

Тема «интегралы»

Задание №1. Найти интегралы

1.

a)  $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 + 3\sin x}}$

б)  $\int x \ln 2x dx$

2.

a)  $\int \sqrt{7 + 2\sin x} \cos x dx$

б)  $\int x^2 \ln 3x dx$

3.

a)  $\int e^{3\cos x} \sin x dx$

б)  $\int (x + 5) \ln 5x dx$

4.

a)  $\int \frac{\sin(5\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$

б)  $\int x^3 \ln x dx$

5.

a)  $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

б)  $\int x^9 \ln 9x dx$

6.

a)  $\int \frac{e^x dx}{e^x + 4}$

б)  $\int x \ln 7x dx$

7.

a)  $\int \frac{\arcsin^3 x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

б)  $\int x^7 \ln x dx$

8.

a)  $\int \frac{dx}{\sqrt{\arctg x(1+x^2)}}$

б)  $\int x \sin 8x dx$

9.

a)  $\int \frac{dx}{x(3\ln x + 1)}$

б)  $\int x \sin 2x dx$

10.

a)  $\int \frac{\sqrt{\ln x - 1}}{x} dx$

б)  $\int x \sin 3x dx$

11.

a)  $\int x^3 e^{2x^4+1} dx$

б)  $\int x \sin 5x dx$

12.

$$\text{a) } \int x^2 \cos\left(x^3 + \frac{\pi}{4}\right) dx \qquad \text{б) } \int x \cos 5x dx$$

13.

$$\text{a) } \int x^2 \cdot \sqrt[3]{2x^3 + 3} dx \qquad \text{б) } \int x \cos 4x dx$$

14.

$$\text{a) } \int \frac{x dx}{\sqrt[4]{3x^2 + 10}} \qquad \text{б) } \int x \cos 7x dx$$

15.

$$\text{a) } \int x^3 \sin(5x^4 + 2) dx \qquad \text{б) } \int \arcsin 2x dx$$

16.

$$\text{a) } \int \frac{x^2 dx}{\cos^2(5x^3 + 1)} \qquad \text{б) } \int \arctg 5x dx$$

17.

$$\text{a) } \int \frac{x^3 dx}{\sin^2(2x^4 + 1)} \qquad \text{б) } \int x e^{5x} dx$$

18.

$$\text{a) } \int \frac{x^2 dx}{8x^3 + 3} \qquad \text{б) } \int \frac{x}{e^x} dx$$

19.

$$\text{a) } \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - (8x^3)^2}} dx \qquad \text{б) } \int \frac{x}{e^{3x}} dx$$

20.

$$\text{a) } \int \frac{x}{1 + (2x^2)^2} dx \qquad \text{б) } \int x \cdot e^{\frac{x}{2}} dx$$

21.

$$\text{a) } \int \frac{x^3}{4 + x^8} dx \qquad \text{б) } \int x \cdot e^{2x} dx$$

22.

$$\text{a) } \int \frac{x}{(2x^2)^2 - 3} dx \qquad \text{б) } \int x \cdot 5^{\frac{x}{2}} dx$$

23.

$$\text{a) } \int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - 6}} \qquad \text{б) } \int \frac{x}{2^x} dx$$

24.

$$\text{a) } \int \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{dx}{x^2} \qquad \text{б) } \int \frac{x}{3^{\frac{x}{2}}} dx$$

25.

$$\text{a) } \int \frac{x}{\sqrt{(3x^2)^2 + 4}} dx \qquad \text{б) } \int x \cdot 3^{2x} dx$$

26.

$$\text{a) } \int \frac{dx}{(1+x^2)(\arctg x + 1)} \qquad \text{б) } \int \arctg 3x dx$$

27.

$$\text{a) } \int \frac{e^{3x}}{1+e^{6x}} dx \qquad \text{б) } \int \arcsin 5x dx$$

28.

$$\text{a) } \int \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x^2} dx \qquad \text{б) } \int x^2 \cos x dx$$

29.

$$\text{a) } \int \frac{\sqrt{2\arctg x + 1}}{x^2 + 1} dx \qquad \text{б) } \int x^5 \ln 5x dx$$

30.

$$\text{a) } \int \frac{dx}{\sqrt{x} e^{2\sqrt{x}}} \qquad \text{б) } \int x^2 e^x dx$$

Задание №2. Вычислить определенный интеграл 2-мя способами а) точными методами; б) (основной уровень) приближенными, пользуясь формулой прямоугольников, разбивая участок интегрирования на  $n=10$  частей.

б) (продвинутый уровень) Вычислить определенный интеграл приближенными, пользуясь формулой трапеций разбивая участок интегрирования на  $n=10$  частей.

