Задание №1

Обработка информации о надежности машины с помощью математического пакета SMATH STUDIO DESKTOP

Исходную информацию о ресурсе машины записывают в текстовый файл с помощью простейшего редактора «Блокнот» в виде колонки (см. справа) , в том же каталоге, где будет находится протокол SMath Studio и задать имя текстового файла, например Res.txt. После этого создается протокол SMath Studio Desktop.

3561
3321
3527
3049
2314
4044
3879
4556
6192
4809
4985
4862
4916
4673
2956
4069
3244
4697
3818
3356
3277
3483
4558
3755
4090
5262
3294
4002
5108
4893
1099
1843
4206
3384
2802
4099

1. Вводят информацию из созданного текстового файла с информацией в протокол MathCad с помощью функции ***inportData*** и определяют количество информации с помощью функции ***length.***

Вектор ресурсов исследуемого объекта (X) в тыс. км пробега

$$X := \mathrm{importData}\left(\text{"Infa.txt"}\right)\cdot$$

Количество информации

$$N := \mathrm{length}\left(X\right) \quad N = 43$$

2. Строят вариационный ряд, располагая информацию о ресурсе машины в порядке возрастания с помощью функции ***sort***

$$X := \mathrm{sort}\left(X\right)\cdot$$

3. Определяют точечные характеристики распределения ресурса.

Для этого рассчитывают число интервалов (n) в статистическом ряду округляя до целых с помощью функции ***trunc***

$$n := \mathrm{trunc}\left(\sqrt{N}\right) + 1 + nd \;;\; n = 9$$

где nd – количество дополнительных интервалов, вводимых для улучшения вида графика $nd := 2\cdot$

Для того, чтобы вся информация о показателе надежности вошла в статистический ряд, величину интервала увеличивают с помощью коэффициента 1,001

$$dX := \frac{\max\left(X\right) - \min\left(X\right)}{n - nd} \cdot 1{,}001 \;; \quad dX = 10{,}439 \quad \text{тыс. км,}$$

где min(X), max(X) – минимальное и максимальное ресурсов в вариационном ряду (в векторе X).

Величина смещения распределения определяется по выражению

$$Xcm := \min\left(X\right) - 0{,}5 \cdot dX \;; \; Xcm = 10{,}7805 \quad \text{тыс. км.}$$

Среднее значение ресурса

$$Xcp := \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \;; \; Xcp = 49{,}814 \quad \text{тыс. км.}$$

Среднеквадратическое отклонение

$$\sigma := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} \left(Xcp - X_i\right)^2}{N-1}}; \quad \sigma = 18,5116$$ тыс. км.

Коэффициент вариации ресурса автомобиля

$$V := \frac{\sigma}{Xcp - Xcm}; \quad V = 0,4742$$

4. Проверяют информацию на выпадающие точки с помощью критерия Ирвина. Значение критерия определяют для минимального и максимального ресурса в вариационном ряду

$$\lambda_1 := \frac{X_2 - X_1}{\sigma}; \quad \lambda_1 = 0,2161;$$

$$\lambda_N := \frac{X_N - X_{N-1}}{\sigma}; \quad \lambda_N = 0;$$

Критическое значение критерия Ирвина для вероятности 0,99 принимают из приложения 6 или рассчитывают по эмпирической формуле

$$\lambda_{kr} := 1,4832 + \frac{4,41719}{N}; \quad \lambda_{kr} = 1,5859.$$

Так как расчетные значения критерия Ирвина меньше критического, то минимальное и максимальное значения ресурса в вариационном ряду не являются выпадающими и расчет может быть продолжен, в противном случае выпадающие точки следует удалить из текстового файла с исходной информацией и произвести пересчет пунктов 1-4.

5. Теоретический закон распределения выбирают по коэффициенту вариации. Так как коэффициент вариации находится в интервале 0,33–0,5 принимают в качестве закона распределения ресурса машины: закон нормального распределения (ЗНР) или закон распределения Вейбулла (ЗРВ).

Для визуального выбора закона распределения следует построить графики полигона распределения и дифференциальных функций выбранных теоретических законов.

