot 10^3}{53,4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 74,9 \text{ МПа} < 120 \text{ МПа}.$$

Стойка значительно недогружена, поэтому делаем вторую попытку.

Находим из двух полученных напряжений среднее арифметическое $[\sigma_y]_{\text{ср}}'$ и определяем площадь поперечного сечения стержня:

$$[\sigma_y]_{\text{ср}}' = \frac{120 + 74,9}{2} = 97,45 \text{ МПа.}$$

Определяем площадь швеллера:

$$A \geq \frac{400 \cdot 10^3}{97,45 \cdot 10^6} = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 41 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем швеллер № 33:

$$A = 46,5 \text{ см}^2; \quad I_{\min} = I_y = 410 \text{ см}^4; \quad i_{\min} = i_y = 2,97 \text{ см.}$$

Определяем гибкость стержня (для стержня с двумя зашечленными концами) $\mu = 0,5$.

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 500}{2,97} = 84,2.$$

Для этой гибкости по таблице находим коэффициент уменьшения допускаемого напряжения методом интерполяции (приложение Е).

Гибкость 84,2 попадает в интервал:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 80 & \varphi = 0,75 \\ \lambda = 90 & \varphi = 0,69. \end{array}$$

$$\text{Подставляем } \varphi'' = 0,69 + \left(\frac{0,75 - 0,69}{10} \right) \cdot 5,8 = 0,72.$$

Определяем допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \varphi'' [\sigma]_{\text{сж}} = 0,72 \cdot 160 = 115 \text{ МПа.}$$

Определяем наибольшее напряжение в стойке и сравниваем с допускаемыми напряжениями на устойчивость:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{400 \cdot 10^3}{46,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 86 \text{ МПа} < 115 \text{ МПа.}$$

Стойка значительно недогружена, поэтому делаем третью попытку.

Находим из двух полученных напряжений среднее арифметическое $[\sigma_y]_{\text{ср}}''$ и определяем площадь поперечного сечения стержня:

$$[\sigma_y]_{\text{ср}}'' = \frac{115 + 86}{2} = 100,5 \text{ МПа.}$$

Определяем площадь швеллера:

$$A \geq \frac{400 \cdot 10^3}{100,5 \cdot 10^6} = 3,98 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 39,8 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем швеллер № 30:

$$A = 40,5 \text{ см}^2; \quad I_{\min} = I_y = 327 \text{ см}^4; \quad i_{\min} = i_y = 2,84 \text{ см.}$$

Определяем гибкость стержня (для стержня с двумя зашечленными концами) $\mu = 0,5$.

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 500}{2,84} = 88.$$

Для этой гибкости по таблице находим коэффициент уменьшения допускаемого напряжения методом интерполяции (приложение Е).

Гибкость 88 попадает в интервал:

$$\begin{array}{ll} \lambda = 80 & \varphi = 0,75 \\ \lambda = 90 & \varphi = 0,69. \end{array}$$

$$\text{Подставляем } \varphi''' = 0,69 + \left(\frac{0,75 - 0,69}{10} \right) \cdot 2 = 0,7.$$

Определяем допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \varphi''' [\sigma]_{\text{сж}} = 0,7 \cdot 160 = 112 \text{ МПа.}$$

Определяем наибольшее напряжение в стойке и сравниваем с допускаемыми напряжениями на устойчивость:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} = \frac{400 \cdot 10^3}{40,5 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 98,8 \text{ МПа} < 112 \text{ МПа.}$$

$$\text{Недонапряжение } \delta = \frac{112 - 99}{112} 100 \% = 11,6 \%.$$

Недонапряжение велико, поэтому делаем четвертую попытку.

Находим из двух полученных напряжений среднее арифметическое $[\sigma_y]_{\text{ср}}'''$ и определяем площадь поперечного сечения стержня:

$$[\sigma_y]_{\text{ср}}''' = \frac{112 + 99}{2} = 105,5 \text{ МПа.}$$

Определяем площадь швеллера

$$A \geq \frac{400 \cdot 10^3}{105,5 \cdot 10^6} = 3,79 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 37,9 \text{ см}^2.$$

По сортаменту подбираем швеллер № 27:

$$A = 35,2 \text{ см}^2; \quad I_{\min} = I_y = 262 \text{ см}^4; \quad i_{\min} = i_y = 2,73 \text{ см.}$$

Определяем гибкость стержня (для стержня с двумя зашечленными концами) $\mu = 0,5$.

$$\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} = \frac{0,5 \cdot 500}{2,73} = 91,6.$$

Для этой гибкости по таблице находим коэффициент уменьшения допускаемого напряжения методом интерполяции (приложение Е).

Гибкость 91,6 попадает в интервал:

$$\lambda = 90 \quad \varphi = 0,69$$

$$\lambda = 100 \quad \varphi = 60.$$

$$\text{Подставляем } \varphi''' = 0,60 + \left(\frac{0,69 - 0,60}{10} \right) \cdot 8,4 = 0,68.$$

Определяем допускаемое напряжение на устойчивость:

$$[\sigma]_y = \varphi''' [\sigma]_{сж} = 0,68 \cdot 160 = 108,8 \text{ МПа.}$$

Определяем наибольшее напряжение в стойке и сравниваем с допускаемыми напряжениями на устойчивость:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{A} = \frac{400 \cdot 10^3}{35,2 \cdot 10^{-4} \cdot 10^6} = 113,6 \text{ МПа.}$$

$$\text{Перенапряжение } \delta = \frac{113,6 - 108,8}{113,6} 100 \% = 4,25 \%.$$

Величина перенапряжения допускается не более 5 %. Значит, можем окончательно выбрать швеллер № 27.

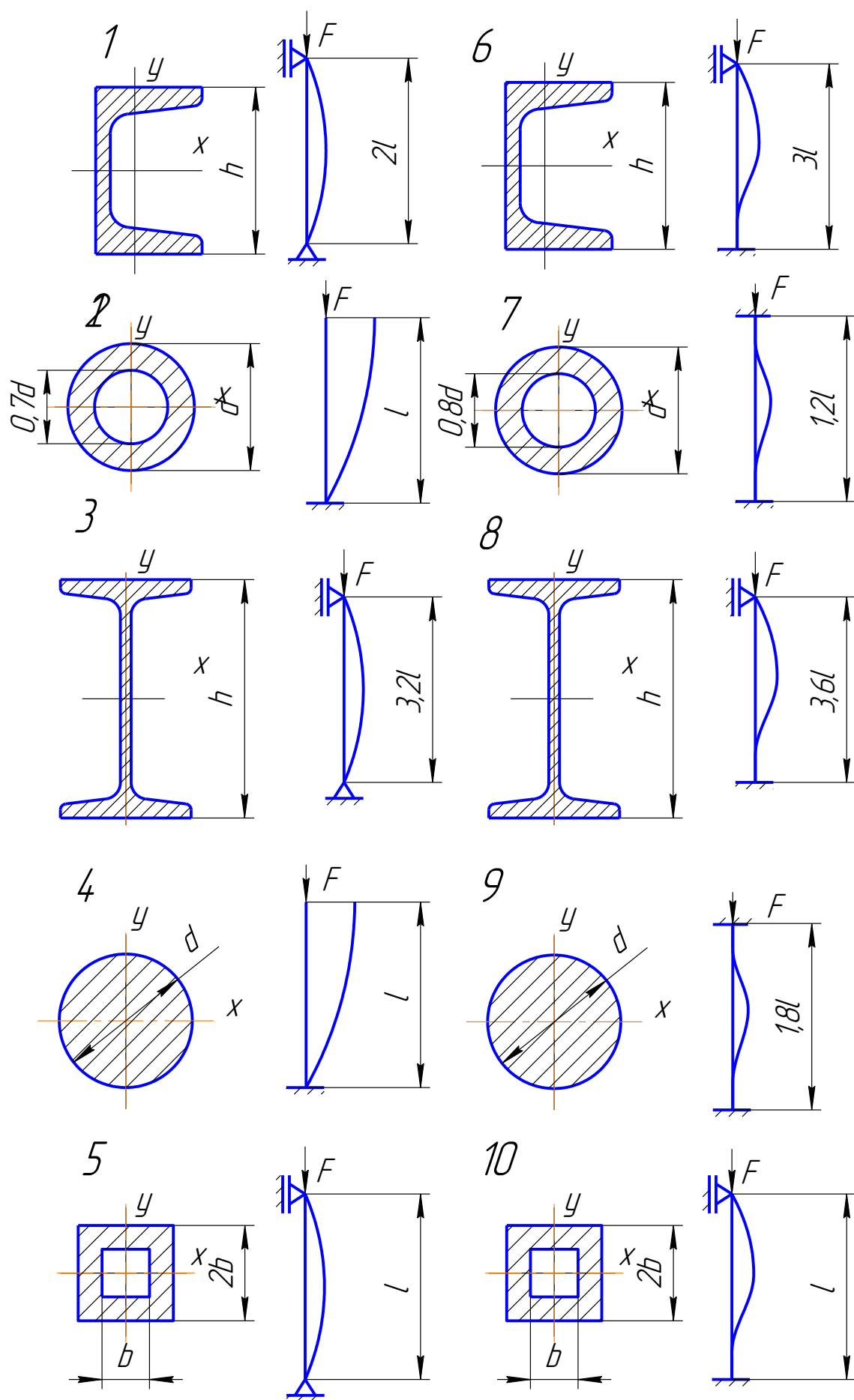


Рисунок 6.4 – Варианты схем к задаче № 5

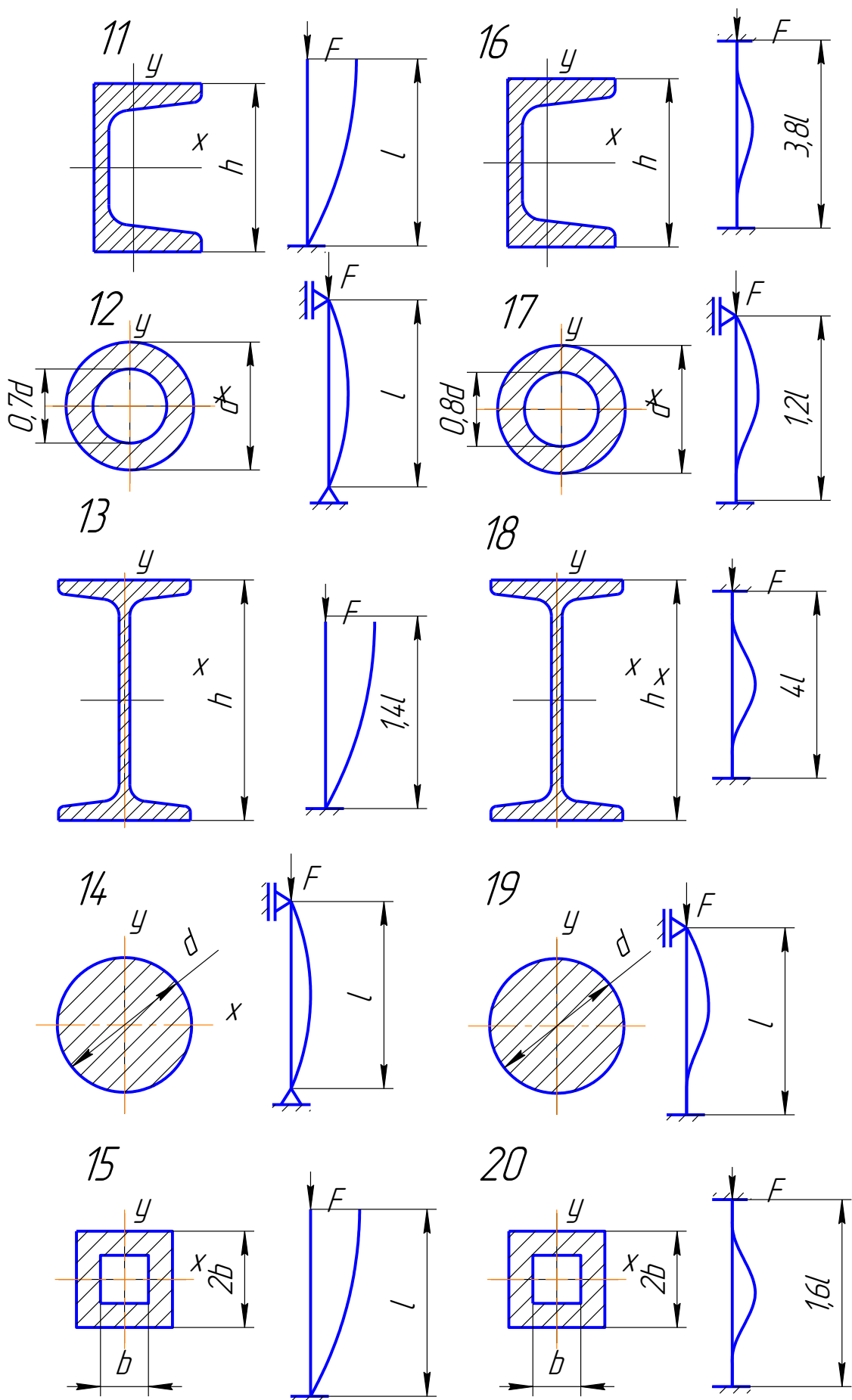


Рисунок 6.4 – Варианты схем к задаче № 5 (продолжение)