$1. \int_0^1 \frac{xdx}{x^2 + 2x + 1}$ <p>Замена <math>x + 1 = t</math></p>	$9. \int_{1/2}^1 \frac{\sqrt{2x-1}}{x} dx$ <p>Замена <math>\sqrt{2x-1} = t</math></p>	$18. \int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1} + 1} dx$ <p>Замена <math>\sqrt{x-1} = t</math></p>
-----------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------

<p>2. <math>\int_0^{\pi} x \sin x dx</math></p>	<p>10. <math>\int_1^e x^2 \ln x dx</math></p>	<p>19. <math>\int_0^1 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx</math> Замена <math>\sqrt{x} = t</math></p>
<p>3. <math>\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2 \cos x + 3}</math> Замена <math>tg(x/2) = t</math> <math>\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}</math> <math>dx = \frac{2dt}{1+t^2}</math></p>	<p>11. <math>\int_{-\pi/2}^0 \frac{dx}{\cos x + 1}</math> Замена <math>tg(x/2) = t</math> <math>\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}</math> <math>dx = \frac{2dt}{1+t^2}</math></p>	<p>20. <math>\int_{-2}^1 \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx</math> Замена <math>\sqrt{x-1} = t</math></p>
<p>4. <math>\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{(1+x)^3}}</math> Замена <math>\sqrt{x+1} = t</math></p>	<p>12. <math>\int_1^e x \ln x dx</math></p>	<p>21. <math>\int_0^1 \sqrt{1+3x} dx</math> Замена <math>\sqrt{1+3x} = t</math></p>
<p>5. <math>\int_0^1 x \arctg x dx</math></p>	<p>13. <math>\int_0^1 x 10^x dx</math></p>	<p>22. <math>\int_1^5 x \sqrt{x-1} dx</math> Замена <math>\sqrt{x-1} = t</math></p>
<p>6. <math>\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+3} + 1}</math> Замена <math>\sqrt{x+3} = t</math></p>	<p>14. <math>\int_1^e x^4 \ln x dx</math></p>	<p>23. <math>\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{1+2x}} dx</math> Замена <math>\sqrt{1+2x} = t</math></p>
<p>7. <math>\int_0^{\pi/2} x \cos x dx</math></p>	<p>15. <math>\int_0^1 \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}</math> Замена <math>\sqrt{x+1} = t</math></p>	<p>24. <math>\int_0^3 \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}} dx</math> Замена <math>\sqrt{x+1} = t</math></p>
<p>8. <math>\int_0^1 x 2^x dx</math></p>	<p>16. <math>\int_{-2}^{-1} \frac{x+1}{x^2 + 4x + 5} dx</math> Замена <math>x + 2 = t</math></p>	<p>25. <math>\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \sin x}</math> Замена <math>tg(x/2) = t</math> <math>\sin x = \frac{2t}{1+t^2}</math> <math>dx = \frac{2dt}{1+t^2}</math></p>
	<p>17. <math>\int_4^5 \frac{dx}{x^2 - 8x + 17}</math> Замена <math>x - 4 = t</math></p>	

**Задание №3. (основной уровень) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями**

- $y = 1/3x^2 - 3, y = -x + 3$
- $y^2 = 4x, x^2 = 4y$
- $y = x^2 + 2x, y = x + 2$
- $2x^2 - y + 8 = 0, 4x + y - 24 = 0$
- $y = x^2/2 - x + 1, y = -x^2/2 + 3x + 6$

6.  $y = -x^2$ ,  $x + y + 2 = 0$
7.  $y = x^3$ ,  $y = 4x$
8.  $3x^2 + 2y - 60 = 0$ ,  $3x - y + 18 = 0$
9.  $5x^2 - 2y + 20 = 0$ ,  $5x + y - 30 = 0$
10.  $X^2 + 2y - 20 = 0$ ,  $y = x + 6$
11.  $y = x^2 - 2x$ ,  $y = x + 4$
12.  $y = 3x^2 - 1$ ,  $y = -2x + 8$
13.  $y = 2x^2$ ,  $y = -x + 10$
14.  $y = 1/3x^2 - 1$ ,  $y = -2x + 8$
15.  $y = 4x^2 - 1$ ,  $y = -2x + 1$
16.  $y = 1/4x^2 - 1$ ,  $y = 1/2x + 1$
17.  $y = 3x^2 - 2$ ,  $y = -x + 2$
18.  $y = 1/2x^2 - 2$ ,  $y = -3x + 6$
19.  $y = 1/4x^2 - 2$ ,  $y = -x^2 + 1$
20.  $y = x^2 - 1$ ,  $y = -x + 1$
21.  $y = x^2 - 1$ ,  $y = -x + 1$
22.  $y = x^2 - 1$ ,  $y = x + 1$
23.  $y = x^2 - 1$ ,  $y = x - 1$
24.  $y = x^2$ ,  $y = -x + 2$
25.  $y = x^3$ ,  $y = x^2$

