ТЕМА 1 ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Литература
[1], глава 3, § 3.1, 3.2.
[2], глава 6, § 1, 2, 3.

Случайные величины

Случайной величиной называют такую величину, которая в результате испытания примет одно и только одно из возможных значений, наперед неизвестное и зависящее от случайных причин, которые заранее не могут быть учтены.

Случайные величины подразделяются на дискретные и непрерывные.

Случайная величина, принимающая конечное или бесконечное, но счетное множество значений, называется *дискретной*.

Множество называется *счетным*, если каждому элементу множества можно поставить в соответствие единственное натуральное число.

Если же множество возможных значений случайной величины несчетно, то такая величина называется *непрерывной*.

То есть, дискретная случайная величина принимает отдельные изолированные друг от друга значения, а непрерывная случайная величина может принимать любые значения из некоторого промежутка (например, значения на отрезке, на всей числовой прямой и т.д.).

Для полного описания случайной величины недостаточно лишь знания ее возможных значений, необходимо еще знать вероятности этих значений.

Случайные величины обозначаются заглавными латинскими буквами *X, Y, Z,...*, а принимаемые ими значения соответственно малыми буквами $x_1, x_2, x_3,..., x_n; y_1, y_2,..., y_m;...$.

Всякое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им

вероятностями называется *законом распределения случайной величины* (или просто: *распределением*).

Способы задания дискретной случайной величины

Функциональная зависимость вероятности p_i от x_i (или функция, связывающая значения x_i с соответствующими вероятностями) называется *законом распределения дискретной случайной величины*

$$P(X = x_i) = p_i, i = 1,2,3,..., n,...$$

Для дискретной случайной величины закон распределения может быть задан в виде *таблицы распределения*:

X:

x_i	x_1	x_2	...	x_n	...
p_i	p_1	p_2	...	p_n	...

где первая строка содержит все возможные значения (обычно в порядке возрастания) случайной величины, а вторая – их вероятности. Такую таблицу называют *рядом распределения*.

Так как события $\{X = x_1\}, \{X = x_2\},...$ несовместны и образуют полную группу, то сумма их вероятностей равна единице, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

Закон распределения дискретной случайной величины можно задать *графически*, если на оси абсцисс отложить возможные значения случайной величины, а на оси ординат – вероятности этих значений. Ломаную, соединяющую последовательно точки $(x_1, p_1), (x_2, p_2),...$ называют *многоугольником* (или *полигоном*) *распределения* (*рисунок 1*).

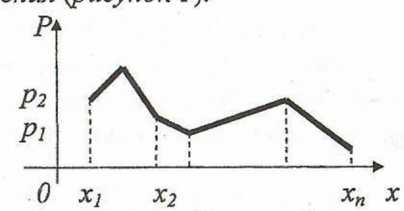

Рисунок 1

Зависимость между значениями дискретной случайной величины и соответствующими им вероятностями также можно задать *аналитически,* т. е. в виде формулы.

Примеры решения задач

Пример 1.1. В денежной лотерее выпущено 100 билетов. Разыгрываются один выигрыш в 1000 рублей и десять выигрышей по 100 рублей. Найти ряд распределения и построить многоугольник распределения дискретной случайной величины X – стоимости возможного выигрыша на один лотерейный билет.

Решение.

Стоимость выигрыша на один лотерейный билет X может принимать возможные значения: $x_1 = 0,\ x_2 = 100,\ x_2 = 1000$. Вероятности каждого x_i найдем по классической формуле:

$$p_1 = P(X = x_1) = \frac{89}{100},\ \ p_2 = P(X = x_2) = \frac{10}{100},\ \ p_3 = P(X = x_3) = \frac{1}{100}.$$

Запишем ряд распределения X:

x_i	0	100	1000
p_i	0,89	0,1	0,01

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}89 + 0{,}1 + 0{,}01 = 1$.

Построим многоугольник распределения (*рисунок 2*):

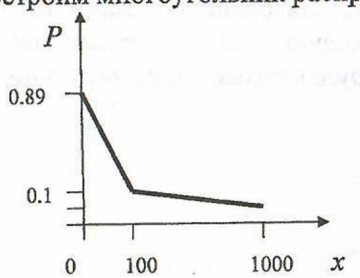

Рисунок 2

Пример 1.2. Имеется 10 семян ржи, среди которых 8 всхожих. Наудачу отобраны два из них. Составить ряд распределения числа всхожих семян среди отобранных.

Решение.