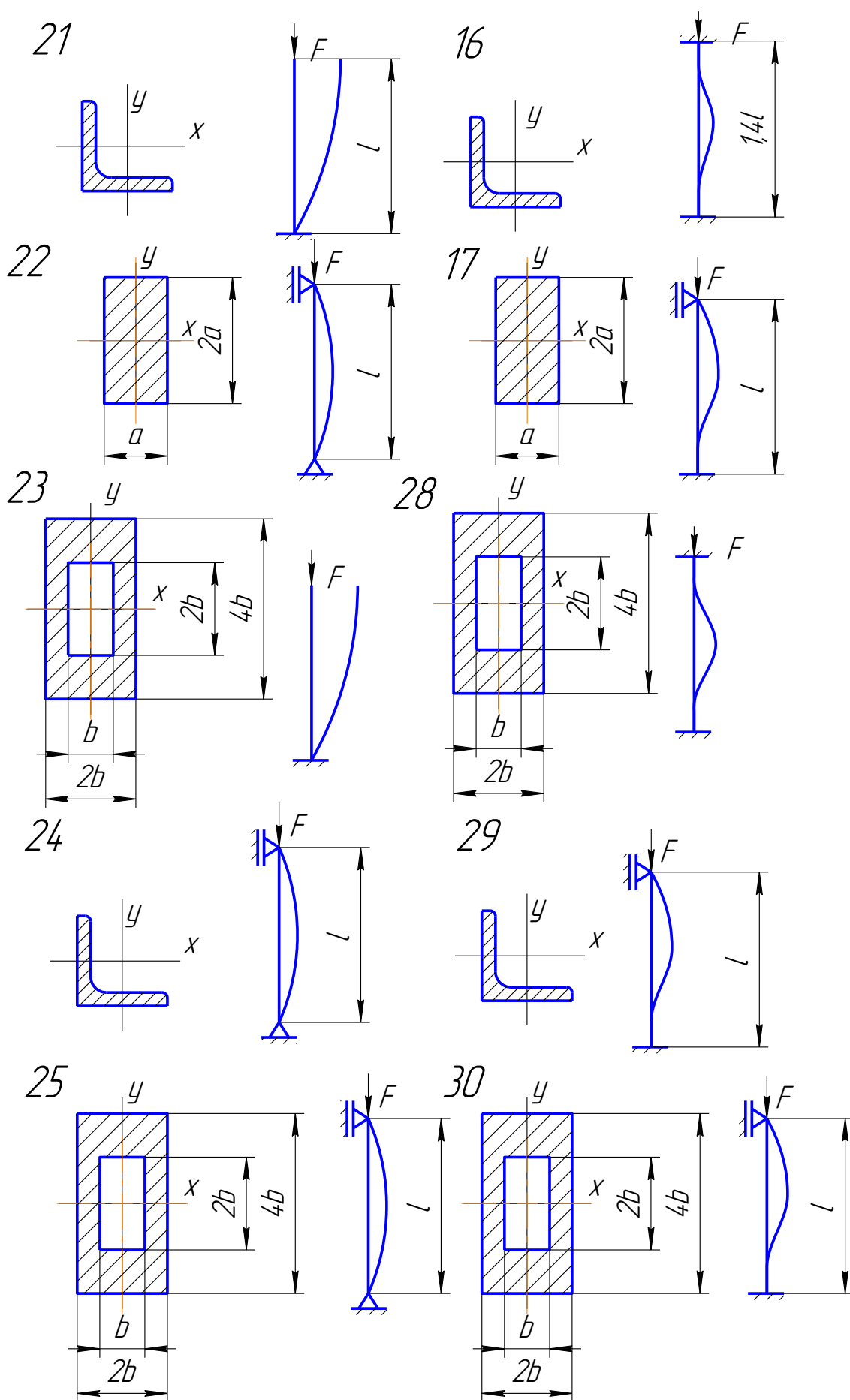


Рисунок 6.4 – Варианты схем к задаче № 5 (окончание)

7 ДИНАМИЧЕСКОЕ ДЕЙСТВИЕ НАГРУЗОК

7.1 Прочность при напряжениях, переменных во времени

Известно, что части (детали) машин, подвергающиеся внешним нагрузкам, переменным по величине и повторяющиеся большое число, раз иногда ломаются внезапно, без наличия заметных остаточных деформаций, при напряжениях, которым они сопротивляются при статических нагрузках.

Отмечено, что элементы машин при обычных испытаниях обладают прекрасными механическими свойствами – пластичностью, удлинением, сужением, ударной вязкостью, разрушаются без видимых причин.

Раньше, в первой половине XIX века, считали, что пластичные материалы имеют волокнистую структуру, а хрупкие материалы кристаллическую.

Так как изломы деталей происходили во время значительного периода работы машин, возникла гипотеза, что в следствии переменных напряжений металл «устает» и меняет свою структуру из пластичного становится хрупким.

Механизм разрушения от переменных нагрузок был раскрыт лишь в начале XX века. Многочисленные исследования показали, что при действии переменных напряжений в металле возникает трещина, постепенно проникающая в глубь изделия. При переменных деформациях края трещины то сближаются, наезжая друг на друга, то расходятся. В результате этого образуется гладкая прирванная зона.

По мере развития трещины поперечное сечение ослабевает и даже при небольшом толчке происходит разрушение.

Разрушение при переменных нагрузках носит местный характер, не затрагивая в целом всего материала конструкции. Следовательно, можно сказать, что разрушение происходит не от «усталости», а от разрушения путем развития трещины.

Материалы имеют неоднородную структуру строения. Могут иметь механические включения, пузырьки воздуха (каверны), кристаллы различного размера. Кроме того, элементы (детали) машин работают при переменных нагрузках. В результате этого появляются микротрещины, которые со временем развиваются, что и приводит к разрушению элемента (детали) машины.

Если рассмотреть поперечное сечение можно определить две зоны:

первая зона – с притертыми кристаллами;

вторая зона – с крупнозернистыми кристаллами.

Разрушение детали происходит при следующих обстоятельствах:

1. Напряжения должны колебаться между определенными крайними значениями;

2. Напряжения превышают предел усталости или как принято говорить предел выносливости.

Предел выносливости определяется экспериментально.

Предел выносливости зависит от материала, способа обработки, видов деформации и т. д.

Опыты показывают, что постоянно развивающаяся трещина возникает только при переменных напряжениях, колеблющихся между двумя крайними значениями. Кроме того, необходимо, чтобы величина колеблющихся напряжений превзошла определенную границу – **предел усталости** или **предел выносливости**.

Определение. Пределом выносливости называется величина периодически меняющегося напряжения, которой материал может противостоять неограниченно долго без появления трещин усталости.

Предел выносливости обозначается $P_r (\sigma_r, \tau_r)$.

Предел выносливости в основном зависит от материала, типа деформации, степени симметричности цикла, то есть отношения между крайними значениями напряжений.

Предел выносливости ниже предела прочности.

Предел выносливости определяется экспериментально.

Для определения предела выносливости используют стальные образцы диаметром 7...10 мм, задаются видом деформации и циклом в пределах от 10^6 до 10^7 .

Предел выносливости для различных видов деформации при симметричном цикле определяется следующим образом:

$\sigma_{-1}^И = 0,4 \cdot \sigma_B$ – изгиб;

$\sigma_{-1}^Р = 0,28 \cdot \sigma_B$ – растяжение (сжатие);

$\sigma_{-1}^{КР} = 0,22 \cdot \sigma_B$ – кручение.

На величину предела выносливости оказывают следующие факторы:

1. Местные напряжения.

С появлением микротрещин возникают местные напряжения, оказывающие наибольшее влияние на величину предела выносливости $P_r(\sigma_r, \tau_r)$.

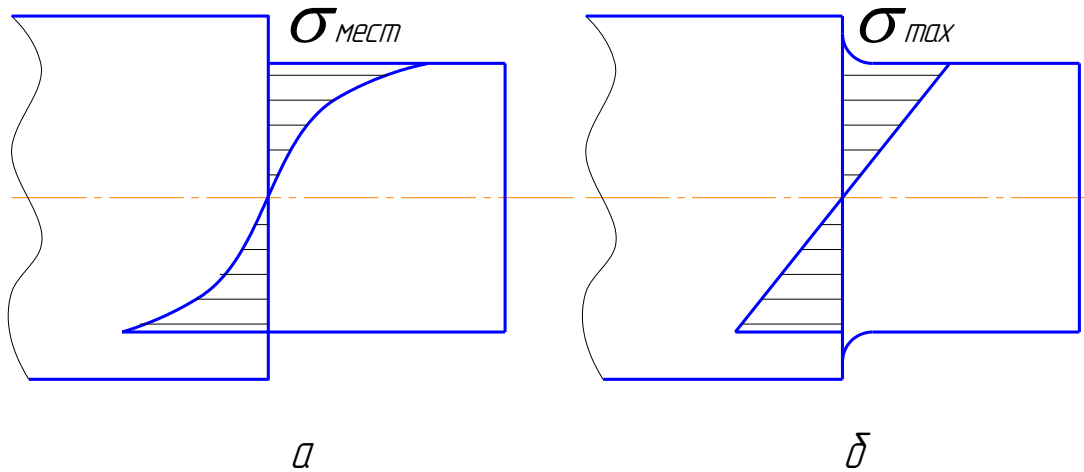


Рисунок 7.1 – Местные напряжения

Анализ приведенных рисунков показывает, что на рисунке под буквой **б** значения напряжений меньше, так как при переходе одного диаметра вала к другому выполнена галтель.

Местные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{мест}} = \alpha_k \frac{M_{\text{max}}}{W_x},$$

где α_k – коэффициент концентрации местных напряжений.

Коэффициент чувствительности q зависит от материала и теоретического коэффициента концентрации напряжений (определяется по графикам).

$$q = \frac{\alpha_{\text{кд}} - 1}{\alpha_{\text{кт}} - 1},$$

где $\alpha_{\text{кт}}$ – теоретический коэффициент концентрации напряжений зависит от вида и формы концентрации напряжений;

$\alpha_{\text{кд}} = 1 + q(\alpha_{\text{кт}} - 1)$ – действительный коэффициент концентрации напряжений;

2. Влияние размеров.

С увеличением размеров предел выносливости снижается.

Снижение предела выносливости происходит от ряда факторов.

В больших образцах (деталях) имеется больше концентраторов напряжений, это пузырьки воздуха, различные механические включения. Малые образцы чище.

Влияние размеров на предел выносливости учитывается с помощью масштабного коэффициента (α_m), зависящего от размеров, материала и определяемого по графикам.

Более чувствительны к размерам на предел выносливости, легированные стали;

3. Влияние температуры.

С повышением температуры предел выносливости снижается.

При повышении температуры возникает явление, называемое ползучестью.

Определение. Ползучестью называется непрерывно растущая во времени деформация материала, происходящая под действием постоянных по величине напряжений при повышенной температуре.

Определение. Снижение напряжений при нарастании пластических деформаций за счет уменьшения упругих деформаций называется релаксацией напряжений.

В результате релаксации напряжений плотность соединений, выполненных с помощью натяга, может быть ослаблена, что вызовет разрушение конструкции.

7.1.1 Виды циклов напряжений и их характеристики

Нормальные напряжения в любой точке поперечного сечения определяются по формуле

$$\sigma = \frac{M_{изг}}{I_x} y.$$

Рассмотрим рисунок, приведенный ниже.

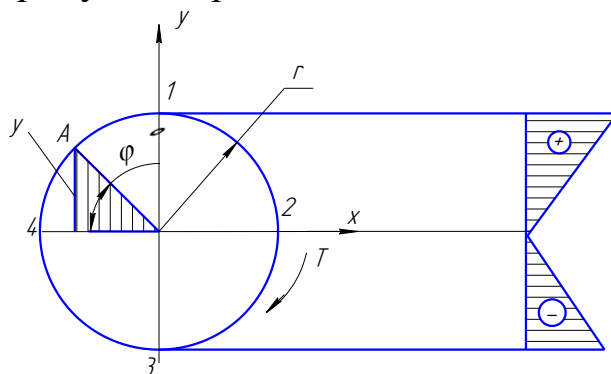


Рисунок 7.2 – Нормальные напряжения в поперечном сечении вала

При вращении вала с угловой скоростью ω определим, как будут изменяться нормальные напряжения по поперечному сечению во времени t .

Определим напряжения в точке A . Так как $\omega \cdot t = \varphi$, то $y = r \cdot \sin \omega \cdot t = r \cdot \sin \varphi$

Тогда напряжения в точке A определяются следующим образом

$$\sigma = \frac{M}{I_x} r \cdot \sin \varphi.$$

Таким образом, развертка напряжений будет представлять собой синусоиду представленную на рисунке 7.3.

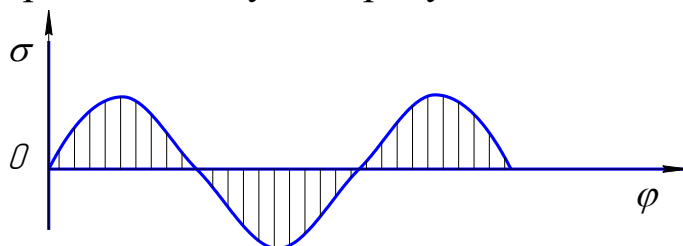


Рисунок 7.3 – Синусоида развертки напряжений

Рассмотрим развертку зависимости напряжений от времени.

