

Занятие 9. Задача коммивояжера. Алгоритм Литтла

Оглавление

Основные определения	1
Пример решения задачи.....	2
Задания для самостоятельной работы	6

Основные определения

В комбинаторике существуют задачи, которые по сути являются выбором на конечном множестве возможных вариантов, и каждая подобная задача может быть решена методом прямого перебора. Однако в большинстве реальных случаев такой метод «грубой силы» не применим. Время выполнения прямого перебора является экспоненциально возрастающей функцией от числа независимых переменных n , поэтому подобный подход на практике применим лишь к очень малым размерам входных данных.

Методы дискретной оптимизации, в частности метод ветвей и границ, позволяют находить оптимальные или приближительные решения для достаточно больших задач.

В общем случае - Метод ветвей и границ (англ. *branch and bound*) — общий алгоритмический метод для нахождения оптимальных решений различных задач оптимизации, особенно дискретной и комбинаторной оптимизации. По существу, метод является вариацией полного перебора с отсевом подмножеств допустимых решений, заведомо не содержащих оптимальных решений.

В качестве конкретной иллюстрации применения метода ветвей и границ для решения оптимизационных задач на графах рассмотрим задачу коммивояжера. Задача коммивояжера (англ. *Travelling salesman problem*, TSP) — одна из самых известных задач комбинаторной оптимизации, заключающаяся в отыскании самого выгодного маршрута, проходящего через указанные города хотя бы по одному разу с последующим возвратом в исходный город. В условиях задачи указываются критерий выгодности маршрута (кратчайший, самый дешёвый и т. п.) и соответствующие матрицы расстояний, стоимости и т. п. Как правило, указывается, что маршрут должен проходить через каждый город только один раз — в таком случае выбор осуществляется среди гамильтоновых циклов. Более формально задачу коммивояжера можно сформулировать следующим образом:

имеется n населенных пунктов ($n > 1$) с заданными между ними расстояниями a_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) (расстояния между городами задаются с помощью матрицы). Если прямого сообщения между пунктами i и j не существует, то полагаем $a_{ij} = \infty$. Также считаем $a_{ii} = \infty$, $i = 1, \dots, n$. Так как на некоторых дорогах допускается только одностороннее движение, то, вообще говоря, $a_{ij} \neq a_{ji}$. Требуется найти такой маршрут, начинающийся в данном населенном пункте, проходящий через все населенные пункты по одному разу и заканчивающийся в исходном пункте (такие циклы называются *гамильтоновыми*), чтобы его длина была минимальной.

Дж. Литтлом был предложен простой рекуррентный алгоритм решения

задачи коммивояжера. В основе этого алгоритма лежит последовательное преобразование составленных определенным образом матриц, приводящее каждый раз к одной из трех стандартных возможностей.

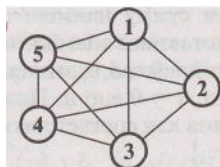
Сначала по данным решаемой задачи составляется исходная матрица. Затем эта матрица обрабатывается по определенной схеме, что приводит к более простым вариантам, также задаваемым в виде матриц. Повторное применение стандартных приемов к каждому из этих вариантов продолжается до тех пор, пока не будет получено окончательное решение задачи. Анализ каждой из матриц приводит к одной из трех возможностей:

1. Получению решения, когда решение находится непосредственно по исходной матрице, если задача достаточно проста.
2. Исклечению матрицы из дальнейшего рассмотрения, когда можно показать, что из нее не следует решение задачи.
3. Ветвлению, состоящему в том, что решаемая задача приводится к рассмотрению двух вариантов более простых задач.

На каждом шаге описываемого алгоритма задача включает n городов, причем из n шагов маршрута k шагов могут быть уже установлены, и нужно выбрать оптимальным образом оставшиеся $n-k$ шагов. Для всех возможных маршрутов необходимо задать значение Y , представляющее собой нижнюю границу стоимости всех возможных решений задачи, включая оптимальное.

Пример решения задачи

Рассмотрим решение задачи коммивояжера с помощью алгоритма Литтла. Пусть схема расположения городов задана с помощью следующего графа



Расстояния между населенными пунктами заданы с помощью матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \infty & 7 & 2 & 9 & 7 \\ 5 & \infty & 3 & 9 & 1 \\ 4 & 8 & \infty & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & \infty & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & \infty \end{pmatrix}$$

Здесь a_{ij} — это длина пути от пункта i до пункта j . Например, длина пути от пункта 2 до пункта 4 равна $a_{ij} = 9$. Решим задачу коммивояжера, используя алгоритм Литтла.