**Задание № 3 (Продвинутый уровень)** Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

1.  $y = 2^x$ ,  $4x + 5y - 28 = 0$ ,  $x + 7y - 7 = 0$ .
2.  $y = e^x$ ,  $y = -x + 1$ ,  $x - 5y - 1 = 0$ .
3.  $y = 2^x$ ,  $y = 3^{-x}$ ,  $x - 3y = 0$ ,  $x = -2$ .
4.  $y = 2^x$ ,  $y = x^2 - 1$ ,  $y = -x + 1$ ,  $x = -1$ .
5.  $y = -x^2$ ,  $y = x^2 - 1$ ,  $y = x + 1$ .
6.  $y = -x^2$ ,  $y = x^2 - 1$ ,  $y = x - 1$ .
7.  $y = 2^x$ ,  $x + 24y = 0$ ,  $y = 2x$ .
8.  $y = 2^x$ ,  $y = -2^x$ ,  $x = -2$ ,  $5x - 2y - 2 = 0$ .
9.  $y = x^2 - 1$ ,  $y = \frac{x^2}{2}$ ,  $3x - 2y - 2 = 0$ .

10.  $y = x^2$ ,  $y = -x^2 + 2$ ,  $y = -x + 2$ .
11.  $y = x^3$ ,  $y = x^2$ ,  $x = -2$ ,  $x - y + 2 = 0$ .
12.  $y = x^3$ ,  $y = \frac{x^2}{3}$ ,  $2x + y - 12 = 0$ .
13.  $y = \sin x$ ,  $y = -x^2$ ,  $y = \frac{x - \pi}{1 + \pi}$ .
14.  $y = \frac{x - \pi}{1 - \pi}$ ,  $y = -\sin x$ ,  $y = x^3$ .
15.  $y = \cos x$ ,  $y = \sin x$ ,  $y = -\frac{3}{2\pi}x$ .
16.  $y = \operatorname{tg}x$ ,  $y = \frac{2x - \pi}{2 - \pi}$ ,  $y = x - \frac{\pi}{2}$ ,  $x \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $x = 0$ .
17.  $y = \operatorname{tg}x$ ,  $y = -x^3$ ,  $y = 1$ .
18.  $y = \sin x$ ,  $y = -\sin x$ ,  $y = \frac{2(x - \pi)}{\pi}$ ,  $x \leq \pi$ .
19.  $y = 2^{-x}$ ,  $y = -x^2 + 3$ ,  $y = x + 1$ .
20.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = -x^2 + 2$ ,  $x = 3$ .
21.  $y = -\frac{x^2}{4} + 1$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = x$ ,  $x = -2$ .
22.  $y = x^2$ ,  $y = 4$ ,  $y = 3x + 4$ ,  $x \geq -1$ .
23.  $y = x^2$ ,  $y = 3x + 4$ ,  $y = 4$ ,  $x \leq 0$ .
24.  $y = 2^x$ ,  $y = -x^2 + 3$ ,  $y = -x + 1$ , ( $y \geq 1$ ).
25.  $y = 3^x$ ,  $y = 2^{-x}$ ,  $5x - 4y + 26 = 0$ .
26.  $y = -\frac{1}{x}$ ,  $x + 12y - 4 = 0$ ,  $4x + 9y - 16 = 0$ .
27.  $y = x^2 + 1$ ,  $y = -x^2$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2x + 1$ .
28.  $y = 2^x$ ,  $y = -x^2$ ,  $x = -1$ ,  $y = 5x - 6$ .
29.  $y = 2^x$ ,  $y = 2^{-x}$ ,  $x = 2$ ,  $5x + 6y + 2 = 0$ .
30.  $y = 2^x$ ,  $y = -2^x$ ,  $x = 2$ ,  $3x + 2y + 2 = 0$ .

Задание № 4 «Решение дифференциальных уравнений».