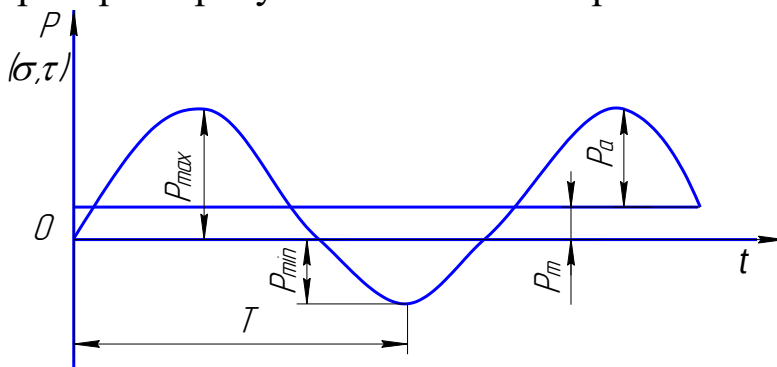


Рисунок 7.4 – Развертка напряжений во времени

Определение. T – время, в течение которого переменное напряжение возвращается в первоначальное (исходное) положение, называется периодом.

Определение. Совокупность напряжений за один период называется циклом напряжений.

Цикл переменных напряжений характеризуется:

1. Максимальным напряжением – $P_{max} (\sigma, \tau)$;
2. Минимальным напряжением – $P_{min} (\sigma, \tau)$;
3. Средним напряжением – $P_m (\sigma, \tau)$

$$P_m = \frac{P_{max} + P_{min}}{2};$$

4. Амплитудой цикла – P_a (σ , τ)

$$P_a = \frac{P_{max} - P_{min}}{2}.$$

Определение. Амплитудой цикла называется наибольшее положительное значение переменной цикла напряжений;

5. Коэффициент асимметрии цикла (характеристика цикла) – r

$$r = \frac{P_{min}}{P_{max}}.$$

7.1.2 Виды циклов

Асимметричные циклы:

1. Знакопостоянный цикл. Напряжения меняются только по величине;

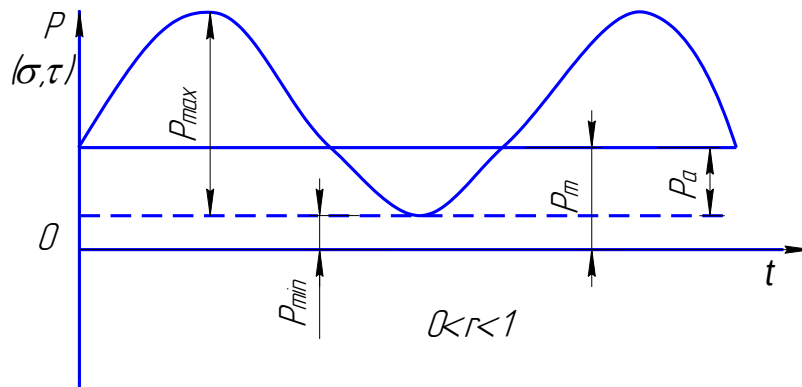


Рисунок 7.5 – Знакопостоянный цикл

2. Пульсирующий (отнулевой) цикл. При данном цикле работают валы коробки передач, полуоси колес;

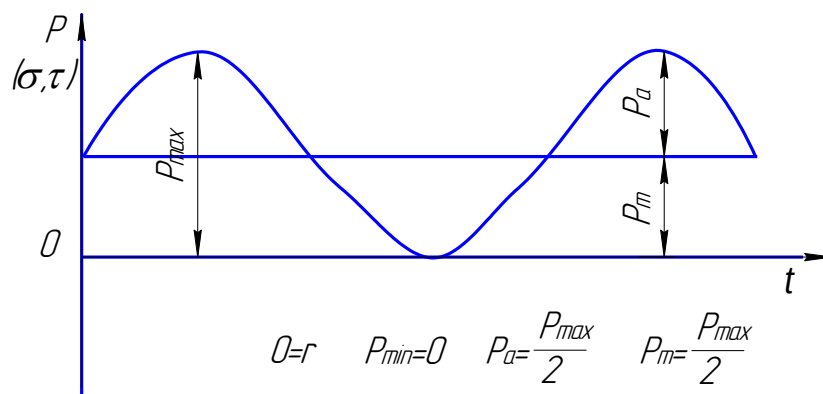


Рисунок 7.6 – Пульсирующий цикл

3. Статический цикл (постоянное напряжение). Цикл наиболее легкий по нагрузке;

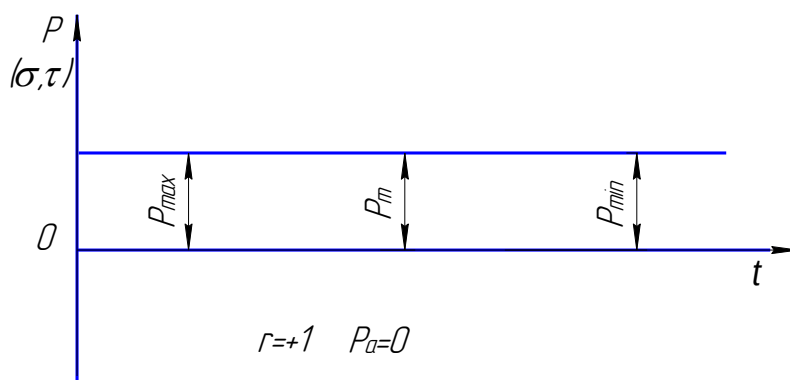


Рисунок 7.7 – Знакопостоянный цикл

4. Знакопеременный цикл (напряжения меняются по знаку и по величине). Зубья шестерни на изгиб работают по знакопеременному циклу.

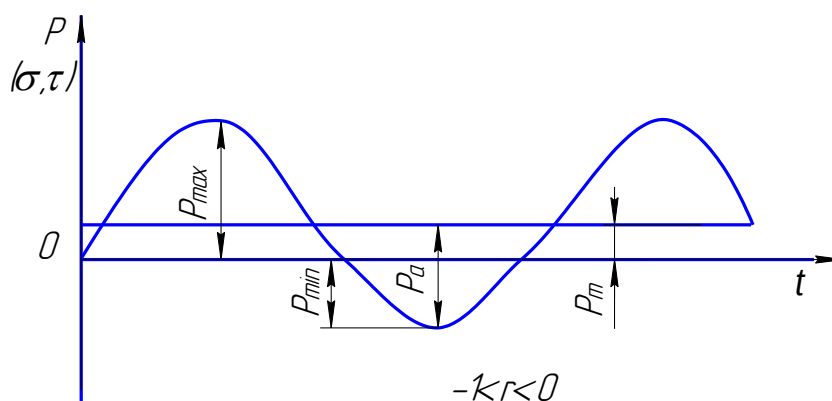


Рисунок 7.8 – Знакопеременный цикл

Симметричный цикл.

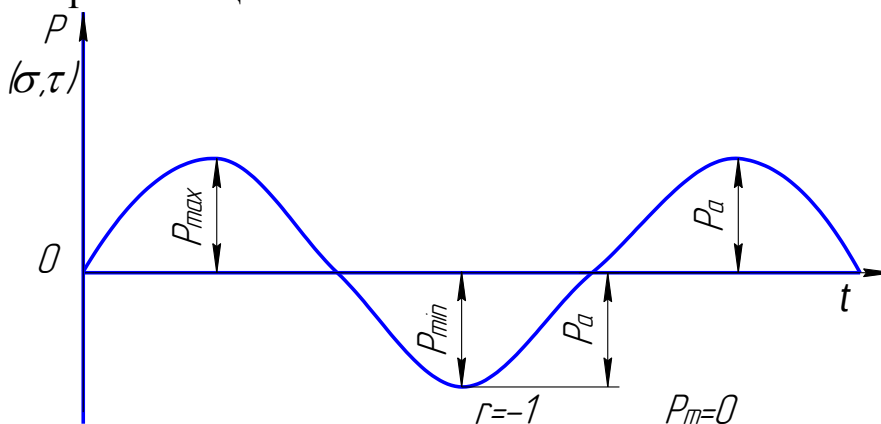


Рисунок 7.9 – Симметричный цикл

7.1.3 План решения задачи при переменных напряжениях

Дано: вид деформации, характеристики металла (E , μ , $\sigma_{\text{пл}}$, $\sigma_{\text{т}}$, $\sigma_{\text{в}}$, $\sigma_{\text{у}}$, $\sigma_{\text{г}}$), максимальные напряжения – P_{max} (σ , τ), минимальные напряжения – P_{min} (σ , τ).

Определяют:

1. Средние напряжения – P_m (σ , τ)

$$P_m = \frac{P_{\text{max}} + P_{\text{min}}}{2}$$

Амплитуду цикла – P_a (σ , τ)

$$P_a = \frac{P_{\text{max}} - P_{\text{min}}}{2}$$

Коэффициент асимметрии цикла (характеристика цикла) – r

$$r = \frac{P_{\text{min}}}{P_{\text{max}}};$$

2. Допускаемые напряжения P_m (σ , τ)

$$P_{\text{мест}} = \alpha P_{\text{max}} = \frac{P_r}{k}$$

Условие прочности

$$P_{\text{max}} \leq [P_r] = \frac{P_r \cdot \alpha_{\text{п}}}{k \cdot \alpha_{\text{кд}} \cdot \kappa_{\partial} \cdot \alpha_{\text{м}}},$$

где k – коэффициент запаса прочности;

$\kappa_{\text{д}}$ – коэффициент динамичности;

$\alpha_{\text{п}}$ – коэффициент, учитывающий поверхностную обработку;

$\alpha_{\text{м}}$ – масштабный коэффициент;

$\alpha_{\text{кд}}$ – действительный коэффициент концентрации напряжений.

3. Действительный коэффициент концентрации напряжений ($\alpha_{\text{кд}}$)

$$\alpha_{\text{кд}} = 1 + q(\alpha_{\text{кт}} - 1);$$

4. Коэффициенты: $\alpha_{\text{п}}$ – учитывающий поверхностную обработку и $\alpha_{\text{м}}$ – масштабный коэффициент по графикам;

5. Допускаемые напряжения предела выносливости для симметричного цикла

$$[P_{-1}] = \frac{P_{-1} \cdot \alpha_{\text{п}}}{k \cdot \alpha_{\text{кд}} \cdot \kappa_{\partial} \cdot \alpha_{\text{м}}}$$

Предел выносливости P_{-1} для симметричного цикла по справочникам для данного материала;

6. Допускаемые напряжения предела выносливости для статического цикла

$$[P_{+1}] = \frac{P_o}{K},$$

где $P_o = P_T$ – для пластичных материалов.

$P_o = P_B$ – для хрупких материалов;

7. Допускаемые значения напряжений предела выносливости для несимметричного цикла

$$[P_r] = \frac{2 \cdot [P_{-1}] \cdot [P_{+1}]}{(1-r) \cdot [P_{+1}] + (1+r) \cdot [P_{-1}]};$$

8. Условие прочности при циклических нагрузках

$$\sqrt{\frac{\sigma_{max}^2}{[\sigma_r]^2} + \frac{\tau_{max}^2}{[\tau_r]^2}} \leq 1,$$

где σ – нормальные напряжения при растяжении (сжатии)

$$\sigma_{max} = \frac{F_{max}}{A};$$

σ – нормальные напряжения при изгибе

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_x};$$

τ – касательные напряжения при кручении

$$\tau_{max} = \frac{T_{max}}{W_\rho};$$

τ – нормальные напряжения при сдвиге

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max}}{A}.$$

Для борьбы с изломами усталости применяются следующие меры:

1. Использовать металл с более высоким пределом прочности при достаточной пластичности;

2. Материал должен быть свободен от внутренних факторов концентрации напряжений (каверны, механические включения и т. д.);

3. Грамотная, культурная проектировка формы детали, хорошая поверхностная обработка;
 4. Закалка ТВЧ, обкатка роликами (шариками), химико-термическая обработка поверхности (азотирование, цианирование, хромирование, улучшение и т. д.);
 5. Контроль изготовления изделия (мелом, керосином, ультразвуком, рентгеном, радиационный, магнитно-металлический);
 6. Соблюдение норм и правил эксплуатации изделия.
- Перечисленные выше пункты (с 1 по 5) позволяют повысить предел выносливости.

7.2 Вычисление напряжений при равноускоренном движении

Многие современные машины и механизмы работают при больших скоростях и ускорениях. От характера ускорений будет изменяться характер динамической нагрузки, деформаций и методика расчета.

Первая группа задач (при равноускоренном движении), когда ускорения и скорости элемента (детали) механизма имеют постоянное значение.

Это задачи, в которых пренебрегают деформациями рассматриваемых элементов конструкций. Добавочная динамическая нагрузка учитывается по принципу Даламбера (движущее тело можно считать находящимся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него силам добавить силы инерции), ускорения определяются по правилам кинематики твердого тела.

