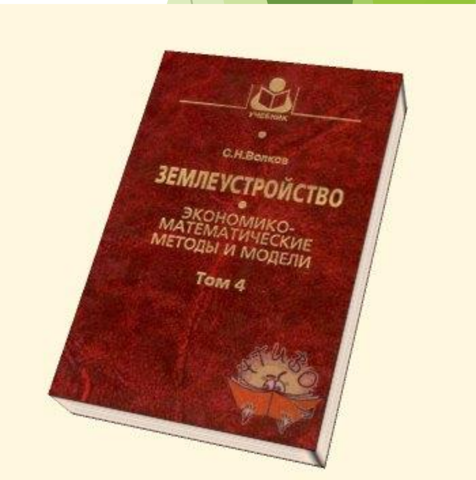
Лекция 2. Распределительный метод линейного программирования



План лекции

1. Землеустроительные задачи, решаемые методами линейного программирования.
2. Понятие и сущность транспортной задачи
3. Базовая модель задачи, решаемой распределительным методом
4. Методы составления первого опорного плана (решения)
5. Алгоритм метода минимального элемента
6. Алгоритм метода максимального элемента
7. Проверка опорного решения на оптимальность методом потенциалов

1.Землеустроительные задачи, решаемые методами линейного программирования.

- Все задачи землеустроительного проектирования имеют многовариантный характер, а величины, которыми оперируют, выражаются численно (площади, длины линий, координаты, валовой объем продукции, прибыль). Их можно связать системой уравнений и неравенств и объединить определенной целевой функцией, установкой.
- Используя методы программирования можно учесть все имеющиеся условия, и, избегая длительных ручных расчетов, получить наилучший результат.

1. Землеустроительные задачи, решаемые методами линейного программирования.

- В проекте внутрихозяйственного землеустройства проводят трансформацию угодий, рассчитывают потребность скота в кормах и источники их покрытия.
- При межхозяйственном землеустройстве используют экономико-математические модели определения оптимального размера землевладения СХП, оптимизации перераспределения земель СХП.

2. Понятие и сущность транспортной задачи

Постановка задачи:

Имеется m поставщиков с запасом A_i (i=1, 2, ...m);

i - номер поставщика;

И n — потребителей с потребностями грузов B_j (j= 1, 2, ...n);

j — номер потребителя;

индексы i, m принадлежат строке; j, n — столбцу.

Известна стоимость перевозки единицы груза по каждому возможному маршруту c_{ij} из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

Требуется определить такие оптимальные маршруты поставок x_{ij} от i-го поставщика к j-му потребителю (т.е. такой план перевозок), чтобы значение целевой функции достигало своего экстремума (min, max).

x_{ij} — объем груза, перевозимого из i-го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

2. Понятие и сущность транспортной задачи. Табличная форма записи исходных данных транспортной задачи

Пункт назначения / Пункт отправления	1	2	j…	n	Запасы груза ai
1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	C_{1j} X_{1j}	C_{1n} X_{1n}	A_1
2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	C_{2j} X_{2j}	C_{2n} X_{2n}	A_2
i…	Ci_1 X_{i1}	C_{i2} X_{i2}	C_{ij} X_{ij}	C_{in} X_{in}	A_i
m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	C_{mj} X_{mj}	C_{mn} X_{mn}	A_m
Потребность в грузах Bi	B_1	B_2	B_j	B_n	ΣA_i ΣB_j

2. Понятие и сущность транспортной задачи. Особенности транспортной задачи

1. Переменные в транспортной модели выражаются в одних и тех же единицах измерения (га, км, руб, ц и т. д.).
2. Коэффициенты при переменных в ограничениях модели всегда равны единице.
3. Каждая переменная входит в два ограничения: в ограничение – по строке и в ограничение по столбцу.
4. Все ограничения представлены в виде уравнений .

3. Базовая модель задачи, решаемой распределительным методом

Экономико-математическая модель состоит из трех составных частей :

1. целевая функция;
2. система ограничений ;
3. неотрицательность переменных.

Структурная запись

I. Целевая функция:

Развернутая запись

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} Cijxij \longrightarrow \min(\max)$$

$$Z = C11X11 + C12X12 + \ldots + CmnXmn \longrightarrow \min(\max)$$

где, c_{ij} — стоимость единицы груза из I -го пункта отправления в j-ый пункт назначения.

II. Система ограничений

Ограничения по строкам

Количество перевозимых грузов из i-го пункта отправления в j-ые пункты назначения равно запасу i-го пункта отправления.