а) (основной уровень) определить тип дифференциального уравнения и если уравнение с разделяющимися переменными найти общее решение

а) (продвинутый уровень) определить тип дифференциального уравнения и если уравнение с разделяющимися переменными или линейное найти общее решение

б) (основной уровень) найти общее решение соответствующего однородного уравнения и частное решение с неизвестными коэффициентами

данного неоднородного уравнения, записать формулу общего решения неоднородного уравнения

**б) (продвинутый уровень) Найдите общее решение дифференциального уравнения второго порядка**

№ вариант а	а)	б)
1	$(xy^2 + x)dx + (xy^2 - y)dy = 0$	$y'' - y' = e^x$
2	$xy' + y - e^x = 0$	$y'' - 4y' + 4y = x^2$
3	$(x - y)ydx - x^2dy = 0$	$y'' - y' + y = x^3 + 6$
4	$y' = \frac{x^2 + xy + 4y^2}{x^2 - 2xy}$	$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$
5	$y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$	$3y'' + 4y' = 8x + 6$
6	$(1 + e^x)yy' = e^x$	$y'' - y = 5e^x$
7	$y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$	$y'' + y = \cos x$
8	$y' + \frac{y}{x} = \sin x$	$y'' + y' - 2y = 8\sin 2x$
9	$y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{2x^2}{1+x^2}$	$y'' + 25y = \cos 5x - 10\sin 5x$
10	$\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 y dx + \cos^2 x \cdot \operatorname{ctg} y dy = 0$	$y'' + 10y' - 15y = -9e^{-5x}$
11	$(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$	$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$
12	$y' + y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$	$y'' - 16y = 32e^{4x}$
13	$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$	$y'' - 9y = 5e^{3x}$
14	$xy' = y - xe^x$	$y'' - 3y' + 2y = \sin x$
15	$(xy' - 1)\ln x = 2y$	$y'' - 2y' - 8y = e^{4x}$
16	$2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$	$y'' + 8y' + 16y = 16x^3 + 24x^2 - 10x + 8$
17	$y' - \frac{y}{x} = xe^{\frac{x}{2}}$	$y'' - 2y' + 5y = 5x^2 + 6x - 12$
18	$y' \operatorname{ctg} x + y = 2$	$y'' - 4y' + 8y = \sin 2x$
19	$xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$	$y'' + y = 4\sin x$
20	$x^2y^2y' + 1 = y$	$y'' + 2y' + 10y = xe^x$

<b>21</b>	$y' + 2xy = xe^{-x^2}$	$y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$
<b>22</b>	$y' = \frac{x+2y}{2x-y}$	$y'' + 12y' + 36y = 72x^3 - 18$
<b>23</b>	$x(y' - y) = (1+x^2)e^x$	$y'' - 4y = 8e^{2x}$
<b>24</b>	$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$	$y'' + y = x^3 - 4x^2 + 7x - 10$
<b>25</b>	$y' + \frac{3}{x}y = -\frac{5}{x^3}$	$y'' - 3y' + 2y = -\sin x - 7\cos x$
<b>26</b>	$(1+e^{2x})y^2 dy = e^x dx$	$y'' + 6y = \cos 4x - 8\sin 4x$
<b>27</b>	$(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$	$y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$
<b>28</b>	$xy' - y = x^2 \cos x$	$y'' + 5y' + 6y = 52\sin x$
<b>29</b>	$y' = \frac{x+y}{x-y}$	$y'' - 4y' + 4y = 16e^{2x}$
<b>30</b>	$y'x + y = \cos x$	$y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$

Задание № 4 «Ряды».

Исследовать ряд на сходимость при  $x = 1$

(Продвинутый уровень) Найдите область сходимости степенного ряда.

№ варианта		№ вариан		№ вариан	
<b>1</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$	<b>11</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 4^{2n}}$	<b>21</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n^2 \cdot 5^{n+1}}$
<b>2</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} x^n}{\sqrt{n}}$	<b>12</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n} x^n}{(2n+1)^2}$	<b>22</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)^3}$
<b>3</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1) \cdot 5^{n-1}}$	<b>13</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot x^n}{(n+1) \cdot 2^n}$	<b>23</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 4^{n-1}}$
<b>4</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$	<b>14</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{(4n+1) \cdot 5^n}}$	<b>24</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} 10^{2n} \cdot x^{2n-1}$
<b>5</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(4n-3)^2}$	<b>15</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$	<b>25</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1} \cdot 2^{n-1}}$
<b>6</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n \cdot 3^n}$	<b>16</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n} x^n}{\sqrt{n}}$	<b>26</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^n \cdot x^{2n}$
<b>7</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2 \cdot 5^{2n-1}}$	<b>17</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n x^n}{\sqrt{2n-1} \cdot 2^{n-1}}$	<b>27</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1) \cdot 3^n}$

<b>8</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2} x^n}{\sqrt{n+2}}$	<b>18</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{(3n-2) \cdot 2^n}}$	<b>28</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2n+1) \cdot 8^n}$
<b>9</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^n}{n^2+1}$	<b>19</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n x^n}{2n+1}$	<b>29</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n+1)^2 \cdot \sqrt{3^{n-1}}}$
<b>10</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1) \cdot 3^{n+1}}$	<b>20</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt{n} \cdot 3^n}$	<b>30</b>	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n} \cdot 3^{n-1}}$