Динамическая нагрузка (сила инерции) к элементу конструкции прикладывается как статическая, и дальнейшие расчеты проводятся как статические.

На рисунке 7.10 представлена система, когда груз поднимается вверх равноускоренно ($F = m \cdot a$).

На канат, поднимающий груз, действует сила инерции ($F_{\text{и}}$), равная по величине произведению массы на ускорение, с которым тело поднимается вверх ($F = m \cdot a$) и противоположна по направлению.

Динамические напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{\text{д}} = \frac{Q \cdot a}{A \cdot g} + \frac{Q}{A} = \frac{Q}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right),$$

где Q – вес груза;

F_u – сила инерции;

σ_d – динамические напряжения;

m – масса груза;

g – ускорение свободного падения;

a – ускорение, с которым груз поднимается.

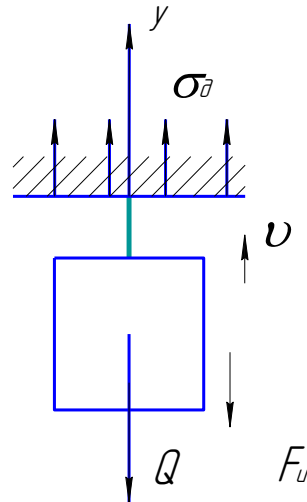


Рисунок 7.10 – Равноускоренное движение груза вверх

С учетом того, что коэффициент динамичности равен

$$\kappa_d = 1 + \frac{a}{g}.$$

Динамические напряжения при равноускоренном движении вверх определяются по формуле

$$\sigma_d = \frac{Q}{A} \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \sigma_c \cdot \kappa_d,$$

где κ_d – динамический коэффициент.

Условие прочности записывается в следующем виде

$$\sigma_d = \sigma_c \cdot \kappa_d \leq [\sigma].$$

Рассмотрим быстровращающийся маховик (обод).

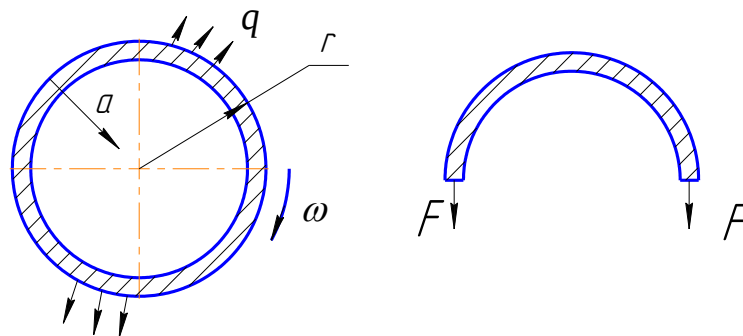


Рисунок 7.11 – Равноускоренное движение груза вверх

Интенсивность сил инерции на единицу длины маховика q определяется выражением

$$q = m \cdot a = \frac{\gamma \cdot A}{g} \omega^2 r,$$

где a – центростремительное ускорение, м/с²;

ω – угловая скорость, сек⁻¹;

γ – объемный вес, Н/м³;

g – ускорение свободного падения, м/с²;

A – площадь, м²;

r – радиус маховика, м.

Из курса физики известно, что $a = \omega^2 \cdot r$.

Нагрузка, растягивающая обод с учетом интенсивности сил инерции определится по формуле:

$$F = q \cdot r,$$

тогда напряжения определяются

$$\sigma_d = \frac{F}{A} = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 r \cdot r}{A \cdot g} = \frac{\gamma \cdot v^2}{g},$$

где $v = \omega r$.

Скорость, при которой материал достигнет предела текучести (потечет)

$$v_T = \sqrt{\frac{\sigma_T g}{\gamma}}.$$

Вторая группа задач, когда ускорения и сила инерции, действующие на элементы (детали) машин, меняют свои значения по знаку, в результате чего деформации и напряжения меняют свой знак.

При расчетах влияние воздуха, сил трения не учитывается, хотя они снижают рост амплитуды колебаний и, как следствие, рост напряжений.

Если на балке установлен двигатель с вращающимся грузом, имеющим эксцентриситет по отношению к оси вращения, то на балку будут действовать вынужденные колебания от его работы. Кроме того, балка имеет собственные колебания. Во время работы элементов машин на них действуют переменные ускорения, при этом может возникнуть явление резонанса и, как следствие, значительный

рост напряжений и деформаций. Большинство машин работает в послерезонансной зоне, это когда частота вынужденных колебаний выше частоты собственных колебаний.

Определение. Резонанс – это когда период вынужденных колебаний совпадает с периодом свободных колебаний.

Третья группа задач, в которых нельзя пренебрегать деформациями элементов рассматриваемых конструкций, так как деформации и напряжения будут зависеть от податливости упругой системы.

Определение. Колебания, которые совершает система без воздействия внешних сил, называются свободными.

Определение. Колебания называются вынужденными, если они происходят под действием внешних сил.

Колебания происходят около положения упругого равновесия, при котором в нагруженном состоянии имеет место статическая деформация (δ_c).

При колебаниях к статическим деформациям добавляются динамические, зависящие от амплитуды и вида колебательного движения.

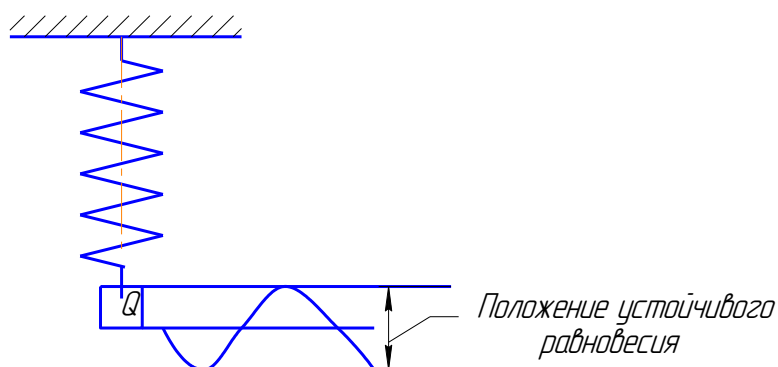


Рисунок 7.12 – Колебания с учетом устойчивого равновесия

На балку, представленную на рисунке 7.13, будут действовать следующие силы:

Q – вес груза (внешняя сила);

$F_{\text{и}}$ – сила инерции;

P – сила упруго сопротивления балки

$$F_{\text{и}} = m \cdot a = \frac{Q}{g} a.$$

Дифференциальное уравнение движения колеблющегося груза (Q) в случае свободных колебаний записывается в следующем виде:

$$\frac{Q}{g} y'' + P - Q = 0.$$

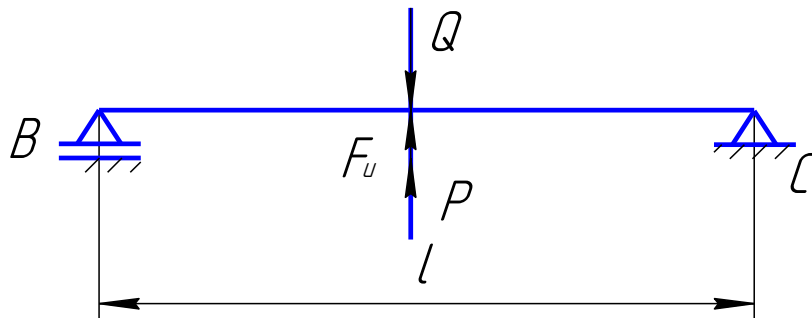


Рисунок 7.13 – Схема балки с действием сил

обозначив $P - Q = c \cdot y$

где c – коэффициент пропорциональности, равный

$$c = \frac{Q}{\delta_Q},$$

где $\delta_Q = \delta_c$ – деформация от внешних сил, следует

$$y'' + \frac{g \cdot c}{Q} y = 0.$$

Из решения данного дифференциального уравнения следует

$$\frac{g \cdot c}{Q} = \omega_0^2,$$

где ω_0 – частота свободных колебаний.

Частота свободных колебаний (ω_0) определяется выражением

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c \cdot g}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_Q}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_c}}.$$

При растяжении (сжатии) статическая деформация (δ_c) определяется по закону Гука:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l}{E \cdot A}.$$

При кручении статическая деформация (δ_c) определяется по формуле

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{G \cdot I_p}.$$

При изгибе статическая деформация (δ_c) определяется по интегралу Мора:

$$\delta = \int_{\ell} \frac{M_{(z)} \cdot M_{(z)}^0 \cdot dz}{E \cdot I_x}.$$

Решением полученного выше дифференциального уравнения (общий интеграл) выражение

$$Y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha).$$

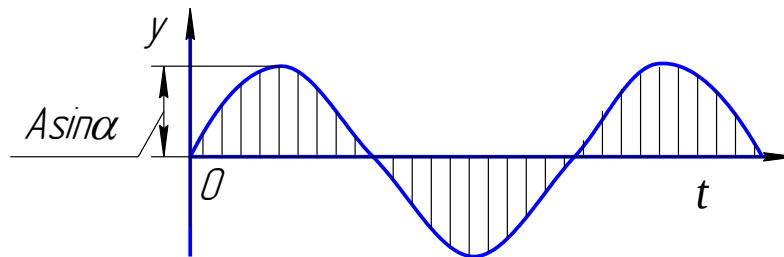


Рисунок 7.13 – Синусоида

Если на упругую систему, кроме груза (Q), силы упругого сопротивления (P), силы инерции ($F_{и}$), действует возмущающая сила (S) и сила сопротивления среды (R), то уравнение движения колеблющегося груза запишется в следующем виде:

$$\frac{Q}{g} y'' + c \cdot y - S + R = 0.$$

Решение этого уравнения приводит к выражению для определения амплитуды (A) вынужденных колебаний при наличии сил сопротивления.

$$A = \frac{\delta_H}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4 \left(\frac{N}{\omega_0}\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}},$$

где – δ_H статическая деформация от максимальной (наибольшей) возмущающей силы

ω – частота возмущающей силы;

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30};$$

ω_0 – частота свободных колебаний при отсутствии возмущающей силы (S) и силы сопротивления среды (R);

N – коэффициент затухания колебаний;

A – амплитуда вынужденных колебаний.

Коэффициент нарастания колебаний (β) равен

$$\beta = \frac{A}{\delta_H}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4\left(\frac{N}{\omega_0}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\kappa_d = 1 + \frac{A}{\delta_H} = 1 + \frac{\delta_H}{\delta_Q} \beta.$$

В условии упругой деформации, когда напряжения пропорциональны деформациям, условие прочности запишется в следующем виде:

$$P_d = P_c \cdot \kappa_d \leq [P]$$

$$P_d = P_c + A = P_c \left(1 + \frac{A}{\delta_c}\right) = P_c \cdot \kappa_d$$

$$\kappa_d = \left(1 + \frac{A}{\delta_c}\right).$$

Деформации будут определяться по формуле

$$\delta_d = \delta_c + A = \delta_c \left(1 + \frac{A}{\delta_c}\right) = \delta_c \cdot \kappa_d.$$

7.3 Понятия о теории удара

Существует несколько теорий удара.

1. Волновая теория удара. При волновой теории удара принято считать, что напряжения расходятся как волны по воде от падения камня.

2. Контактная теория удара.

При контактной теории удара удар рассматривают в месте контакта.

3. Теория удара, основанная на законе сохранения энергии.

Предполагается, что кинетическая энергия падающего тела полностью превращается в потенциальную энергию упругой деформации ударяемого элемента конструкции.

Определение. Ударная нагрузка – это когда деформация элемента конструкции происходит в основном за счет энергии, которой обладает падающее тело в начале воздействия на элемент конструкции, а не за счет силы тяжести падающего тела.

Примеры. Забивка свай, молот и наковальня и т. д.

Решение инженерных задач строится обычно на приближенной теории упругого удара, в которой принимают следующие допущения:

а) кинетическая энергия ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию деформации ударяемого тела;

б) при этом пренебрегают энергией идущей на деформацию ударяющего тела, и основанием, на котором находится ударяемое тело;

в) закон распределения напряжений и деформаций по объему ударяемого тела остается таким же, как и при статическом действии сил;

г) при этом не учитываются изменения распределения напряжений и деформаций в месте соударения (контакта) тел, за счет колебаний высокой частоты, сопровождающих явление удара.

При ударных нагрузках считается, что соблюдается закон Гука $\sigma_d = \varepsilon_d \cdot E$.

Фазы удара:

первая фаза характеризуется свободным падением груза, который с максимальной скоростью подходит к упругой системе;

вторая фаза – когда падающий груз, обладающий максимальной скоростью, входит в соприкосновение с упругой системой, находящейся в покое, уменьшает свою скорость, а элементы упругой системы приходят в движение. Фаза заканчивается, когда скорость выравнивается;

третья фаза характеризуется дальнейшим процессом развития удара, который отклоняет упругую систему в положение наибольшей деформации. Процесс заканчивается, когда скорость становится равной нулю, а деформации (перемещения) при этом максимальные.

Кинетическая энергия груза к моменту окончания удара превращается в потенциальную энергию упругой деформации ($T \rightarrow W$).