Для построения графиков определяют вектор начальных и конечных значений наработки для каждого интервала и вектор средних значений для каждого интервала по выражениям

$$i := [1 .. n]$$

$$Xn_i := X_1 + dX \cdot (i - 2)$$

$$Xk := Xn + dX$$

$$Xc_i := Xn_i + \frac{dX}{2}.$$

Результаты расчетов располагает в виде строки

$$Xc = \begin{bmatrix} 10,7805 \\ 21,2195 \\ 31,6585 \\ 42,0975 \\ 52,5365 \\ 62,9755 \\ 73,4145 \\ 83,8535 \\ 94,2925 \end{bmatrix} \quad Xk = \begin{bmatrix} 16 \\ 26,439 \\ 36,878 \\ 47,317 \\ 57,756 \\ 68,195 \\ 78,634 \\ 89,073 \\ 99,512 \end{bmatrix} \quad Xn = \begin{bmatrix} 5,561 \\ 16 \\ 26,439 \\ 36,878 \\ 47,317 \\ 57,756 \\ 68,195 \\ 78,634 \\ 89,073 \end{bmatrix}.$$

Вектор частот попаданий информации в каждый из интервалов определяют с использованием элементов программирования.

Вначале обнуляют вектор частот

$$\begin{array}{l} \text{for } ii \in [1..n] \\ \quad m_{ii} := 0 \end{array}.$$

Затем проверяют на попадание каждого ресурса в один из интервалов и определяю частоты для каждого интервала.

$$\begin{array}{l} \text{for } ii \in [1..n] \\ \quad \text{for } j \in [1..N] \\ \quad\quad m_{ii} := \text{if}\left(\left(X_j \ge Xn_{ii}\right) \wedge \left(X_j < Xk_{ii}\right)\right) \\ \quad\quad\quad\quad \left(m_{ii} + 1\right) \\ \quad\quad\quad\quad \text{else} \\ \quad\quad\quad\quad m_{ii} \end{array}$$

Провидят проверку попадания всей информации в интервалы статистического ряда

$$\sum_{ii=1}^{n} m_{ii} = 43.$$

Определяют вектор опытной вероятности для каждого интервала P

$$P := \frac{m}{N}.$$

Рассчитывают накопленные опытные вероятности ΣP, соответствующие наработке конца интервала, предварительно задавшись индексом интервала $z := [1..n]$

$$Ps_z := \sum_{iz=1}^{z} P_{iz}.$$

Результаты расчетов по указным выше векторам приводят одновременно для обеспечения компактности протокола.

$$m = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 5 \\ 9 \\ 11 \\ 7 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad Ps = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,13953 \\ 0,25581 \\ 0,46512 \\ 0,72093 \\ 0,88372 \\ 0,93023 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,1395 \\ 0,1163 \\ 0,2093 \\ 0,2558 \\ 0,1628 \\ 0,0465 \\ 0,0698 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Для построения гистограммы (ступенчатого графика), представляют его в виде совокупности отрезков и определяют координаты их начала и окончания

Результаты определения координат отрезков заносим в матрицу R

```
for  j ∈ [1..(3·n)]
  for  i ∈ [1..n]
   if  j = 1 + 3·(i − 1)
      R[j,1] := Xn[i]
      R[j,2] := 0
   else
      1
   if  j = 2 + 3·(i − 1)
      R[j,1] := Xn[i]
      R[j,2] := P[i]
   else
      1
   if  j = 3 + 3·(i − 1)
      R[j,1] := Xk[i]
      R[j,2] := P[i]
   else
      1
```

$$R = \begin{bmatrix} 5,561 & 0 \\ 5,561 & 0 \\ 16 & 0 \\ 16 & 0 \\ 16 & 0,1395 \\ 26,439 & 0,1395 \\ 26,439 & 0 \\ 26,439 & 0,1163 \\ 36,878 & 0,1163 \\ 36,878 & 0 \\ 36,878 & 0,2093 \\ 47,317 & 0,2093 \\ 47,317 & 0 \\ 47,317 & 0,2558 \\ 57,756 & 0,2558 \\ & \vdots \end{bmatrix}$$

Отдельно определяют координаты конца последнего отрезка гистограммы

$$R_{j+1\,2} := 0 \; ; \; R_{j+1\,1} := Xk_{i}.$$

Для построения графиков помощью функция (***augment***) создают массивы образованные последовательным размещением аргументов и функций друг рядом с другом (слева на право):

данные для построения полигона

$$Pod := \mathrm{augment}(Xc\,;\,P);$$

данные для построения кривой накопленных опытных вероятностей

$$sPod := \mathrm{augment}(Xk\,;\,Ps);$$

данные для построения гистограммы Так как ***массиве Gistogramma*** используется индекс j , то задаются пределами его изменения $j := \left[1 .. (3 \cdot n + 1)\right]$.

$$Gistogramma := \text{augment}\left(R_{j\,1} ; R_{j\,2}\right).$$

Графики строят по опытным данным.