На каждом шаге мы либо включаем ребро (i,j) в ответ (и обозначаем это следующим образом: (i,j)), либо не включаем ребро (i,j) в ответ (и обозначаем это следующим образом: $\overline{(i,j)}$).

Находим минимум в 1-й строке (это 2) и вычитаем его из всех элементов 1-й строки. Находим минимум во 2-й строке (это 1) и вычитаем его из всех элементов 2-й строки. И т. д. Получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \infty & 7 & 2 & 9 & 7 & 2 \\ 5 & \infty & 3 & 9 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & \infty & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & \infty & 7 & 4 \\ 7 & 6 & 3 & 7 & \infty & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \infty & 5 & 0 & 7 & 5 & 2 \\ 4 & \infty & 2 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & \infty & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & \infty & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 4 & \infty & 3 \end{array} \right)$$

1 2 0 2 0

В полученной матрице находим минимумы в каждом столбце (1,2,0,2,0 - соответственно) и вычитаем их из всех элементов соответствующего столбца. Получим матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \infty & 3 & 0 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty & 3 \end{array} \right)$$

1 2 0 2 0 (18)

Найденные минимумы в строках и столбцах — это так называемые *константы приведения*. Их сумма равна 18 (число в правом нижнем углу). Это оценка снизу на данном шаге длины маршрута.

Определим дугу, исключение которой максимально увеличило бы полученную оценку. С этой целью заменяем поочередно каждый из нулей на ∞ и вычисляем сумму наименьших элементов в строке и столбце, содержащих этот новый элемент ∞ .

Для элемента (1, 3) это $3 + 0 = 3$, для элемента (2, 5) это $0 + 2 = 2$, для элемента (3, 1) это $0 + 0 = 0$ и т. д. Полученные суммы укажем в качестве верхних индексов для соответствующих нулей.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \infty & 3 & 0^3 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0^2 & 1 \\ 0^0 & 3 & \infty & 0^2 & 0^0 & 3 \\ 0^0 & 0^1 & 0^0 & \infty & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0^1 & 2 & \infty & 3 \end{array} \right)$$

Для элемента (1,3) эта сумма наибольшая. Поэтому все множество маршрутов распадается на два класса: $\overline{\{(1,3)\}}$ (не содержат дугу (1, 3)) и $\{(1,3)\}$ (содержат дугу (1, 3)).

Рассмотрим множество $\overline{\{(1,3)\}}$. Исключение дуги (1,3) проводится с помощью замены элемента (1, 3) на ∞ .

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \infty & 3 & \infty & 5 & 5 & 3 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty & 0 \end{array} \right)$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \infty & 3 & \infty & 5 & 5 & 3 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} \infty & 0 & \infty & 2 & 2 & 3 \\ 3 & \infty & 2 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \infty & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \infty & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & \infty & 0 \end{array} \right)$$

0 0 0 0 0 3

Нижняя граница множества $\overline{\{(1,3)\}}$ равна $H\{\overline{\{(1,3)\}}\} = 18$ (оценка на предыдущем шаге) + 3 (оценка на этом шаге) = 21.

Рассмотрим множество $\{(1, 3)\}$. Включение дуги (1, 3) проводится с помощью исключения 1-й строки (в множестве $\{(1, 3)\}$ из пункта 1 мы идем

только в пункт 3) и 3-го столбца (в множестве $\{(1, 3)\}$ в пункт 3 мы можем попасть только из пункта 1); элемент (3, 1) заменяем на ∞ (исключаем возможность образования негамильтонова цикла). Получим матрицу:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \end{array} \right) \\ 3 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & 3 \end{array} \right) \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & \infty \end{array} \right) \end{array}.$$

Здесь числа над матрицей и слева от матрицы — это номера строк и столбцов исходной матрицы. В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \end{array} \right) 0 \\ 3 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) 0 \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & 3 \end{array} \right) 0 \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 2 & \infty \end{array} \right) 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \end{array} \right) 0 \\ 3 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) 0 \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & 3 \end{array} \right) 0 \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right) 1 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (1) \end{array}$$

Нижняя граница множества $\{(1, 3)\}$ равна $H\{(1, 3)\} = 18$ (оценка на предыдущем шаге) + 1 (оценка на этом шаге) = 19.