Напряжения при ударе определяются следующим образом [2]:

$$P_d = P_c \cdot \kappa_d,$$

где κ_d – динамический коэффициент [1, 2].

$$\kappa_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}},$$

где H – высота падения груза, м

$$H = \frac{v^2}{2 \cdot g}$$

$$\kappa_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g \cdot \delta_c}},$$

где $\delta_c = \delta_Q$ статическая деформация, м.

$$\kappa_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{W}},$$

где T – кинетическая энергия падающего груза ($T = Q \cdot H$), Дж;

W – потенциальная энергия упругой деформации ударяемого тела, Дж

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot \delta_c.$$

7.3.1 Виды ударов

Растягивающий (сжимающий) удар.

Примеры. Съёмники основаны на растягивающем ударе. Забивка свай (сжимающий удар).

Напряжения при растягивающем ударе определяются следующим образом:

$$\sigma_d = \kappa_d \cdot \sigma_c = \kappa_d \frac{F}{A} = \kappa_d \frac{Q}{A} = \frac{Q}{A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{\Delta l_c}} \right).$$

Деформации при растягивающем ударе определяются следующим образом:

$$\Delta l_d = \kappa_d \cdot \delta_c = \kappa_d \Delta l_c = \kappa_d \frac{Q \cdot l}{E \cdot A} = \frac{Q \cdot l}{E \cdot A} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{\Delta l_c}} \right).$$

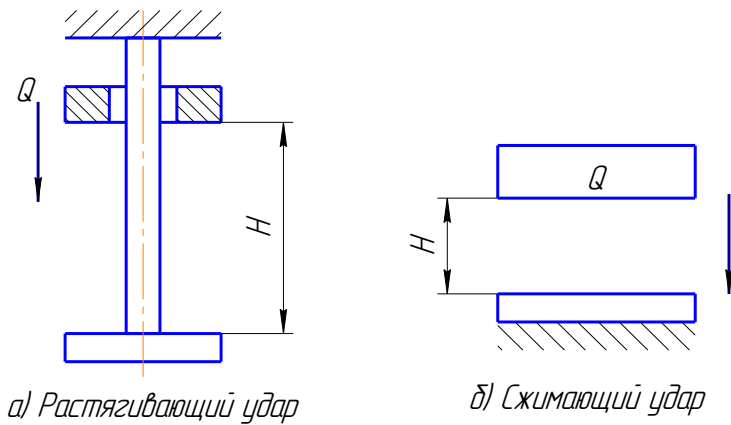


Рисунок 7.14 – Растягивающий (сжимающий) удар

При растягивающем (сжимающем) ударе деформации и напряжения зависят от длины стержня и модуля упругости.

Таким образом, для снижения напряжений увеличивают длину стержня.

Следовательно, при продольном ударе величина напряжений зависит от объема стержня.

Скручивающий удар.

Примеры. Колодочные тормоза автомобилей, талей, лебедок.

При скручивающем ударе наибольшие напряжения зависят от модуля упругости и объема вала.

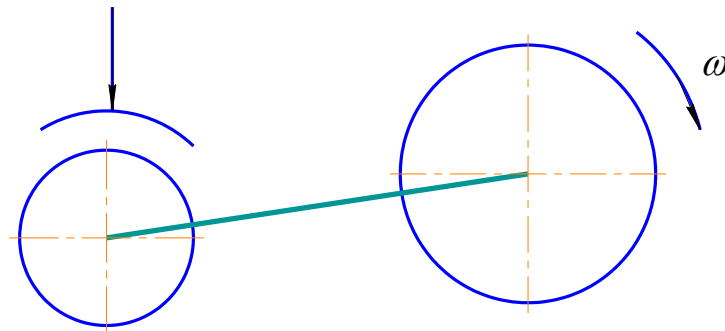


Рисунок 7.15 – Скручивающий удар

Напряжения при растягивающем ударе определяются следующим образом:

$$\tau_d = \kappa_d \cdot \tau_c = \tau_c \left(1 + \sqrt{1 + \frac{T}{W}} \right).$$

Деформации при растягивающем ударе определяются следующим образом:

$$\varphi_d = \kappa_d \cdot \varphi_c = \varphi_c \left(1 + \sqrt{1 + \frac{T}{W}} \right).$$

Кинетическая энергия при скручивающем ударе определяется по формуле

$$T = \frac{I_0 \cdot \omega^2}{2},$$

где I_0 – момент инерции, кг·м².

Потенциальная энергия упругой деформации при скручивающем ударе определяется по формуле

$$W = \frac{T^2 \cdot l}{2 \cdot G \cdot I_\rho}.$$

Изгибающий удар.

Примеры. Трамплин, удар груза по консоли балки.

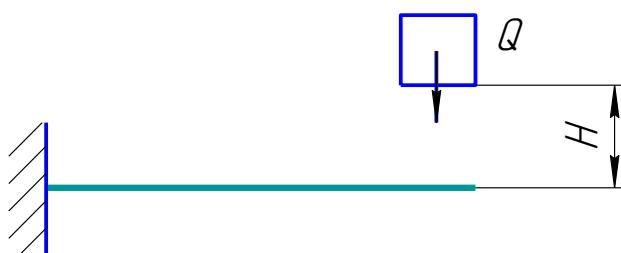


Рисунок 7.16 – Изгибающий удар

Напряжения при изгибающем ударе определяются следующим образом:

$$\sigma_d = \kappa_d \cdot \sigma_c = \kappa_d \frac{M}{W_x} = \frac{M}{W_x} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{\delta_c}} \right).$$

Деформации при растягивающем ударе определяются следующим образом:

$$\delta_d = \kappa_d \cdot \delta_c = \delta_c \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot H}{\delta_c}} \right).$$

Статические деформации определяются с использованием интеграла Мора

$$\delta = \int_{\ell} \frac{M(z) \cdot M^0(z)}{E \cdot I_x} \cdot dz.$$

При изгибающем ударе наибольший прогиб бывает в том случае, если напряжения по всей длине балки будут одинаковыми, то есть балка будет равного сопротивления. Данное свойство используют при изготовлении рессор автомобилей, которые представляют собой балки равного сопротивления.

Задача № 7

На двутавровую стальную балку (рисунок 7.18, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа), лежащую на двух опорах, с высоты h падает груз массой m . Требуется найти наибольшее динамическое напряжение и динамический прогиб в поперечном сечении балки под грузом и сравнить их статическими величинами. Данные взять из таблицы 7 и рисунка 7.20.

Таблица 7 – Исходные данные к задаче № 7

Номер строки	Масса m , кг	h , мм	l , м	№ профиля	№ схемы
1	110	100	1,1	Двутавр 30	1
2	100	150	1,2	Двутавр 27	2
3	90	200	1,3	Двутавр 24	3
4	80	250	1,4	Двутавр 22	4
5	70	300	1,6	Двутавр 20	5
6	60	350	1,6	Двутавр 18	6
7	50	400	1,7	Двутавр 16	7
8	40	450	1,8	Двутавр 14	8
9	30	500	1,9	Двутавр 12	9
10	20	550	2,0	Двутавр 10	10
11	40	320	2,2	Двутавр 24а	3
12	80	440	2,4	Двутавр 18а	2
13	230	200	2,3	Двутавр 22а	1
14	160	180	1,1	Швеллер 10	4
15	120	50	1,2	Швеллер 5	5
16	90	200	1,3	Швеллер 10	6
17	80	80	1,4	Швеллер 8	7
18	10	300	1,6	Швеллер 14	9
19	60	350	1,6	Швеллер 16	10
20	50	400	1,7	Швеллер 14а	8
21	40	450	1,8	Швеллер 18	5
22	30	500	1,9	Швеллер 30	6
23	20	550	2,0	Швеллер 20	7
24	60	320	2,2	Швеллер 14	9
25	80	440	2,4	Швеллер 33	10
26	130	200	2,3	Швеллер 36	8
27	200	120	1,8	Швеллер 40	1
28	90	140	1,9	Швеллер 22	2
29	50	240	1,5	Швеллер 22а	3
30	60	110	1,7	Швеллер 24	4

Пример расчета

Груз массой $m = 100$ кг падает с высоты $h = 100$ мм на стальную балку двутаврового сечения № 20 (рисунок 7.18) длиной $l = 4$ м, лежащей на двух опорах. Определить наибольший динамический прогиб в поперечном сечении балки под грузом и наибольшее динамическое напряжение для случаев изгиба балки в плоскости наибольшей и наименьшей жесткости. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Для двутавра № 20:

$I_x = 1840 \text{ см}^4$; $W_x = 184 \text{ см}^3$; $I_y = 115 \text{ см}^4$; $W_y = 23,1 \text{ см}^3$; $a = 1,5$ м; $b = 2,5$ м.

Решение

Удар поперечный. Определяем прогиб и напряжения при статическом нагружении.

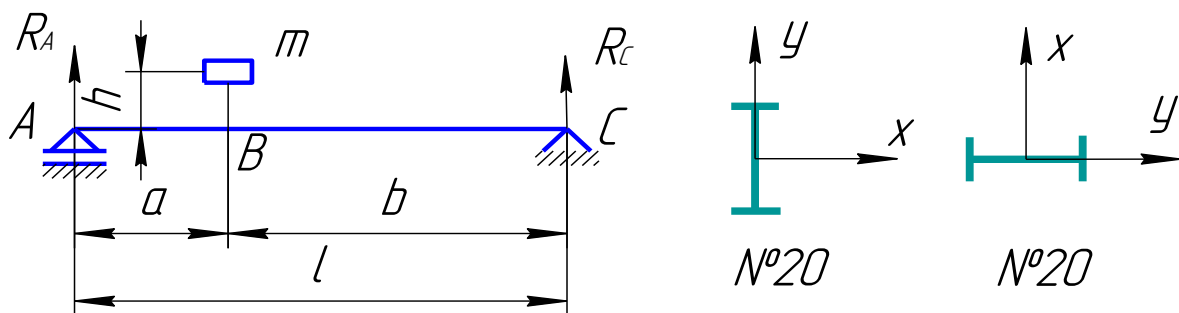


Рисунок 7.18 – Расчетная схема балки

Определим реакции опор от действия внешней нагрузки и составим уравнения изгибающих моментов по участкам:

$$\sum m_A = 0; \quad F \cdot a - R_C l = 0; \quad \text{откуда } R_C = \frac{Fa}{l}.$$

$$\sum m_C = 0; \quad -F \cdot b + R_A l = 0; \quad \text{откуда } R_A = \frac{Fb}{l}.$$

$$M_{z_1} = F \frac{b}{l} z_1; \quad M_{z_2} = F \frac{a}{l} z_2.$$

$$F = m \cdot g.$$

Выбираем основную систему и в той точке, где необходимо определить прогиб, и приложим единичную силу. Определим реакции опор от действия единичной силы и составим уравнения изгибающих моментов по участкам (рисунок 7.19):

$$\sum m_A = 0; \quad F^0 \cdot a - R_C^0 l = 0; \quad \text{откуда } R_C^0 = \frac{a}{l}.$$

$$\sum m_c = 0; \quad -F^0 \cdot b + R_A^0 l = 0; \quad \text{откуда } R_A^0 = \frac{b}{l}.$$

$$M_{z_1}^0 = \frac{b}{l} z_1, \quad M_{z_2}^0 = \frac{a}{l} z_2.$$

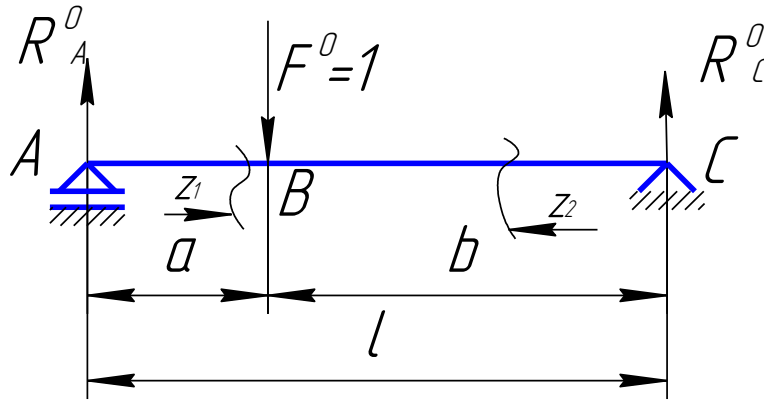


Рисунок 7.19 – Балка, нагруженная единичной силой

Используя интеграл Мора, определим статический прогиб:

$$\begin{aligned} \Delta \delta_c &= \int_0^a \frac{M_{z_1}^0 \cdot M_{z_1} dz_1}{E \cdot I_x} + \int_0^b \frac{M_{z_2}^0 \cdot M_{z_2} dz_2}{E \cdot I_x} = \int_0^a \frac{\frac{b}{l} z_1 F \frac{b}{l} z_1 dz_1}{E \cdot I_x} + \int_0^b \frac{\frac{a}{l} z_2 F \frac{a}{l} z_2 dz_2}{E \cdot I_x} = \\ &= \frac{F}{l^2 \cdot E \cdot I_x} \left(\int_0^a b^2 z_1^2 dz_1 + \int_0^b a^2 z_2^2 dz_2 \right) = \frac{F}{l^2 \cdot E \cdot I_x} \left(\frac{b^2 z_1^3}{3} \Big|_0^a + \frac{a^2 z_2^3}{3} \Big|_0^b \right) = \\ &= \frac{F \cdot a^2 b^2}{3 \cdot l^2 \cdot E \cdot I_x} (a + b) = \frac{F \cdot a^2 b^2}{3 \cdot l \cdot E \cdot I_x}. \end{aligned}$$