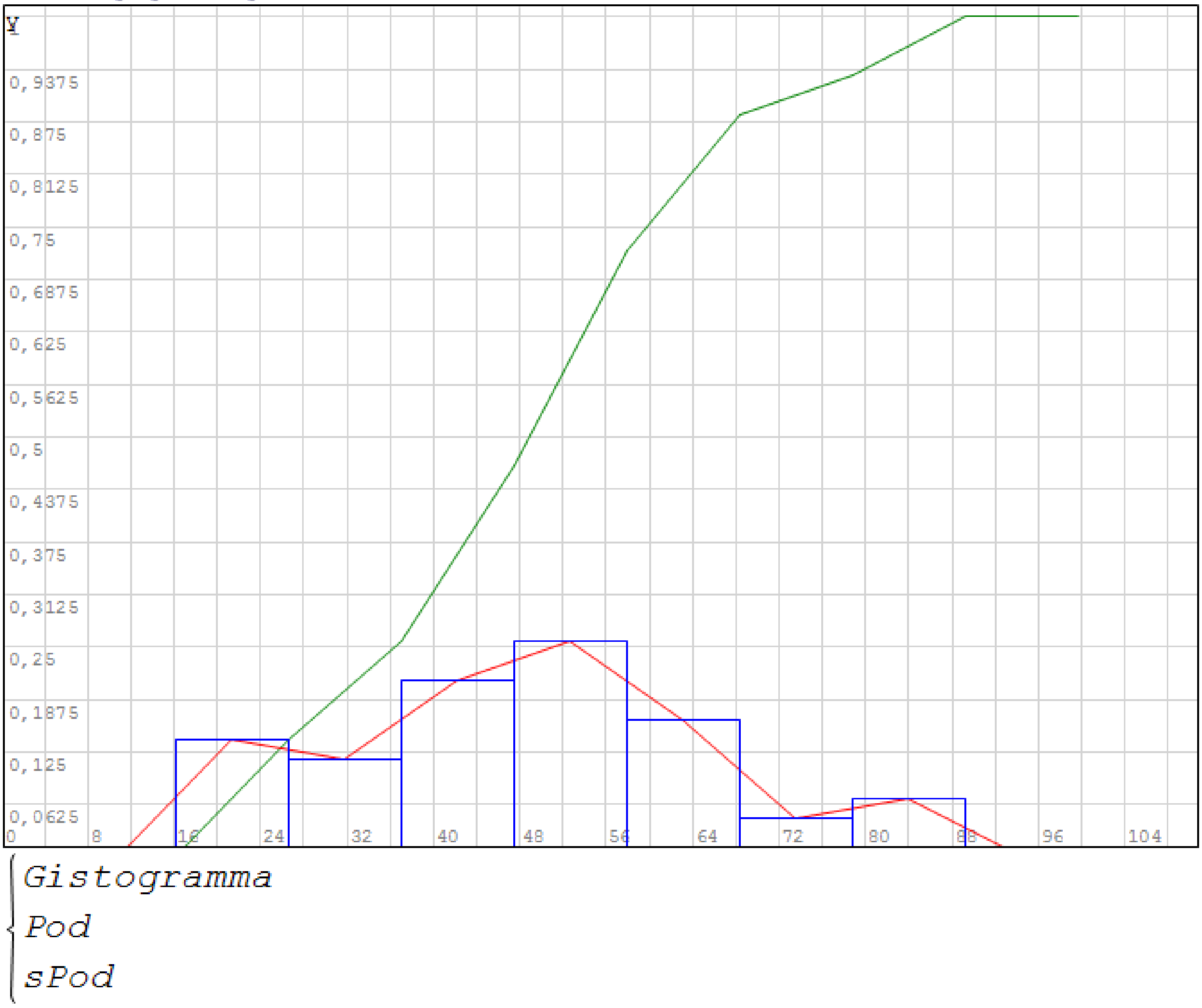

Рисунок 1 – Опытные зависимости распределения ресурса машины (полигон (красная линия), гистограмма (синяя линия), кривая накопленных опытных вероятностей (зеленая линия))

Перед построением сравнительных графиков (рисунок 2) определяют значения дифференциальных функций теоретических законов распределения для каждого интервала.