Обозначим X – число всхожих семян среди двух отобранных. Возможными значениями X будут: $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2$. Вероятности p_i найдем по классической формуле $p_i = \frac{m_i}{n}$, где n – число всевозможных случаев отобрать 2 семя из 10, $n = C_{10}^2$, m_i – число благоприятствующих случаев отобрать i всхожих семян из 8 и $(2-i)$ невсхожих семян из 2.

$$p_1 = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = 0{,}022,\ \ p_2 = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = 0{,}356,\ \ p_3 = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = 0{,}622.$$

Следовательно, ряд распределения X имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,022	0,356	0,622

Контроль: $\sum_{i=1}^{3} p_i = 0{,}022 + 0{,}356 + 0{,}622 = 1$.

Пример 1.3. В партии куриных яиц 10% негодных. Составить закон распределения в табличной и аналитической формах дискретной случайной величины X – числа негодных яиц среди 5 отобранных наудачу.

Решение.

Выпишем возможные значения X:

$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3,\ x_5 = 4,\ x_6 = 5$.

Вероятность каждого x_i найдем по формуле Бернулли, так как проверка каждого яйца (испытание) независима от результатов других проверок и вероятность появления события A (негодного яйца) постоянна и равна p=0,1, следовательно, q=0,9.

Тогда:

$p_1 = P_5(0) = C_5^0 p^0 q^5 = 0{,}9^5 = 0{,}59049$;

$p_2 = P_5(1) = C_5^1 p^1 q^4 = 0{,}5 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}32805;$

$p_3 = P_5(2) = C_5^2 p^2 q^3 = 0{,}1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}0729;$

$p_4 = P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 0{,}01 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0081;$

$p_5 = P_5(4) = C_5^4 p^4 q^1 = 0{,}0005 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}00045;$

$p_6 = P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 0{,}1^5 = 0{,}00001.$

Итак,

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,59049	0,32805	0,0729	0,0081	0,00045	0,00001

Можно проверить, что $\sum_{i=1}^{6} p_i = 1$.

Запишем закон распределения X в аналитической форме с помощью формулы Бернулли:

$$p_i = P_5(i) = C_5^i p^i q^{5-i} \qquad \left(i = \overline{0,5}\right).$$

Пример 1.4. В городе 4 библиотеки, в каждой из которых студент может получить учебник Н. Ш. Кремера с вероятностью 0,3. Построить ряд распределения случайной величины X – числа библиотек, которые посетит студент, чтобы получить учебник.

Решение.

Посещение библиотеки можно считать испытанием (поиск книги), в каждом из которых событие A – учебник получен – может появиться с одной и той же вероятностью p =0,3. Причем, при первом же появлении A испытания прекращаются (получив учебник в i-той библиотеке, студент уже не посетит остальные библиотеки). Следовательно, дискретная случайная величина X – число проведенных испытаний, причем это число ограничено: $n \le 4$. Составим ряд распределения случайной величины X. Возможными значениями будут: 1, 2, 3, 4. Подсчитаем соответствующие вероятности.

Событие X=1 эквивалентно событию A –студент получит книгу в первой библиотеке. Тогда

$p_1 = P(X=1) = P(A) = p = 0{,}3.$

Событие X=2 эквивалентно событию $\overline{A} \cap A$ (студент не получит книгу в первой библиотеке и получит ее во второй библиотеке). Так как события $\overline{A}$ и A независимы, то

$p_2 = P(X=2) = P(\overline{A} \cap A) = P(\overline{A}) \cdot P(A) = q \cdot p = 0{,}21.$

Аналогично

$p_3 = P(X=3) = P(\overline{A} \cap \overline{A} \cap A) = P(\overline{A})^2 \cdot P(A) = q^2 \cdot p = 0{,}147.$

Событие X=4 эквивалентно событию $(\overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap A) \cup (\overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A} \cap \overline{A})$. Тогда по теоремам сложения и умножения несовместных и независимых событий и учитывая, что $p + q = 1$, имеем:

$p_4 = P(X=4) = q \cdot q \cdot q \cdot p + q \cdot q \cdot q \cdot q = q^3(p+q) = q^3 = 0{,}343.$

Запишем ряд распределения X:

x_i	1	2	3	4
p_i	0,3	0,21	0,147	0,343

Контроль: $\sum_{i=1}^{4} p_i = 0{,}3 + 0{,}21 + 0{,}147 + 0{,}343 = 1.$

Контрольные вопросы

1. Что называется случайной величиной?
2. Какие два вида случайных величин вы знаете?
3. Какая случайная величина называется дискретной? Приведите примеры.
4. Что называется законом распределения дискретной случайной величины?
5. Назовите способы задания случайной величины.
6. Что называется рядом распределения дискретной случайной величины?
7. Что называется многоугольником распределения?