Определим значение силы $F = m \cdot g = 100 \cdot 9,81 = 981$ Н.

$$\Delta \delta_c = \frac{F \cdot a^2 b^2}{3 \cdot l \cdot E \cdot I_x} = \frac{981 \cdot 1,5^2 \cdot 2,5^2}{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = 0,0003 \text{ м} = 0,3 \text{ мм}.$$

$$\sigma_c = \frac{M_{max}}{W_x}$$

$$M_{max} = \frac{F \cdot a \cdot b}{l} = \frac{981 \cdot 1,5 \cdot 2,5}{4} = 920 \text{ Нм}.$$

$$\sigma_c = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{920}{184 \cdot 10^{-6}} = 5 \text{ МПа}.$$

$$\kappa_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta \delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100}{0,3}} = 27.$$

Динамический прогиб и наибольшие динамические напряжения

$$\Delta\delta_c = \kappa_d \cdot \Delta\delta_c = 27 \cdot 0,3 = 8,1 \text{ мм.}$$

$$\sigma_d = \kappa_d \cdot \sigma_c = 27 \cdot 5 = 135 \text{ МПа.}$$

При изгибе балки в плоскости наименьшей жесткости

$$\Delta\delta_c = \frac{F \cdot a^2 b^2}{3 \cdot l \cdot E \cdot I_x} = \frac{981 \cdot 1,5^2 \cdot 2,5^2}{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 115 \cdot 10^{-8}} = 0,005 \text{ м} = 5 \text{ мм.}$$

$$\sigma_c = \frac{M_{max}}{W_y} = \frac{920}{23,1 \cdot 10^{-6}} = 39,8 \text{ МПа.}$$

$$\kappa_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\Delta\delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 100}{5}} = 7,4.$$

$$\Delta\delta_c = \kappa_d \cdot \Delta\delta_c = 7,4 \cdot 5 = 37 \text{ мм.}$$

$$\sigma_d = \kappa_d \cdot \sigma_c = 7,4 \cdot 39,8 = 294,5 \text{ МПа.}$$

Выводы

При статическом действии нагрузки напряжение во втором случае больше, чем в первом в 7,96 раза, а при ее ударном действии – лишь в 2,18 раза. Это различие объясняется тем, что во втором случае жесткость балки значительно (в 16 раз) меньше, чем в первом, что приводит к существенному уменьшению динамического коэффициента.

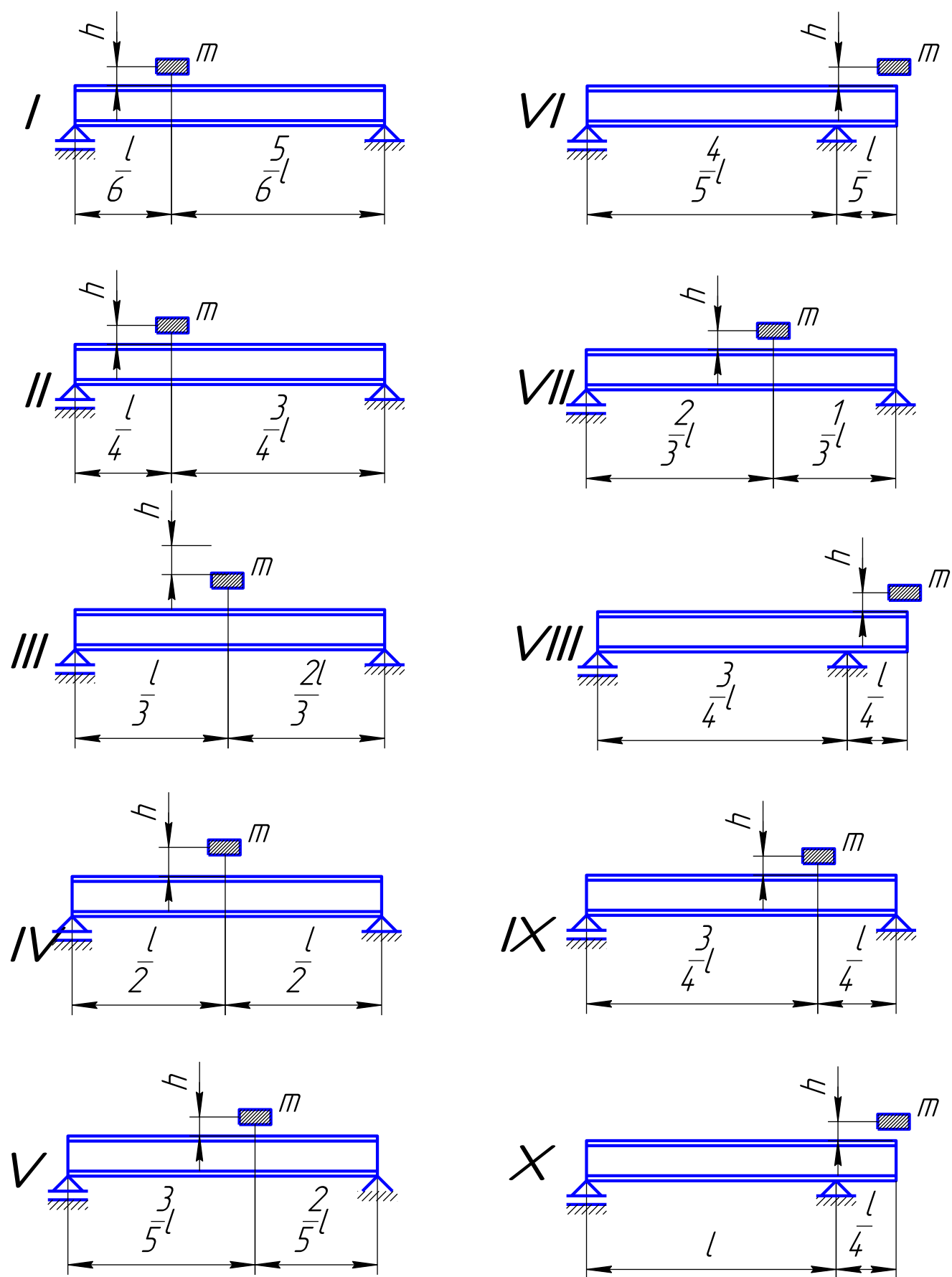


Рисунок 7.20 – Варианты схем к задаче № 7

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Внешние силы, их классификация.
2. Виды деформаций.
3. Дайте понятие о прочности, устойчивости и жесткости.
4. Дайте понятие о принципе Сен-Венана.
5. В чем заключается метод сечений? Что такое напряжение?
6. Принцип независимости действия внешних сил.
7. Основные гипотезы сопротивления материалов.
8. Определение напряжений при растяжении-сжатии. Расчеты на прочность при растяжении-сжатии.
9. Закон Гука при растяжении-сжатии. Определение деформаций при растяжении-сжатии. Расчеты на жесткость.
10. Какие механические свойства материала можно определить по диаграмме растяжения?
11. Напряжения в наклонных сечениях растянутого стержня.
12. Потенциальная энергия упругой деформации при растяжении-сжатии.
13. Что такое коэффициент Пуассона? В каких пределах он изменяется и от чего зависит его величина?
14. Как определяется статический момент площади, осевой, полярный моменты инерции?
15. Главные оси и главные моменты инерции.
16. Зависимость осевых и центробежных моментов инерции при параллельных осях.
17. Чистый сдвиг. Определение напряжений при сдвиге. Расчеты на прочность.
18. Закон Гука при сдвиге. Расчеты на жесткость при сдвиге.
19. Определение деформации при кручении. Расчеты на жесткость при кручении.
20. Определение касательных напряжений при кручении вала круглого сечения. Расчеты на прочность.
21. Расчеты на прочность при кручении вала прямоугольной формы. Как распределяются касательные напряжения по поперечному сечению вала?
22. Классификация видов изгиба.
23. Определение нормальных напряжений при изгибе. Эпюры распределения напряжений по поперечному сечению. Расчеты на прочность.

24. Определение касательных напряжений при изгибе. Формула Д.И. Журавского.

25. Полная проверка прочности балок, работающих на изгиб.

26. Что такое прогиб и угол поворота? Для чего их определяют?

27. Определение деформаций при изгибе при помощи интеграла Мора.

28. Методы (способы) определения деформаций при изгибе.

29. Что такое сложное сопротивление? Виды сложного сопротивления.

30. Косой изгиб. Определение напряжений при косом изгибе.

31. Уравнение нейтральной линии при косом изгибе.

32. Определение напряжений при внецентренном растяжении-сжатии.

33. Уравнение нейтральной линии при внецентренном растяжении (сжатии). Дайте понятие о ядре сечения.

34. Расчеты при совместном действии кручения, растяжения и изгиба.

35. Расчеты на прочность при совместном действии кручения и изгиба.

36. Что такое критическая сила? Формула Эйлера.

37. Предельная гибкость, от чего она зависит? Формула Ф.С. Ясинского.

38. График критических напряжений.

39. Что такое гибкость стойки и от чего она зависит? Способы крепления стоек.

40. Виды циклов напряжений, переменных во времени.

41. Дайте понятие о свободных и вынужденных колебаниях. Амплитуда вынужденных колебаний.

42. Цикл напряжений. Характеристики цикла напряжений.

43. Понятие о пределе выносливости.

44. Факторы, влияющие на величину предела выносливости. Ползучесть, релаксация.

45. Выбор допускаемых напряжений и условие прочности при переменных напряжениях.

46. Меры борьбы с изломами усталости.

47. Определение напряжений при равноускоренном движении.

48. Понятие о теории удара. Фазы удара.

49. Расчеты на прочность и жесткость при ударе.

ОБОЗНАЧЕНИЯ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

A	площадь поперечного сечения. Амплитуда цикла;
b	ширина поперечного сечения;
d	диаметр;
E	модуль продольной упругости материала;
EI	жесткость сечения при изгибе относительно главной центральной оси;
F	сосредоточенная сила;
F_x, F_y	составляющие силы по направлению главных осей x, y ;
$F_{кр}$	критическая нагрузка при расчете на устойчивость;
F_{max}	максимальное значение внешней сосредоточенной силы;
y	статический прогиб балки;
y_x, y_y	прогибы балки в направлении главных осей инерции сечения X, Y ;
G	модуль сдвига материала;
h	высота поперечного сечения образца, балки, высота образца;
I_x, I_y	осевые моменты инерции поперечного сечения;
I_p	полярный момент инерции поперечного сечения;
k_y	коэффициент запаса устойчивости;
l	длина стержня, балки;
Δl	абсолютное удлинение образца;
M	изгибающий момент;
M_x, M_y	внутренние изгибающие моменты в сечении балки относительно главных осей x, y ;
m	реактивный момент;
n	коэффициент запаса прочности;
T	крутящий момент;
W_p	полярный момент сопротивления круглого или кольцевого поперечного сечения;
W_x, W_y	осевые моменты сопротивления сечения относительно главных осей X, Y ;
φ	угол между направлением внешней нагрузки и главной осью сечения; угол закручивания;
$\varepsilon_l, \varepsilon$	относительная линейная поперечная, продольная деформации;
θ	угол поворота сечения балки;
λ	гибкость стержня;

μ	коэффициент Пуассона, коэффициент приведения длины стержня при расчете на устойчивость;
σ_y	предел упругости материала;
σ_{Π}	предел пропорциональности материала;
σ_T	предел текучести материала;
σ_B	предел прочности материала;
$\sigma_{\text{и}}$	истинное сопротивление разрыву;
σ_T	предел выносливости материала;
$\tau_{\text{шц}}$	предел пропорциональности при срезе, кручении;
τ_B	предел прочности при срезе, кручении.
k_d	коэффициент динамичности;
σ_d	динамические напряжения;
r	радиус, характеристика цикла;
δ_H	статическая деформация;
δ_Q	динамическая деформация;
ω_0	частота свободных колебаний;
ω	частота возмущающей силы.

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Внецентренное растяжение (сжатие) – это изгиб с растяжением (сжатием), когда на брус действует сила параллельная оси бруса, но не проходящая через центр тяжести бруса.

Вязкость – способность материала сопротивляться ударным нагрузкам.

Деформация – это изменение формы и размеров тела от воздействия внешней нагрузки или температуры.

Жесткость – способность материала сопротивляться деформации (изменению формы и размеров).

Изгиб – деформация, связанная с искривлением оси элемента конструкции.

Изгибающий момент M – это сумма моментов относительно главных центральных осей всех внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении.

Косой изгиб – это деформация, возникающая при воздействии внешней силы под углом к главным центральным осям балки.

Коэффициент Пуассона – величина, характеризующая отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной.

Критическая сила – это сила, выводящая сжатую стойку из устойчивой формы в неустойчивую.

Крутящий момент – деформация кручения, вызываемая парой сил, действующих в плоскости перпендикулярной оси элемента конструкции.

Модуль продольной упругости первого рода (модуль Юнга) характеризует сопротивляемость материала упругой деформации при растяжении (сжатии).