Структурная запись

$$\sum_{j=1}^{n} Xij = Ai(i = 1 \ldots m)$$

Развернутая запись $x_{11}+x_{12}+x_{1j}+\ldots+x_{1n}=A_1$

$$x_{21}+x_{22}+x_{2j}+\ldots+x_{2n}=A_2$$

$$x_{i1}+x_{i2}+x_{ij}+\ldots+x_{in}=A_i$$

$$x_{m1}+x_{m2}+x_{mj}+\ldots+x_{mn}=A_m$$

Количество перевозимых грузов из **i-**х пунктов отправления в **j-**ый пункт назначения должно равняться потребности в j-м пункте назначения.

<u>*Ограничения по столбцам*</u>

Структурная запись

$$\sum_{i=1}^{m} X_{ij} = b_j \, (j = 1 \ldots n)$$

Развернутая запись

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{i1} + \ldots x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{i2} + \ldots x_{m2} = b_2 \\ x_{1j} + x_{2j} + x_{ij} + \ldots x_{mn} = b_j \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{in} + \ldots x_{mn} = b_n \end{cases}$$

Балансовое условие:

Количество распределяемых грузов и потребности в них должны быть равны:

Структурная запись

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

Развернутая запись:

$A_1+A_2+\ldots+A_m=B_1+B_2+\ldots+B_n,$

если $\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$, модель задачи закрытая;

если $\sum_{i=1}^{m} A_i \neq \sum_{j=1}^{n} B_j$, модель задачи открытая

Для решения задачи открытую модель приводят к закрытому виду путем **введения фиктивного пункта отправления с запасом, равным:**

$$A_{m+i} = \sum_{j=1}^{n} Bj - \sum_{i=1}^{m} A1$$

или фиктивного пункта назначения с потребностью, равной:

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a1 - \sum_{j=1}^{n} bj$$

Стоимость перевозок грузов по фиктивному пункту принимают равными «0».

$$C_{in+i} = 0(i = 1,2,\ldots m)$$

$$C_{im+i} = 0(1,2,\ldots n)$$

При расчете разностей $\mu_к$ фиктивные элементы (столбец или строка) участвуют в последнюю очередь.

III. Условие неотрицательности переменных

$X_{ij} \geq 0$

4. Методы составления первого опорного плана (решения)

1. Метод северо-западного угла.
2. Метод наилучшего элемента (минимального, максимального в зависимости от критерия оптимизации).
3. Метод аппроксимации.

5. Алгоритм метода минимального элемента

- На каждом шаге алгоритма поиска опорного решения стараются занять максимально возможным ресурсом прежде всего те клетки транспортной таблицы, в которых стоят наименьшие величины Cij.

1. Из всех оценок Cij в таблице выбирают наименьшее.
2. В соответствующую клетку записывают значение Xij, равное наименьшему из соответствующих величин Ai, Bj.
3. Определяют новые значения величин Ai, Bj.
4. Если запас груза Ai равен нулю а потребность в грузе Bj больше нуля, то из таблицы вычеркивают соответствующую строку. Если Bj равен нулю, то вычеркивают столбец. Если обе величины Ai, Bj равны нулю, то вычеркивают только строку или только столбец. С оставшимся элементом далее работают как обычно.
5. Далее указанные операции повторяются до тех пор пока все ресурсы не будут распределены по клеткам.

5. Алгоритм метода минимального элемента

6. **Полученное решение необходимо проверить**

по числу занятых клеток их должно быть m + n – 1. Если число занятых клеток равно этому условию, то такое решение называется невырожденным, если число занятых клеток меньше, то это решение вырождено. Вырожденность можно преодолеть. Если число занятых клеток больше, то нужно искать ошибку в решении.

Также проверяем сходится ли сумма по строке с запасами груза Ai, и сумма по столбцу с Bj.

7. **Далее считаем целевую функцию.**

6. Алгоритм метода максимального элемента

При решении задачи на максимум приведенный алгоритм меняется только в первом шаге:

вместо минимального значения Cij находят максимальное и далее работают с соответствующей клеткой.

7. Проверка опорного решения на оптимальность методом потенциалов

- После получения первоначального опорного плана необходимо проверить его на оптимальность. Для определения оптимальности плана используются потенциалы, которые вычисляются по занятым клеткам, по следующим формулам:
- $\alpha_i + c_{ij} = \beta_j$, $\alpha_i = \beta_j - c_{ij}$

где α_i – потенциалы по строкам; β_j - потенциалы по столбцам.

- За первый потенциал берется любое число. Чтобы потенциалы были только положительными, необходимо первый потенциал взять чуть больше наибольшей оценки C_{ij} по матрице.

