Вариант	p	n	Вариант	p	n
1	0,5	4	4	0,7	2
2	0,7	3	5	0,5	3
3	0,6	3	6	0,6	4

2.5. На пути движения рыбы к месту нереста находятся n шлюзов. Вероятность прохода рыбы через шлюз равна p. Найти: а) среднее число шлюзов, пройденных рыбой; б) его среднее квадратическое отклонение.

Вариант	p	n	Вариант	p	n
1	0,6	3	4	0,5	4
2	0,7	4	5	0,4	5
3	0,8	5	6	0,9	3

2.6. Две независимые дискретные случайные величины X и Y заданы рядами распределения:

x_i	-1	0	2
p_i	0,3	0,5	0,2

y_j	3	4
p_j	0,7	0,3

Найти: а) $M(Z)$; б) $D(Z)$ в) $M(T)$, где $Z = \alpha X + \beta Y - \gamma$; $T = \alpha XY + \beta$.

Вариант	α	β	γ	Вариант	α	β	γ
1	2	-3	4	4	3	-5	2
2	-1	5	3	5	6	4	-3
3	4	2	-1	6	-2	1	4

ТЕМА 3 ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Литература

[1], глава 4, § 4.1, 4.2, 4.3.

[2], глава 6, § 4, 5, 6, 7.

Биномиальный закон распределения

Дискретная случайная величина X имеет *биномиальное распределение* (или *распределена по биномиальному закону*), если она принимает значения *0, 1, 2, 3,…,n*, с вероятностями:

$$p_m = P(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (3.1)$$

где $0 < p < 1$, $\quad q = 1 - p$, $\quad m = 0,1,2,...,n$.

Случайная величина X, распределенная по биномиальному закону, является числом успехов с вероятностью p в схеме Бернулли проведения n независимых опытов.

Ряд распределения дискретной случайной величины X, имеющей биномиальное распределение, имеет вид:

$X=m$	0	1	2	…	m	…	n
p_m	q^n	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Контроль: $\sum_{m=0}^{n} p_m = (p+q)^n = 1$.

Замечание. При достаточно больших $n>10$ вычисление вероятностей возможных значений случайной величины по формуле Бернулли становится трудоемким. Поэтому для их вычисления применяют локальную формулу Лапласа.

Числовые характеристики биномиального распределения:

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq; \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}. \qquad (3.2)$$

Распределение Пуассона

Дискретная случайная величина X имеет *распределение Пуассона*, если ее возможные значения: $0,1,2,...,m,...$ (бесконечное, но счетное множество значений), а соответствующие вероятности выражаются формулой Пуассона

$$p_m = P(X = m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, \text{ где } m = 0,1,2,\ldots,\ \lambda \text{ - параметр.} \quad (3.3)$$

Распределение Пуассона является предельным для биномиального, когда $n \to \infty$ и $p \to 0$ так, что $np = \lambda$ - постоянно.

Случайная величина *X*, распределенная по закону Пуассона, имеет следующий ряд распределения

$X=m$	0	1	2	...	m	...
p_m	$e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 \cdot e^{-\lambda}}{2!}$	...	$\frac{\lambda^m \cdot e^{-\lambda}}{m!}$	...

Контроль: $\sum\limits_{m=0}^{\infty} p_m = e^{-\lambda} \sum\limits_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$

Числовые характеристики случайной величины *X*, распределенной по закону Пуассона, будут иметь вид:

$$M(X) = D(X) = \lambda; \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \quad (3.4)$$

Геометрический закон распределения

Дискретная случайная величина *X* имеет *геометрическое распределение*, если ее возможные значения: *1,2,...,m,...* (бесконечное, но счетное множество значений), а соответствующие вероятности выражаются формулой:

$$p_m = P(X = m) = pq^{m-1}, \quad (3.5)$$

где $0 < p < 1$, $\quad q = 1 - p, \quad m = 1,2,\ldots.$

Ряд распределения дискретной случайной величины *X*, имеющей геометрическое распределение, имеет вид:

$X=m$	1	2	3	...	m	...
p_m	p	qp	$q^2 p$	...	$q^{m-1} p$	...

Контроль: $\sum\limits_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = p\sum\limits_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p \cdot \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$

Вероятности p_m образуют геометрическую прогрессию $p, qp, q^2 p, q^3 p, \ldots$. По этой причине распределение называют *геометрическим*.

Случайная величина $X = m$, имеющая геометрическое распределение, представляет собой число m испытаний, проведенных по схеме Бернулли, с вероятностью p наступления события в каждом испытании до первого положительного исхода.

Числовые характеристики случайной величины *X*, распределенной по геометрическому закону, будут иметь вид

$$M(X) = \frac{1}{p}; \quad D(X) = \frac{q}{p^2}; \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{q}}{p}. \quad (3.6)$$

Примеры решения задач

Пример 3.1. Склады семенного картофеля перед посадкой поверяют на отсутствие очагов гниения. В проверенном отсеке склада оказалось 25% клубней с пятнами. Найти среднее число пораженных клубней из четырех, взятых наудачу, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа пораженных клубней.

Решение.

Проверка каждого клубня является независимым испытанием. Всего таких испытаний проводится *n*=4, в каждом из которых событие *A* (клубень поражен) наступает с одной и той же вероятностью *p*=0,25. Следовательно, случайная величина *X* – число пораженных клубней – распределена по биномиальному закону.