Напряжение – величина внутренних сил упругости, отнесенная к единице площади (элементарной площадке).

Напряженное состояние – совокупность напряжений для множества площадок, расположенных в поперечном сечении.

Нейтральная ось – пересечение нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения.

Нейтральный слой – слой волокон, делящий поперечное сечение на сжатую и растянутую зоны.

Осевой момент инерции – сумма произведений элементарных площадок на квадрат расстояния до оси.

Осевой момент сопротивления – отношение осевого момента инерции к расстоянию от оси до наиболее удаленной точки поперечного сечения.

Основная система – это статически определяемая система (конструкция) (СОС), получаемая из заданной отбрасыванием лишних связей и внешних нагрузок.

Относительная деформация (ε) – это отношение абсолютной деформации к его первоначальной длине.

Период – время, в течение которого переменное напряжение возвращается в первоначальное (исходное) положение.

Пластичность – способность материала сохранять деформацию после действия внешних сил.

Ползучесть – это непрерывно растущая во времени деформация материала, происходящая по действием постоянных по величине напряжений при повышенной температуре.

Полярный момент инерции – сумма произведений элементарных площадок на квадрат расстояния до оси вращения или полюса.

Полярный момент сопротивления – отношение полярного момента инерции к расстоянию от оси вращения до наиболее удаленной точки поперечного сечения.

Поперечная сила Q – это сумма проекций на ось перпендикулярную оси балки всех внутренних касательных сил, возникающих в поперечном сечении.

Поперечный изгиб – это когда в поперечном сечении балки возникают поперечные (перерезывающие силы).

Предел выносливости – это величина периодически меняющегося напряжения, которой материал может противостоять неограниченно долго без появления трещин усталости.

Предел прочности – величина напряжений, достижение которых обуславливает разрушение материала.

Предел текучести – величина напряжений, при которых при постоянной нагрузке материал испытывает деформации (течет).

Предел упругости – величина напряжений, при превышении которых материал получает незначительные деформации.

Прогиб – перемещение центра тяжести поперечного сечения по направлению перпендикулярному своему начальному положению.

Продольная (нормальная) сила N – это сумма проекций на продольную ось стержня (балки) всех внутренних нормальных сил, возникающих в поперечном сечении.

Прочность – способность материала сопротивляться разрушению от внешних сил.

Прямой (плоский изгиб) – это когда действие внешних сил совпадает с направлением одной из главных центральных осей балки.

Распределенная нагрузка это сила, равномерно приложенная на некоторой длине или площади.

Сдвиг – деформации, заключающиеся в перекашивании углов прямоугольного параллелепипеда.

Сосредоточенная сила – это сила давления на элемент конструкции через площадку, размеры которой очень малы по сравнению с размерами всего элемента конструкции.

Статический момент площади – сумма произведений элементарных площадок на расстояние до оси.

Твердость – способность материала сопротивляться вдавлению другого более твердого тела.

Угол поворота – поворот плоского сечения по отношению к своему первоначальному положению.

Упругость – способность материала принимать первоначальную форму и размеры после прекращения действия внешних сил.

Устойчивость – способность элемента конструкции сохранять без больших изменений первоначально приданную форму.

Центробежный момент инерции – сумма произведений элементарных площадок на расстояние до осей.

Чистый изгиб – это когда в поперечном сечении балки действует только изгибающий момент.

Эксцентриситет – расстояние от точки приложения силы до центра тяжести поперечного сечения.

Ядро сечения – это область вокруг центра тяжести при приложении в которую внешней силы в поперечном сечении возникают напряжения одного знака.

ЛИТЕРАТУРА

1. Межецкий, Г. Д. Сопротивление материалов: учебник / Г.Д. Межецкий, Г.Г. Загребин, Н.Н. Решетник и др. – 4-е изд., перераб. и доп. – Москва: Дашков и К, 2015. – 431 с. [Электронный ресурс]: (Режим доступа: <http://www.rucont.ru/efd/287072>).
2. Степин, П.А. Сопротивление материалов: учебник для втузов / П.А. Степин. – Москва: Лань, 2012. – 320 с.
3. Агапов, В.П. Сопротивление материалов. Курс лекций: учебное пособие для вузов / под общ ред. М.В. Шамолина. – Москва: Экзамен, 2009. – 287 с.
4. Овтов, В.А. Сопротивление материалов. Лабораторный практикум: учебное пособие / В.А. Овтов, Л.И. Чугунова, В.А. Чугунов. – Пенза: РИО ПГСХА, 2012. – 108 с.
5. Овтов, В.А. Сопротивление материалов: учебное пособие / В.А. Овтов. – Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – 107 с. [Электронный ресурс]: (Режим доступа: <http://rucont.ru/efd/232868>)

Приложение А

Основные единицы физических измерений системы СИ

Величина	Единица	
	название	обозначение
Длина	метр	м
Масса	килограмм	кг
Время	секунда	с
Термодинамическая температура	кельвин	К

Дополнительные единицы

Величина	Название	Обозначение
Плоский угол	радиан	рад
Площадь	квадратный метр	м ²
Объем	кубический метр	м ³
Момент сопротивления плоской фигуры	кубический метр	м ³
Момент инерции площади плоской фигуры	метр в четвертой степени	м ⁴
Плотность	килограмм на кубический метр	кг/м ³
Скорость линейная	метр в секунду	м/с
Скорость угловая	радиан в секунду	с ⁻¹
Ускорение линейное	метр на секунду в квадрате	м/с ²
Ускорение угловое	радиан на секунду в квадрате	с ⁻²
Сила	ньютон	Н
Момент силы, пары сил	ньютон·метр	Н·м
Удельный объем	кубический метр на килограмм	м ³ /кг
Напряжение, давление	паскаль	Па
Работа; энергия; количество теплоты	джоуль	Дж
Мощность	ватт	Вт

Приложение Б

Приставки СИ для образования десятичных и дольных единиц

Приставка	Сокращенное обозначение	Множитель, на который умножаются единицы СИ
Тера	Т	10^{12}
Гига	Г	10^9
Мега	М	10^6
Кило	к	10^3
Гекто	г	10^2
Дека	да	10
Деци	д	10^{-1}
Санتي	с	10^{-2}
Милли	м	10^{-3}
Микро	мк	10^{-6}
Нано	н	10^{-9}
Пико	п	10^{-12}
Фемто	ф	10^{-15}
Атто	а	10^{-18}

Приложение В

Буквы греческого алфавита

Буква	Обозначение	Буква	Обозначение
Альфа	А, α	Мю	М, μ
Бета	В, β	Ню	Н, ν
Гамма	Г, γ	Кси	Х, χ
Дельта	Д, δ	Пи	П, π
Эпсилон	Е, ε	Ро	Р, ρ
Дзета	З, ζ	Сигма	Σ, σ
Эта	Н, η	Тау	Т, τ
Тэта	Θ, θ	Фи	Ф, ϕ
Каппа	К, κ	Пси	Ψ, ψ
Ламбда	Λ, λ	Омега	Ω, ω

Приложение Г

Перевод внесистемных единиц физических измерений в систему СИ

Внесистемная единица	СИ и соотношение в ней
единица массы	
центнер (ц)	100 кг
тонна (т)	1000 кг
единицы плоского угла	
градус (°)	$\frac{\pi}{180}$ рад $\approx 1,75 \cdot 10^{-2}$ рад
минута (')	$\frac{\pi}{108} 10^{-2}$ рад $\approx 2,91 \cdot 10^{-4}$ рад
секунда (")	$\frac{\pi}{648} 10^{-3}$ рад $\approx 4,85 \cdot 10^{-6}$ рад
единица объема	
литр	10^{-3} м^3
единицы частот вращения	
оборот в минуту (об/мин)	мин ⁻¹
оборот в секунду (об/с)	с ⁻¹
единицы силы	
тонна-сила	9806,65 Н
килограмм-сила (кгс)	9,80665 Н
единицы мощности	
килограмм-сила-метр в секунду (кгс·м/с)	9,80665 Вт
лошадиная сила (л. с.)	735,499 Вт
единицы напряжения и давления	
килограмм-сила на квадратный сантиметр (кгс/см ²)	98066,5 Па
техническая атмосфера (ат)	98066,5 Па

Приложение Д

Физико-механические характеристики материалов

Материал	Модуль упругости $E \times 10^5$, МПа	Модуль сдвига $G \times 10^4$, МПа	Коэффици- ент Пуассона, μ	Удельный вес γ , кН/м ³
Сталь: углеродистая легированная	2,0...2,1 2,1...2,2	8,0...8,1	0,24...0,33 0,25...0,30	78,5 77,5...78,5
Серый чугун	0,78...1,5	4,4	0,23...0,27	68,0...76,0
Оловянистая бронза	0,75...1,2	—	0,32...0,35	87,6...88,2
Прокатная медь	1,0...1,1	4,3	0,28...0,34	89,4
Сплавы: алюминие- вые магнмиевые	0,69...0,71 0,39...0,44	2,7 —	0,33 0,34	26,4...28,0 17,6...18,0
Бетон с $\sigma_b = 20$ МПа	0,182...1,232	—	0,16...0,18	—
Дерево вдоль волокон	0,09...0,15	0,055	—	Сосна 4,8...5,4
Текстолит	0,04...0,06	—	—	13,0...14,5
Винипласт	0,03...0,04	—	0,35...0,37	13,8...14,3
Капрон	0,014...0,020	0,045...0,048	0,35...0,38	11,0...11,4
Полиэтилен НД	0,005...0,008	—	0,39	9,2...9,7
Каучук	0,00008	—	0,47	

Приложение Е

Значение коэффициента уменьшения основного допускаемого напряжения (φ)

$\lambda = \frac{\mu \ell}{i_{\min}}$	Сталь Ст.2, Ст.3, Ст.4	Сталь Ст.5	Чугун СЧ12-28, СЧ15-32, СЧ18-36, СЧ21-40	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,99
20	0,97	0,96	0,91	0,97
30	0,95	0,93	0,81	0,93
40	0,92	0,90	0,69	0,87
50	0,89	0,85	0,57	0,80
60	0,86	0,80	0,44	0,71
70	0,81	0,74	0,34	0,61
80	0,75	0,67	0,26	0,49
90	0,69	0,59	0,20	0,38
100	0,60	0,50	0,16	0,31
110	0,52	0,43	-	0,25
120	0,45	0,37	-	0,22
130	0,40	0,32	-	0,18
140	0,36	0,28	-	0,16
150	0,32	0,25	-	0,14
160	0,29	0,23	-	0,12
170	0,26	0,21	-	0,11
180	0,23	0,19	-	0,10
190	0,21	0,17	-	0,09
200	0,19	0,15	-	0,08
210	0,17	0,14	-	-
220	0,16	0,13	-	-

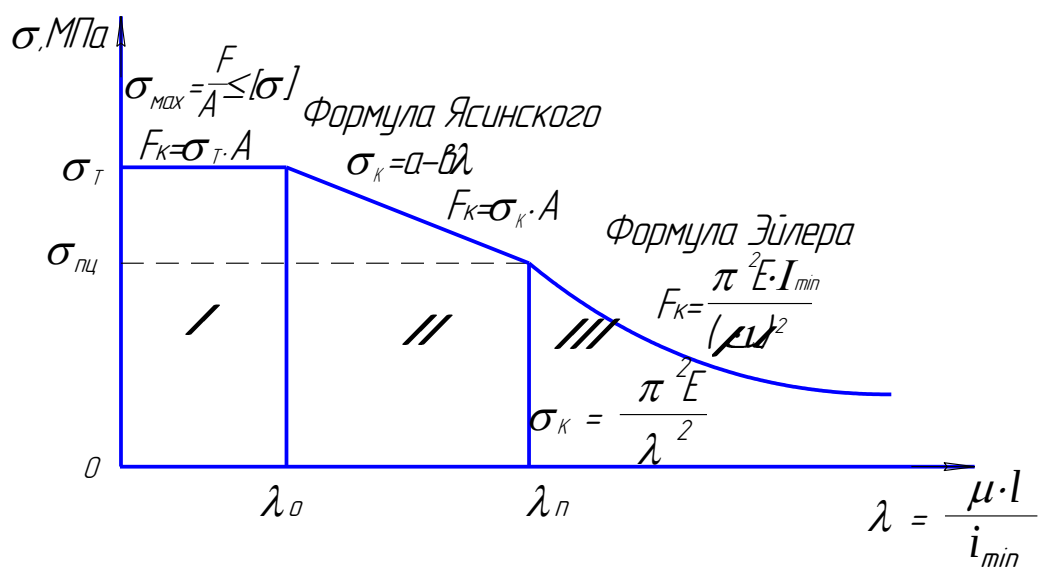
Значения a , b , λ_0 , $\lambda_{\text{пред}}$

Материал	<i>a</i>	<i>b</i>	λ_0	$\lambda_{\text{пред}}$
	МПа			
Стали 10, Ст. 2	264	0,70	62	105
Стали 15, Ст. 3	310	1,14	61	100
Стали 25, Ст. 5	350	1,15	57	92
Стали:				
10Г2СД, 15ГС, 15ХСНД	429	1,52	50	83
Дюралюминий Д16Т	406	2,83	30	53
Дерево (сосна, ель)	29,3	0,194		70