Задачи

1.1. Определялась урожайность яровой пшеницы на нескольких опытных участках площадью 1 га колхозного поля. Получены следующие результаты:

урожайность, ц/га	число участков
15,1 – 16,0	m_1
16,1 – 17,0	m_2
17,1 – 18,0	m_3
18,1 – 19,0	m_4

Построить ряд распределения дискретной случайной величины X – урожайности яровой пшеницы на произвольно выбранном опытном участке. (В качестве возможных значений x_i выбрать середины указанных интервалов урожайности.)

Вариант	m_1	m_2	m_3	m_4	Вариант	m_1	m_2	m_3	m_4
1	3	4	3	1	4	5	2	2	3
2	2	3	4	2	5	4	2	3	2
3	3	1	4	2	6	1	5	4	1

1.2. Среди студентов курса организована лотерея. Стоимость каждого билета составляет 10 рублей. Разыгрывается m_1 вещей стоимостью по 100 рублей и m_2 – стоимостью по 200 рублей. Составить закон распределения дискретной случайной величины X – суммы чистого выигрыша для студента, который приобрел 1 билет, если всего продано n билетов.

Вариант	n	m_1	m_2	Вариант	n	m_1	m_2
1	110	2	3	4	70	4	1
2	90	3	2	5	110	5	2
3	50	2	1	6	130	4	3

1.3. В инкубаторе из n яиц вывелись цыплята, из них m петушков. Наудачу отобраны k цыплят. Построить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа петушков среди отобранных k цыплят.

Вариант	n	m	k	Вариант	n	m	k
1	10	7	4	4	20	17	6
2	10	8	3	5	20	12	4
3	10	3	7	6	20	18	5

1.4. В партии хлопка l% коротких волокон. Наудачу взяты n волокон. Построить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа длинных волокон среди отобранных n.

Вариант	l	n	Вариант	l	n
1	80	3	4	70	3
2	90	4	5	80	4
3	70	2	6	90	2

1.5. Имеются n различных ключей, из которых только один подходит к замку. Составить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа опробований при открывании замка, если испробованный ключ в последующих попытках:

а) участвует;

б) не участвует.

Всего опробований m.

Вариант	m	n	Вариант	m	n
1	5	6	4	4	6
2	4	5	5	4	5
3	6	7	6	5	7

1.6. В распоряжении стрелка имеется n патронов. Стрелок производит по мишени выстрелы до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна p. Построить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа использованных патронов.

Вариант	p	n	Вариант	p	n
1	0,8	4	4	0,7	3
2	0,85	3	5	0,9	4
3	0,9	5	6	0,8	5

1.7. Контролер ОТК проверяет партию изделий, для этого одно за другим проверяется n изделий из партии. При обнаружении первого бракованного изделия вся партия задерживается. Построить ряд распределения дискретной случайной величины X – числа проверенных изделий, если в партии l% годных изделий.

Вариант	l	n	Вариант	l	n
1	80	5	4	70	4
2	85	4	5	90	5
3	90	6	6	95	3

ТЕМА 2 ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Литература

[1], глава 3, § 3.3, 3.4.
[2], глава 7, § 1, 2, 3, 4, 5; глава 8, § 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Математическое ожидание дискретной случайной величины

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X, имеющей закон распределения $P(X = x_i) = p_i,\ i = 1,2,..,n,..$, называется число, равное сумме произведений всех ее значений на соответствующие им вероятности.

Математическое ожидание обозначается через $M(X)$.

Таким образом, по определению

$$M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ... + x_n \cdot p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i. \qquad (2.1)$$

Математическое ожидание $M(X)$ называют также средним значением случайной величины X.

Свойства математического ожидания:

1. Математическое ожидание постоянной равно самой этой постоянной, т.е.

$$M(c) = c. \qquad (2.2)$$

2. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания, т.е.

$$M(cX) = c \cdot M(X). \qquad (2.3)$$

3. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий, т.е.

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y). \qquad (2.4)$$

<u>Следствие</u>: $M(X-Y) = M(X) - M(Y).$ (2.5)

4. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий, т.е. если X и Y независимы, то