Числовые характеристики можно вычислить по формулам (3.2) без построения ряда распределения *X*:

$M(X) = np = 4 \cdot 0{,}25 = 1;$

$D(X) = npq = 4 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75 = 0{,}75;$

$\sigma(X) = \sqrt{0{,}75} = 0{,}86.$

Пример 3.2. Из партии деталей выбирают 600 деталей. Известно, что в партии находилось в среднем 5% бракованных деталей. Найти среднее число бракованных деталей среди отобранных и среднее квадратическое отклонение числа бракованных деталей от среднего.

Решение.

Испытание – проверка качества деталей, $n=600$.

Событие A – деталь оказалась бракованной.

$$p = P(A) = 0{,}05, \quad q = 0{,}95.$$

Случайная величина X – число бракованных деталей среди 600 отобранных – распределена по биномиальному закону ($np>10$).

Используя формулы (3.2), получим:

$$M(X) = np = 600 \cdot 0{,}05 = 30.$$

$$D(X) = npq = 600 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95 = 28{,}5.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{28{,}5} = 5{,}3.$$

Пример 3.3. Среди семян пшеницы находится 0,6% семян сорняков. Наудачу отобрали 1000 семян. Каково среднее число семян сорняков среди отобранных. Найти $D(X)$ и $\sigma(X)$ случайной величины X – числа сорняков в выборке.

Решение.

Событие A – семя оказалось сорняком.

Проверка каждого семя – независимое испытание ($n=1000$), вероятность появления сорняка в каждом испытании очень мала и $p = P(A) = 0{,}006$.

Следовательно, случайная величина X – число сорняков среди 1000 семян – распределена по закону Пуассона. Тогда по формулам (3.4) имеем:

$$M(X) = D(X) = \lambda = np = 1000 \cdot 0{,}006 = 6;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{6} = 2{,}45.$$

Пример 3.4. Для определения полного исчерпания ресурса тракторного дизеля проводятся многократные испытания до первого отказа дизеля. Вероятность отказа дизеля в каждом испытании равна 0,06. Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X – числа проводимых испытаний.

Решение.

Так как испытания можно считать независимыми с одной и той же вероятностью появления события A – отказа дизеля, – то дискретная случайная величина X – число испытаний, проведенных до первого отказа дизеля (до первого появления события A) – распределяется по геометрическому закону. Вычислим числовые характеристики X по формулам (3.6):

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0{,}06} = 16{,}7; \quad D(X) = \frac{0{,}94}{0{,}06^2} = 261{,}1;$$

$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{0{,}94}}{0{,}06} = 16{,}2.$$

Контрольные вопросы

1. Какой закон распределения случайной величины называется биномиальным?
2. По каким формулам вычисляются $M(X)$ и $D(X)$ случайной величины X, имеющей биномиальное распределение?
3. Какой закон распределения случайной величины X называется законом Пуассона?
4. Чему равны $M(X)$ и $D(X)$ случайной величины X, распределенной по закону Пуассона?
5. Какой закон распределения случайной величины называется геометрическим?
6. По каким формулам вычисляются $M(X)$ и $D(X)$ случайной величины X, распределенной по геометрическому закону?

Задачи

3.1. Исследованию подлежат n волокон хлопка. Количество длинных волокон в хлопке составляет l%. Найти: а) математическое ожидание и б) среднее квадратическое отклонение числа длинных волокон среди исследуемых.

Вариант	l	n	Вариант	l	n
1	80	200	4	85	200
2	70	250	5	90	300
3	95	300	6	75	350

3.2. После радиоактивного облучения выживают n бактерий. Вероятность выживания каждой бактерии после повторного облучения равна p. Найти среднее число и среднее квадратическое отклонение числа бактерий, выживших после повторного облучения.

Вариант	p	n	Вариант	p	n
1	0,004	500	4	0,003	650
2	0,003	550	5	0,005	500
3	0,005	600	6	0,004	530

3.3. Стрельба ведется из орудия до первого попадания в цель. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Число снарядов неограниченно. Дискретная случайная величина X – число использованных снарядов. Найти: а) $M(X)$; б) $\sigma(X)$.

Вариант	p	Вариант	p
1	0,6	4	0,5
2	0,7	5	0,4
3	0,8	6	0,3

3.4. Найти: а) $M(X)$ и б) $D(X)$ дискретной случайной величины X – числа гимнастов, выполнивших норму первого разряда, среди n гимнастов, участвующих в соревнованиях, если вероятность выполнить эту норму для каждого гимнаста равна p.

Вариант	p	n	Вариант	p	n
1	0,9	4	4	0,95	3
2	0,85	5	5	0,88	4
3	0,92	6	6	0,86	5

3.5. Проводятся многократные испытания двигателя до тех пор, пока двигатель не откажет. Вероятность отказа двигателя в каждом испытании равна p. Найти: а) $M(X)$ и б) $D(X)$ дискретной случайной величины X – числа проведенных испытаний.

Вариант	p	Вариант	p
1	0,1	4	0,15
2	0,2	5	0,18
3	0,12	6	0,11

3.6. Найти $D(X)$ и $\sigma(X)$, где X – число длинных волокон в партии хлопка. Доля длинных волокон в этой партии составляет l%. Известно, что $M(X)=m$.

Вариант	l	m	Вариант	l	m
1	80	120	4	82	65,6
2	85	127,5	5	86	68,8
3	79	118,5	6	84	67,2

3.7. Семена содержат l% сорняков. Найти: а) $M(X)$ и б) $\sigma(X)$, где X – число сорняков среди случайно отобранных n семян.

Вариант	l	n	Вариант	l	n
1	0,11	2000	4	0,13	2300
2	0,12	2500	5	0,14	2000
3	0,15	2200	6	0,15	2500