Для чугуна при $\lambda < \lambda_{\text{пред}} \approx 80$, пользуясь параболической зависимостью $\sigma_{\kappa} = 776 - 12\lambda + 0,053\lambda^2$

Продолжение приложения Е

График критических напряжений



Геометрические характеристики плоских сечений

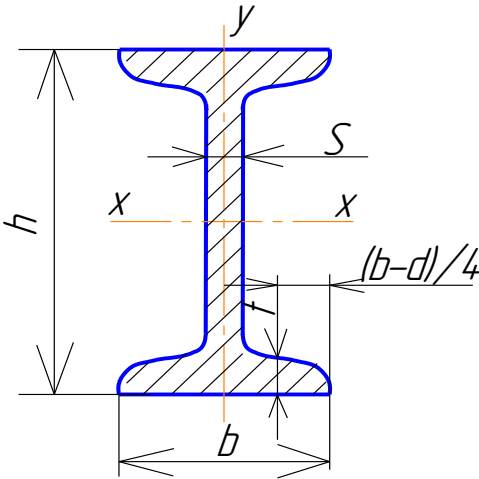
Форма сечения	A	J_x	J_y	J_p
	$b \cdot h$	$\frac{b \cdot h^3}{12}$	$\frac{h \cdot b^3}{12}$	$\frac{b \cdot h}{12} (b^2 + h^2)$
	$\frac{b \cdot h}{2}$	$\frac{b \cdot h^3}{36}$	$\frac{h \cdot b^3}{48}$	$\frac{b \cdot h}{12} \left(\frac{h^2}{3} + \frac{b^2}{4} \right)$
	$\frac{\pi d^2}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi (d^2 - d_0^2)}{4}$	$\frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4)$	$\frac{\pi d^4}{64} (1 - c^4)$	$\frac{\pi d^4}{32} (1 - c^4)$

Приложение Ж

Ряд диаметров по ГОСТ 6636-86, мм

10,0; 10,5; 11,0; 11,5; 12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21; 22;
24; 25; 26; 28; 30; 32; 34; 36; 38; 40; 42; 45; 48; 50; 53; 56; 60;
63; 67; 71; 75; 80; 85; 90; 95; 100; 105; 110; 120; 125; 130; 140;
150; 160; 170; 180; 190; 200; 210; 220; 240; 250; 260; 280; 300;
320; 340; 360; 380; 400; 420; 450; 480; 500...

Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8239-89



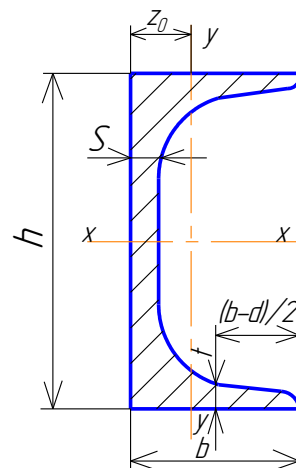
Двутавры

Номер балки	Размер, мм				Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочный материал для осей						
	h	b	s	t			x-x				y-y		
							I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см
10	100	55	4,5	7,2	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	14,7	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	17,4	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55

Продолжение приложения И1

Номер балки	Размер, мм				Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочный материал для осей						
	<i>h</i>	<i>b</i>	<i>s</i>	<i>t</i>			<i>x-x</i>				<i>y-y</i>		
							<i>I_x</i> , см ⁴	<i>W_x</i> , см ³	<i>i_x</i> , см	<i>S_x</i> , см ³	<i>I_y</i> , см ⁴	<i>W_y</i> , см ³	<i>i_y</i> , см
16	160	81	5,0	7,8	20,2	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	23,4	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	25,4	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	26,8	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07
20a	200	110	5,2	8,6	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,00	3,23
55	550	180	11,0	16,5	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,00	3,39
60	600	190	12,0	17,8	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8240-97



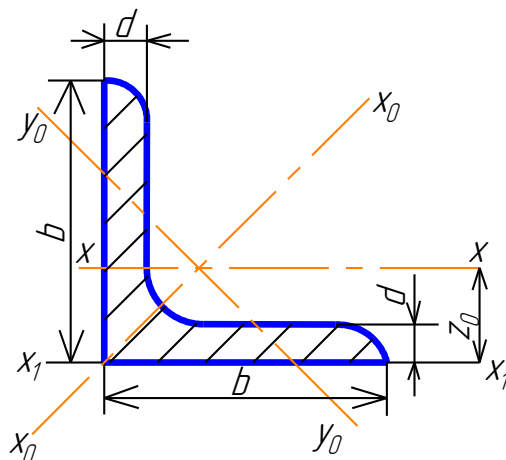
Швеллеры

№ профилей	Масса 1 м, кг	Размер, мм				Площадь сечения, см ²	Справочный материал для осей							Z ₀ , см
		h	b	s	t		x-x				y-y			
							I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8	7,05	80	40	4,5	7,4	8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	8,59	100	46	4,5	7,6	10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	10,4	120	52	4,8	7,8	13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	12,3	140	58	4,9	8,1	15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67

Продолжение приложения И2

№ профилей	Масса 1 м, кг	Размер, мм				Площадь сечения, см ²	Справочный материал для осей							Z ₀ , см
		h	b	s	t		x-x				y-y			
							I _x , см ⁴	W _x , см ³	i _x , см	S _x , см ³	I _y , см ⁴	W _y , см ³	i _y , см	
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	14,2	160	64	5,0	8,4	18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
18	16,3	180	70	5,1	8,7	20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
20	18,4	200	76	5,2	9,0	23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
22	21,0	220	82	5,4	9,5	26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	28,8	2330	212	8,90	121	187	30,0	2,55	2,46
24	24,0	240	90	5,6	10,0	30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
27	27,7	270	95	6,0	10,5	35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
30	31,8	300	100	6,5	11,0	40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
33	36,5	330	105	7,0	11,7	46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
36	41,9	360	110	7,5	12,6	53,4	10200	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
40	48,3	400	115	8,0	13,5	61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Сортамент прокатной стали в соответствии с ГОСТ 8509-93



Уголки стальные горячекатаные равнополочные

№ профилей	Размер, мм		Площадь профиля, см ²	Масса 1 м, кг	Справочный материал для осей							Z ₀ , см
	b	d			x–x		x ₀ –x ₀		y ₀ –y ₀		x ₁ –x ₁	
					I _x , см ⁴	i _x , см	I _{x₀} max, см ⁴	i _{x₀} max, см ⁴	I _{y₀} min, см ⁴	i _{y₀} min, см	I _{x₁} , см ⁴	
2	20	3	1,13	0,89	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
		4	1,46	1,15	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
2,5	25	3	1,43	1,12	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
		4	1,86	1,46	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
2,8	28	3	1,62	1,27	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
3,2	32	3	1,86	1,46	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
		4	2,43	1,91	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94

Продолжение приложения И3

№ профилей	Размер, мм		Площадь профиля, см ²	Масса 1 м, кг	Справочный материал для осей							Z ₀ , см
	b	d			x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁	
					I _x , см ⁴	i _x , см	I _{x0} max, см ⁴	i _{x0} max, см ⁴	I _{y0} min, см ⁴	i _{y0} min, см	I _{x1} , см ⁴	
3,6	36	3	2,10	1,65	2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
		4	2,75	2,16	3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
4	40	3	2,35	1,85	3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
		4	3,08	2,42	4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
		5	3,79	2,97	5,53	1,20	8,75	1,54	2,30	0,79	10,73	1,17
4,5	45	3	2,65	2,08	5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
		4	3,48	2,73	6,63	1,38	10,5	1,74	2,74	0,89	12,1	1,26
		5	4,29	3,37	8,03	1,37	12,7	1,72	3,33	0,88	15,3	1,30
5	50	3	2,96	2,32	7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
		4	3,89	3,05	9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
		5	4,80	3,77	11,2	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
5,6	56	4	4,38	3,44	13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
		5	5,41	4,25	16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57
6,3	63	4	4,96	3,90	18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
		5	6,13	4,81	23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
		6	7,28	5,72	27,1	1,93	42,9	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
7	70	4,5	6,20	4,87	29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
		5	6,86	5,38	31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
		6	8,15	6,39	37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
		7	9,42	7,39	43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
		8	10,7	8,37	48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,0	2,02

Продолжение приложения И3

№ профилей	Размер, мм		Площадь профиля, см ²	Масса 1 м, кг	Справочный материал для осей							Z ₀ , см
	b	d			x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁	
					I _x , см ⁴	i _x , см	I _{x₀} max , см ⁴	i _{x₀} max , см ⁴	I _{y₀} min , см ⁴	i _{y₀} min , см	I _{x₁} , см ⁴	
7,5	75	5	7,39	5,80	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
		6	8,78	6,89	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
		7	10,1	7,96	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
		8	11,5	9,02	59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113	2,15
		9	12,8	10,1	66,1	2,27	105	2,86	27,5	1,46	127	2,18
10	100	6,5	12,8	10,1	122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
		7	13,8	10,8	131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
		8	15,6	12,2	147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
		10	19,2	15,1	179	3,05	284	3,84	74,1	1,96	333	2,83
		12	22,8	17,9	209	3,03	331	3,81	86,9	1,95	402	2,91
		14	26,3	20,6	237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
		16	29,7	23,3	264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
11	110	7	15,2	11,9	176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
		8	17,2	13,5	198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
12,5	125	8	19,7	15,5	294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
		9	22,0	17,3	327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
		10	24,3	19,1	360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
		12	28,9	22,7	422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
		14	33,4	26,2	482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
		16	37,8	29,6	539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
14	140	9	24,7	19,4	466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
		10	27,3	21,5	512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
		12	32,5	25,5	602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90

Окончание приложения И3

№ профилей	Размеры, мм		Площадь профиля, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей							Z ₀ , см
	b	d			x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁	
					I _x , см ⁴	i _x , см	I _{x₀} max, см ⁴	i _{x₀} max, см ⁴	I _{y₀} min, см ⁴	i _{y₀} min, см	I _{x₁} , см ⁴	
16	160	10	31,4	24,7	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
		11	34,4	27,0	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
		12	37,4	29,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
		14	43,3	34,0	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
		16	49,1	38,5	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
		18	54,8	43,0	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
		20	60,4	47,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
18	180	11	38,8	30,5	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
		12	42,2	33,1	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
20	200	12	47,1	37,0	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
		13	50,9	39,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
		14	54,6	42,8	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
		16	62,0	48,7	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
		20	76,5	60,1	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
		25	94,3	74,0	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
		30	111,5	87,6	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
22	220	14	60,4	47,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
		16	68,6	53,8	3157	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
		16	78,4	61,5	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
		18	87,7	68,9	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
		20	97,0	76,1	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
25	250	22	106,1	83,3	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
		25	119,7	94,0	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
		28	133,1	104,5	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
		30	142,0	111,4	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Указания к выполнению контрольных работ	5
1 Расчеты на прочность и жесткость при растяжении (сжатии)..	7
1.1 Напряжения и деформации при растяжении (сжатии).....	7
2 Определение геометрических характеристик плоских сечений.....	18
2.1 Теоретические сведения о геометрических характеристиках плоских сечений.....	18
3 Расчеты на прочность и жесткость при кручении.....	28
3.1 Определение напряжений при кручении вала круглого сечения. Расчеты на прочность.....	28
3.2 Определение деформаций при кручении вала круглого сечения. Условие жесткости.....	29
3.3 Кручение стержней (валов) некруглого сечения.....	30
4 Расчеты на прочность и жесткость при изгибе.....	43
4.1 Нормальные напряжения при изгибе. Условие прочности	43
4.2 Правило знаков и контроль эпюр Q и M	45
4.3 Расчет балок на прочность по нормальным напряжениям....	47
4.4 Расчет балок на прочность по касательным напряжениям...	49
4.5 Главные и эквивалентные напряжения при изгибе.....	51
4.6 Линейные и угловые перемещения при прямом изгибе.....	53
4.7 Пример расчета на изгиб консольной балки	56
4.8 Пример расчета деформаций консольной балки	58
5 Сложное сопротивление.....	45
5.1 Внецентренное растяжение (сжатие).....	73
5.2 Косой изгиб.....	77
5.3 Изгиб с кручением.....	84
6 Продольный изгиб.....	96
6.1 Устойчивость сжатых стержней	96
7 Динамические нагрузки	109
7.1 Прочность при напряжениях, переменных во времени.....	109
7.1.1 Виды циклов напряжений и их характеристики.....	112
7.1.2 Виды циклов.....	114
7.1.3 План решения задачи при переменных напряжениях.....	116
7.2 Вычисление напряжений при равноускоренном движении..	118
7.3 Понятия о теории удара.....	124
7.3.1 Виды ударов.....	126

Контрольные вопросы.....	134
Обозначения физико-механических величин.....	136
Основные термины и определения.....	138
Литература.....	141
Приложения.....	142
Содержание.....	157

Владимир Александрович Овтов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие
для самостоятельной работы студентов

Компьютерная верстка

В.А. Овтова

Корректор

А.А. Артамонова

Сдано в производство
Бумага Гознак Print.
Тираж 100 экз.

Формат 60×84 ¹/₁₆
Усл. печ. л. 9,28.
Заказ №

РИО ПГАУ
440014, г. Пенза, ул. Ботаническая, 30