Условие оптимальности

План является оптимальным, если для свободных клеток:

при решении задач

на min: $\alpha_i + c_{ij} \geq \beta_j$, или $\sigma_{ij} \geq 0$

на max:

$$\alpha_i + c_{ij} \leq \beta_j \qquad \delta_{ij} \geq 0$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} ci_j x_{ij} \longrightarrow \min$$

Демонстрационная задача

Найти минимум затрат на перевозку кормов с севооборотных массивов на животноводческие фермы. Данные по затратам на перевозку единицы груза с учетом удаленности участков от производственных центров приведены в табл. 1.

Таблица 1 *Табличная форма записи исходных данных транспортной задачи*

Фермы / Севообороты	Удельные затраты на перевозку грузов, руб/т					Ресурсы севооборотов, т
	Ферма1	Ферма2	Ферма3	Ферма4	Ферма5	
Полевой-1	55	48	49	60	25	149
Полевой-2	45	35	96	55	66	163
Кормовой	47	66	90	97	20	382
Потребности ферм в кормах, т	139	165	120	130	140	

Порядок выполнения задачи:

1. Записать математическую формулировку задачи в общем виде.
2. Дать развернутую запись условия задачи с числовым значением переменных и ресурсов.
3. Задачу решить, используя метод наилучшего элемента.
4. Записать ответ.

Определение опорного решения задачи методом минимального элемента

Формализация исходных данных задачи:

Введем следующие обозначения:

m - количество севооборотов (пунктов отправления);

n - количество ферм (пунктов назначения);

i - номер севооборота : $i = 1,2...m;$

j - номер фермы: $j = 1,2...n;$

i- i, m – индексы строк; j, n – индексы столбцов;

C_{ij} – стоимость перевозки единицы объема продукции с i –го севооборота на j-ую ферму;

X_{ij} – объем перевозимой продукции с i –го севооборота на j –ую ферму;

A_i - объем продукции, производимой на i –ом севообороте и предназначенной для транспортировки на фермы, т;

B_j - потребность j –ой фермы в кормах, т;

Z- целевая функция.

- Сумма объемов продукции, производимой на всех севооборотных массивах, должна быть равна общей потребности ферм в кормах: найти такие объемы транспортировки кормов с севооборотных массивов на фермы, при которых целевая функция примет минимальное значение:
- $$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ij} X_{ij} \rightarrow \min$$
- **Запись задачи транспортного типа в структурной форме:**

Ограничения по строкам:

- Сумма перевозимых кормов с i –го севооборотного массива на j –е фермы должна быть равна запасу кормов данного севооборота:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = A_i;\ i = 1,2...m;$$

Ограничения по столбцам:

- Сумма объемов продукции, доставляемых на j –ую ферму со всех севооборотов, должна быть равна потребности в кормах на данной ферме:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = Bj;\ j = 1,2...n;$$

Балансовое условие:

- Сумма объемов продукции, производимой на всех севооборотных массивах, должна быть равна общей потребности ферм в кормах.

$$\sum_{i=1}^{m} A_i = \sum_{j=1}^{n} B_j$$

- **Условие неотрицательности переменных:**

$$X_{ij} \geq 0, i = 1,2...m,\ j = 1,2...n;$$

- <u>**Проверка сбалансированности задачи**</u>
- Должно быть

$$\sum_i A_i = \sum_j B_j$$

- $\sum_i A_i =$ 149 + 163 + 382 = 694
- $\sum_j B_j =$ 139 +165 + 120 + 130 + 140 = 694
- Задача сбалансирована (закрыта).
- Матричная запись исходных данных задачи после учета требований сбалансированности представлена в табл.3.
- Таблица 2 **Табличное представление исходных данных задачи**

Фермы ↓	Удельные затраты на перевозку груза, тыс.руб/т					
севообороты	Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	Ферма 4	Ферма 5	Ресурсы севооборотов, т
Полевой-1	55 X11	48 X12	49 X13	60 X14	25 X15	149
Полевой-2	45 X21	35 X22	96 X23	55 X24	66 X25	163
Кормовой	47 X31	66 X32	90 X33	65 X34	20 X35	382
Потребности ферм в кормах, т	139	165	120	130	140	694 694

- 1) ***целевая функция***
- $Z=55x_{11}+48x_{12}+49x_{13}+60x_{14}+25x_{15}+45x_{21}+35x_{22}+96x_{23}+55x_{24}+66x_{25}+$ $+47x_{31}+66x_{32}+90x_{33}+65x_{34}+20x_{35} \rightarrow \min;$
- 2) ***граничные условия***
- ***Ограничения по строкам исходной матрицы:***
- $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=149,$
- $x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=163,$
- $x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=382;$
- ***Ограничения по столбцам исходной матрицы:***
- $x_{11}+x_{21}+x_{31}=139,$
- $x_{12}+x_{22}+x_{32}=165,$
- $x_{13}+x_{23}+x_{33}=120,$
- $x_{14}+x_{24}+x_{34}=130,$
- $x_{15}+x_{25}+x_{35}=140.$
- 3) ***балансовое условие***:
- $149+163+382 = 139+165+120+130+140=694;$
- 4) ***условие неотрицательности неизвестных:***
- $X_{11,12,13,14,15,21,22,23,24,25,31,32,33,34,35} >= 0$