Дифференциальную функцию нормального закона распределения рассчитывают, предварительно задавшись индексом аргументов и функций $i := [1 .. n]$ по формуле

$$fN_i := \frac{dX}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-\left(Xc_i - Xcp\right)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$$

Для построения графика дифференциальной функции нормального закона распределения вводят ее формулу от переменной «х»

$$fNg(x) := \frac{dX}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{\frac{-(x - Xcp)^2}{2 \cdot \sigma^2}}.$$

Для расчета дифференциальной функции закона Вейбулла определяют параметры этого закона:

параметр формы закона Вейбулла **b**

$$b := \frac{1}{V^{1,06}}; \quad b = 2,2051 \quad ,$$

масштабный параметр **a** рассчитывают**,** по формуле

$$a := 1,11 \cdot (Xcp - Xcm); \quad a = 43,3271$$ тыс. км.

Дифференциальную функцию закона распределения Вейбулла рассчитывают по формуле

$$fW_i := \frac{b \cdot dX}{a} \cdot \left(\frac{Xc_i - Xcm}{a}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{Xc_i - Xcm}{a}\right)^b}.$$

Для построения графика дифференциальной функции закона распределения Вейбулла вводят ее формулу от переменной «х»

$$fWg(x) := \frac{b \cdot dX}{a} \cdot \left(\frac{x - Xcm}{a}\right)^{b-1} \cdot e^{-\left(\frac{x - Xcm}{a}\right)^b}$$

Результаты расчета дифференциальных функций представляют виде векторов

$$fN = \begin{bmatrix} 0,0244 \\ 0,0682 \\ 0,1391 \\ 0,2062 \\ 0,2226 \\ 0,1747 \\ 0,0998 \\ 0,0415 \\ 0,0125 \end{bmatrix} \qquad fW = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,0915 \\ 0,1805 \\ 0,2204 \\ 0,2022 \\ 0,1472 \\ 0,087 \\ 0,0421 \\ 0,0167 \end{bmatrix}$$

Для построения сравнительных графиков опытных и теоретических данных используют дифференциальные функции теоретических законов (ЗНР, ЗРВ) в зависимости от аргумента «х»

Как видно из сравнительного графика (рисунок 2), оба предварительно выбранных закона хорошо согласуются с опытными данными.

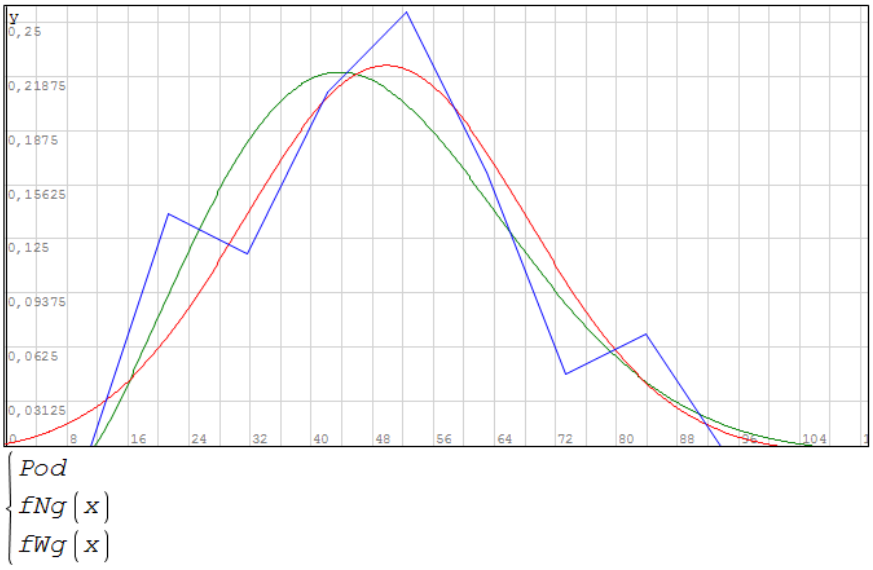

Рисунок 2 – Полигон распределения (синяя линия) и дифференциальные функции теоретических законов (ЗНР (красная линия)и ЗРВ (зеленая линия))

6. Для более точного выбора закона распределения используют критерий Пирсона $\chi 2$:

для закона нормального распределения

$$X2зрв := \sum_{i=2}^{n-nd} \frac{\left(P_i - fW_i\right)^2}{fW_i} \; ; \; X2знр = 0{,}1125 \quad ,$$

для закона распределения Вейбулла

$$X2знр := \sum_{i=2}^{n-nd} \frac{\left(P_i - fN_i\right)^2}{fN_i} \; ; \; X2зрв = 0{,}0833 \quad .$$

Так как расхождения между опытными и теоретическими данными меньше у закона распределения Вейбулла, а значение критерия X2 не превышает 1, то принимают закон распределения Вейбулла, в качестве закона распределения ресурса машины,

7. Интервальные характеристики распределения ресурса генеральной совокупности машин определяют с использованием доверительной вероятности $\alpha := 0{,}9$.