Так как $H\{(1, 3)\} < H\{\overline{(1,3)}\}$ ($19 < 21$), то в дальнейшем работаем только с множеством $\{(1,3)\}$.

Для матрицы

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0 \end{array} \right) \\ 3 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & 3 \end{array} \right) \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right) \end{array}$$

определим дугу, исключение которой максимально увеличило бы полученную оценку $H\{(1,3)\} = 19$. С этой целью заменяем поочередно каждый из нулей на ∞ и вычисляем сумму наименьших элементов в строке и столбце, содержащих этот новый элемент ∞ . Полученные суммы укажем в качестве верхних индексов для соответствующих нулей.

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & 0^3 \end{array} \right) \\ 3 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 3 & 0^1 & 0^0 \end{array} \right) \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0^2 & 0^0 & \infty & 3 \end{array} \right) \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0^1 & 1 & \infty \end{array} \right) \end{array}.$$

Для элемента (2, 5) эта сумма наибольшая. Поэтому все множество маршрутов распадается на два класса: $\{(1, 3), \overline{(2,5)}\}$ (не содержат дугу (2, 5)) и $\{(1, 3), (2, 5)\}$ (содержат дугу (2, 5)).

Рассмотрим множество $\{(1, 3), \overline{(2,5)}\}$. Исключение дуги (2, 5) проводится с помощью замены элемента (2, 5) на ∞ :

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & \infty \end{array} \right) \\ 3 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & 3 \end{array} \right) \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right) \end{array}$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ 2 \left(\begin{array}{cccc} 3 & \infty & 6 & \infty \end{array} \right) 3 \\ 3 \left(\begin{array}{cccc} \infty & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) 0 \\ 4 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & 3 \end{array} \right) 0 \\ 5 \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right) 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & \infty & 3 & \infty \end{array} \right) 3 \\ \left(\begin{array}{cccc} \infty & 3 & 0 & 0 \end{array} \right) 0 \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \infty & 3 \end{array} \right) 0 \\ \left(\begin{array}{cccc} 2 & 0 & 1 & \infty \end{array} \right) 0 \\ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (3) \end{array}$$

Нижняя граница множества $\{(1, 3), \overline{(2,5)}\}$ равна $H\{(1, 3), \overline{(2,5)}\} = H\{(1, 3)\} + 3 = 19 + 3 = 22$.

Рассмотрим множество $\{(1, 3), (2, 5)\}$. Включение дуги $(2, 5)$ проводится с помощью исключения 2-й строки (в множестве $\{(1, 3), (2, 5)\}$ из пункта 2 мы идем только в пункт 5) и 5-го столбца (в множестве $\{(1, 3), (2, 5)\}$ в пункт 5 мы можем попасть только из пункта 2); элемент $(5, 2)$ заменяем на ∞ (исключаем возможность образования не-гамильтонова цикла). Получим матрицу:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 2 & \infty & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}.$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array} \text{ ①}$$

Нижняя граница множества $\{(1,3), (2,5)\}$ равна $H\{(1,3), (2,5)\} = H\{(1, 3)\} + 1 = 19 + 1 = 20 < H\{(1, 3), \overline{(2,5)}\} = 22$. Поэтому в дальнейшем ветвим множество $\{(1, 3), (2, 5)\}$.

Для матрицы

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \infty \\ 1 & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

определим дугу, исключение которой максимально увеличило бы полученную оценку $H\{(1,3), (2,5)\} = 20$. С этой целью заменяем поочередно нули на ∞ и вычисляем сумму наименьших элементов в строке и столбце, содержащих этот новый элемент ∞ . Полученные суммы укажем в качестве верхних индексов для нулей.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0^3 \\ 0^1 & 0^3 & \infty \\ 1 & \infty & 0^1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Для элементов $(4, 2)$ и $(3, 4)$ эта сумма наибольшая. Выберем любой из них. Например, $(4,2)$. В этом случае все множество маршрутов распадается на два класса: $\{(1, 3), (2, 5), \overline{(4,2)}\}$ (не содержат дугу $(4, 2)$) и $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$ (содержат дугу $(4, 2)$). _