Таблица 4 Получение опорного решения методом наилучшего минимального элемента

Фермы	Удельные затраты на перевозку груза, тыс.руб/т					
севообороты	Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	Ферма 4	Ферма 5	Ресурсы севооборотов, т
Полевой-1	55	48 2	49 120	60 27	25	149
Полевой-2	45	35 163	96	55	66	163
Кормовой	47 139	66	90	65 103	20 140	382
Потребности ферм в кормах, т	139	165	120	130	140	694 694

- **Проверка опорного решения на выполнение граничных условий:**
- <u>а) по строкам:</u>
- 2+120+27=149
- 163=163
- 139+103+140=382
- <u>б) по столбцам:</u>
- 139=139
- 163+2=165
- 120=120
- 27+103=140
- Граничные условия по строкам и столбцам выполняются.
- <u>**Проверка по числу занятых клеток $K_{зан}$:**</u>
- Количество занятых клеток в опорном плане должно быть равно условию вырожденности:
- **К** зан <= m + n – 1 , где m – число строк, n – число столбцов.
- В нашем случае **К** зан =7 и (m+n-1)=3+5-1=7; то есть решение верное и невырожденное.
- <u>**Вычисление целевой функции:**</u>
- Z= $\sum_{i=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} C_{ij} X_{ij}$ =2*48+120*49+27*60+163*35+139*47+103*65+140*20=29329
- <u>**Проверка опорного решения на оптимальность.**</u>
- Введем новые характеристики (потенциалы поставщиков и потребителей продукции и α_i β_j соответственно.

- Для занятых клеток $\alpha_i + C_{ij} = \beta_j;$
- За первый потенциал примем $\alpha_1 =$ const – произвольное число;
- C ij max = 90, чтобы обеспечить положительность,
- тогда $\beta_2 =$ 90+48=138 и т.д.
- Оценка свободной клетки вычисляется по формуле

$$\delta_{ij} = \alpha_i + C_{ij} - \beta_j;$$

$$\delta_{ij} \geq 0$$

- При решении задач на min решение является оптимальным, если для всех свободных клеток .
- Для свободных клеток считаем оценки δ_{ij} и размещаем их в
- правом нижнем углу свободной клетки (табл.5).

- Потенциалы α_i, β_j и оценки δ_{ij} для опорного решения задачи

Севообороты		Удельные затраты на перевозку груза, тыс.руб/т					Ресурсы севооборотов, т
	β_j	132	138	139	150	105	
α_i		Ферма 1	Ферма 2	Ферма 3	Ферма 4	Ферма 5	
90	Полевой – 1	55 $\boxed{13}$	48 **2**	49 **120**	60 **27**	25 $\boxed{10}$	149
103	Полевой – 2	45 $\boxed{16}$	35 **163**	96 $\boxed{60}$	55 $\boxed{8}$	66 $\boxed{64}$	163
85	Кормовой	47 **139**	66 $\boxed{13}$	90 $\boxed{36}$	65 **103**	20 **140**	382
Потребности ферм в кормах, т		**139**	**165**	**120**	**130**	**140**	694 / 694

- В данном случае для всех свободных клеток условие оптимальности выполняется, поэтому полученное решение оптимально.
- Целевую функцию вычисляем для контроля формул, используя вычисленные потенциалы α_i и β_j :
- Z = $\sum_{j=1}^{n} \beta_j B_j - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Ai$
- Zконтр. = (62*139+68*165+69*120+80*130+35*140) – (20*149+33*163+15*382) =29329.
- Формализованное представление оптимального решения задачи приведено в табл.6.

Таблица 6 Оптимальное решение задачи

J i	1	2	3	4	5	Ресурсы, т
1	55	48 2	49 120	60 27	25	149
2	45	35 163	96	55	66	163
3	47 139	66	90	65 103	20 140	382
Потреб - ности, т	139	165	120	130	140	694 694

- Ответ: затраты на перевозку кормов с севооборотных массивов на животноводческие фермы будут минимальны и равны 29329 тыс. рублей при следующем распределении перевозок с севооборотов на фермы:
- с полевого севооборота 1: 2 т на 2 ферму, 120 т на 3 ферму, 27т на 4 ферму;
- с полевого севооборота 2: 163 т на 2 ферму;
- с кормового севооборота: 139 т на 1 ферму, 103 т на 4 ферму, 140 т на 5 ферму.