Для одиночного значения показателя надежности по закону нормального распределения при $t\alpha := 1{,}69$.

нижняя доверительная граница одиночного значения ресурса

$X н\alpha\_знр := Xср - t\alpha \cdot \sigma$; $Xн\alpha\_знр = 23{,}5844$ тыс. км;

верхняя доверительная граница одиночного значения ресурса

$Xв\alpha\_знр := (Xср + t\alpha \cdot \sigma)$; $Xв\alpha\_знр = 80{,}6537$ тыс. км;

доверительный интервал для одиночного значения $I\alpha\_знр := Xв\alpha\_знр - Xн\alpha\_знр$; $I\alpha\_знр = 57{,}0693$ тыс. км.

Для среднего значения показателя надежности по закону нормального распределения при $t\alpha := 1{,}69$

нижняя доверительная граница среднего значения ресурса

$$Xнαср\_знр := Xср - tα \cdot \frac{σ}{\sqrt{N}}; \; Xнαср\_знр = 47,7161$$ тыс. км.

верхняя доверительная граница среднего значения ресурса

$$Xвαср\_знр := Xср + tα \cdot \frac{σ}{\sqrt{N}}; \; Xвαср\_знр = 56,522$$ тыс. км;

доверительный интервал для среднего значения

$$Iαср\_знр := Xвαср\_знр - Xнαср\_знр; \; Iαср\_знр = 8,806$$ тыс. км.

Для одиночного значения показателя надежности по закону распределения Вейбулла

нижняя доверительная граница одиночного значения ресурса для ЗРВ

$$Xнα\_зрв := a \cdot \left(\left(-\ln\left(\frac{1+α}{2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{b}} + Xсm; \; Xнα\_зрв = 22,04693$$ тыс. км;

верхняя доверительная граница одиночного значения ресурса для ЗРВ

$$Xвα\_зрв := a \cdot \left(\left(-\ln\left(\frac{1-α}{2}\right)\right)\right)^{\frac{1}{b}} + Xсm; \; Xвα\_зрв = 82,04102$$ тыс. км;

доверительный интервал для одиночного значения

$$Iα\_зрв := Xвα\_зрв - Xнα\_зрв; \; Iα\_зрв = 54,9552$$ тыс. км.

Для среднего значения показателя надежности по закону распределения Вейбулла при $r1 := 1,26$, $r3 := 0,81$

нижняя доверительная граница среднего значения ресурса

$$Xнαср\_зрв := (Xср - Xсm) \cdot r3^{\frac{1}{b}} + Xсm; \; Xнαср\_зрв = 46,2566$$ тыс. км;

верхняя доверительная граница среднего значения ресурса

$$Xвαср\_зрв := (Xср - Xсm) \cdot \sqrt[b]{r1} + Xсm; \; Xвαср\_зрв = 54,127$$ тыс. км;

доверительный интервал для среднего значения

$$Iαср\_зрв := Xвαср\_зрв - Xнαср\_зрв \quad Xвαср\_зрв = 56,0349$$ тыс. км.

Для расчета относительной ошибки переноса следует рассчитать верхнюю одностороннюю доверительную границу при $αo := 2 \cdot α - 1$; $αo = 0,8$; $tαo := 1,3$ (приложение 8)

$$Xoвαср := Xср + tαo \cdot \frac{σ}{\sqrt{N}}; \; Xoвαср = 55,506$$ тыс. км

$$δ := \frac{Xoвαср - Xср}{Xср - Xсm} \cdot 100; \; δ = 9,4019$$ %.

Вывод: на основании результатов обработки информации о ресурсе 43 объектов определено, что одиночное значение ресурса находится в пределах 22 – 82 ыс. км, а среднее значение ресурса – 46,2 – 54,1 тыс. км при доверительной вероятности 0,9 и относительной ошибке переноса, составляющей 9,4 %.