Рассмотрим множество $\{(1, 3), (2, 5), \overline{(4,2)}\}$. Исключение дуги $(4, 2)$ проводится с помощью замены элемента $(4, 2)$ на ∞ :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} & \begin{pmatrix} \infty & 3 & 0 \\ 0 & \infty & \infty \\ 1 & \infty & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 2 & 4 & \\ 3 & \left(\begin{array}{ccc} \infty & 3 & 0 \end{array} \right) & 0 & 3 & \left(\begin{array}{ccc} \infty & 0 & 0 \end{array} \right) & 0 \\ 4 & \left(\begin{array}{ccc} 0 & \infty & \infty \end{array} \right) & 0 & 4 & \left(\begin{array}{ccc} 0 & \infty & \infty \end{array} \right) & 0 \\ 5 & \left(\begin{array}{ccc} 1 & \infty & 0 \end{array} \right) & 0 & 5 & \left(\begin{array}{ccc} 1 & \infty & 0 \end{array} \right) & 0 \\ \hline & 0 & 3 & 0 & & 0 & 3 & 0 & \textcircled{3} \end{array} \end{array} \rightarrow$$

Нижняя граница множества $\{(1, 3), (2, 5), \overline{(4,2)}\}$ равна $H\{(1,3), (2,5), \overline{(4,2)}\} = H\{(1, 3), (2, 5)\} + 3 = 20 + 3 = 23$.

Рассмотрим множество $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$. Включение дуги $(4, 2)$ проводится с помощью исключения 4-й строки (в множестве $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$ из пункта 4 мы идем только в пункт 2) и 2-го столбца (в множестве $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$ в пункт 2 мы можем попасть только из пункта 4). Получим матрицу:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 4 & & \\ 3 & \left(\begin{array}{cc} \infty & 0 \end{array} \right) & & & \\ 5 & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right) & & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 4 & & \\ 3 & \left(\begin{array}{cc} \infty & 0 \end{array} \right) & 0 & 3 & \left(\begin{array}{cc} \infty & 0 \end{array} \right) & 0 \\ 5 & \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \end{array} \right) & 0 & 5 & \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right) & 0 \\ \hline & 1 & 0 & & 1 & 0 & \textcircled{1} \end{array} \end{array} \end{array}$$

В полученной матрице нужно определить сумму констант приведения

Нижняя граница множества $\{(1, 3), (2,5), (4, 2)\}$ равна $H\{(1,3), (2, 5), (4, 2)\} = H\{(1, 3), (2, 5)\} + 1 = 20 + 1 = 21 < H\{(1,3), (2,5), \overline{(4,2)}\} = 23$. Поэтому в дальнейшем ветвим множество $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$.

В матрице

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & 1 & 4 & & \\ 3 & \left(\begin{array}{cc} \infty & 0 \end{array} \right) & & & \\ 5 & \left(\begin{array}{cc} 0 & 0 \end{array} \right) & & & \end{array} \end{array}$$

надо так выбрать нули, чтобы в каждой строке и каждом столбце был ровно один отмеченный нуль. Это элементы $(3, 4)$ и $(5, 1)$. Именно такие дуги и нужно добавить в множество $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2)\}$, то есть множество $\{(1, 3), (2, 5), (4, 2), (3, 4), (5,1)\}$ дает ответ на вопрос задачи. Оценка 21, полученная на предыдущем шаге, не меняется. Это минимальная длина маршрута.

А сам маршрут: $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1$. Сложив элементы $(1, 3), (3, 4), (4, 2), (2, 5), (5, 1)$ первоначальной матрицы $(2 + 5 + 6 + 1 + 7 = 21)$, можем убедиться, что длина этого маршрута действительно равна 21.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1.

Решить задачу коммивояжера для матрицы. Привести пошаговое объяснение выполнения алгоритма Литтла.

∞	3	6	1	4
9	∞	9	3	8
7	1	∞	7	5
1	4	6	∞	1
2	5	1	8	∞

Задача 2.

Решить задачу коммивояжера для матрицы. Привести пошаговое объяснение выполнения алгоритма Литтла.

∞	31	15	16	8	55
19	∞	22	31	7	35
25	43	∞	53	57	16
5	50	49	∞	39	9
24	24	33	5	∞	14
34	26	6	3	36	∞