Графический метод решения задачи линейного программирования (ЗЛП). Определение области решений в задаче линейного программирования. Целевая функция. Система ограничений. Вектор, нормальный вектор.

Задача 1. Построить выпуклый многоугольник, заданный системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 - 3x_2 \geq -10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \leq 8, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \tag{1}$$

Пользуясь геометрической интерпретацией основной задачи линейного программирования, найти минимум и максимум линейной формы:

$$L = 2x_1 + x_2. \tag{2}$$

Решение.

Построим прямоугольную систему координат x_1Ox_2. Если в этой системе координат построить прямую $ax_1 + bx_2 = c$, то эта прямая разбивает плоскость x_1Ox_2 на две полуплоскости, каждая из которых лежит по одну сторону от прямой. Сама прямая в этом случае называется граничной и принадлежит обеим полуплоскостям. Координаты точек, лежащих в одной полуплоскости, удовлетворяют неравенству $ax_1 + bx_2 \leq c$, а координаты точек, лежащих в другой полуплоскости, удовлетворяют неравенству $ax_1 + bx_2 \geq c$.

Построим в плоскости x_1Ox_2 граничные прямые: $x_1 - x_2 = -2$ (*AB*), $x_1 - 3x_2 = -10$ (*BC*), $x_1 + 2x_2 = 4$ (*AE*), $x_1 = 8$ (CD) и $x_2 = 0$ (*ED*). В результате получим пятиугольник *ABCDE* (рис. 1). Значения x_1и x_2, удовлетворяющие системе неравенств (1), являются координатами точек, лежащих внутри или на границе найденного пятиугольника. Теперь задача сводится к тому, чтобы найти те значения x_1и x_2, при которых линейная форма $L(2)$ имеет минимум, и те значения x_1и x_2, при которых линейная форма L достигает максимума. Из рисунка 1 видно, что координаты всех точек, лежащих внутри или на границе пятиугольника, не являются отрицательными, т.е. все значения x_1и x_2 больше или равны нулю.

Для каждой точки плоскости x_1Ox_2 линейная форма L принимает фиксированное значение. Множество точек, при которых линейная форма L принимает фиксированное значение L_1, есть прямая $2x_1 + x_2 = L_1$ (l_1), которая перпендикулярна вектору $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{2\vec{\imath}} + \boldsymbol{\vec{\jmath}}$. Если прямую l_1 передвигать параллельно самой себе в положительном направлении вектора $\boldsymbol{N}$, то линейная форма L будет возрастать, а в противоположном направлении – убывать.

Построим прямую l_1 для того случая, когда $L = 0$, т.е. построим прямую $2x_1 + x_2 = 0$. Как видно из рисунка 1, при передвижении прямой l_1 в положительном направлении вектора $\boldsymbol{N}$ она впервые встретиться с вершиной *A* построенного пятиугольник *ABCDE*. В этой вершине линейная форма L имеет минимум. Следовательно, $L_{min} = 2 \cdot 0 + 1 \cdot 2 = 2$. При дальнейшем передвижении прямой l_1 параллельно самой себе в положительном направлении вектора $\boldsymbol{N}$ значение линейной формы L будет возрастать, и оно достигнет максимального значения в точке *C* (8; 6).

Таким образом, $L_{max} = 2 \cdot 8 + 1 \cdot 6 = 22$.

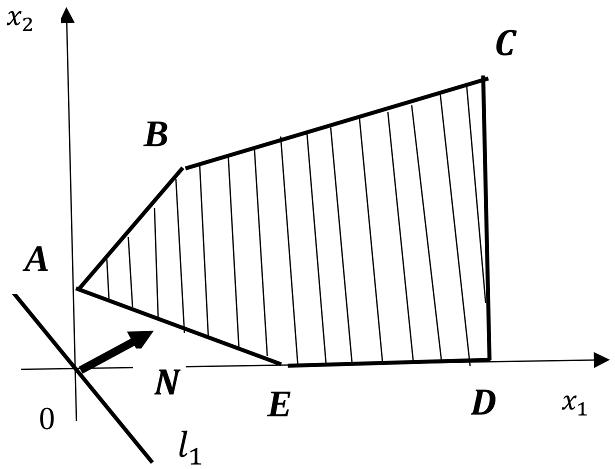

Рисунок 1 – Решение геометрическим способом задачи 1

Задача 2. Хозяйству требуется не более 10 трехтонных автомашин и не более 8 пятитонных. Отпускная цена машины первой марки 2 000 у.е., второй марки 4 000 у.е. Хозяйство может выделить для приобретения машин 40 000 у.е. Сколько следует приобрести автомашин каждой марки в отдельности, чтобы их общая (суммарная) грузоподъемность была максимальной.

Решение.

Пусть приобретено x_1 – трехтонных, x_2 – пятитонных автомашин. Тогда заданные условия задачи можно записать так:

$$\begin{cases} x_1 \leq 10, \\ x_2 \leq 8, \\ 2000x_1 + 4000x_2 = 40000, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 \leq 10, \\ x_2 \leq 8, \\ x_1 + 2x_2 = 20. \end{cases} \tag{3}$$

Линейная форма L (часто ее называют целевой функцией) применительно к условиям данной задачи имеет вид

$$L = 3x_1 + 5x_2. \tag{4}$$

Требуется найти те значения x_1 и x_2, при которых L достигает максимального значения. По условию задачи $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$.

Построим многоугольник *OABCD* (рис. 2), вектор $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}}$, прямую $3x_1 + 5x_2 = 0$ (l_1) и затем, перемещая прямую l_1 в положительном направлении вектора $\boldsymbol{N}$ перпендикулярно этому вектору, установим, что L достигает максимального значения в точке C, для которой $x_1 = 10$ и $x_2 = 5$.

Следовательно, хозяйству следует приобрести 10 трехтонных и 5 пятитонных машин. В этом случае общая грузоподъёмность составит 55 тонн.

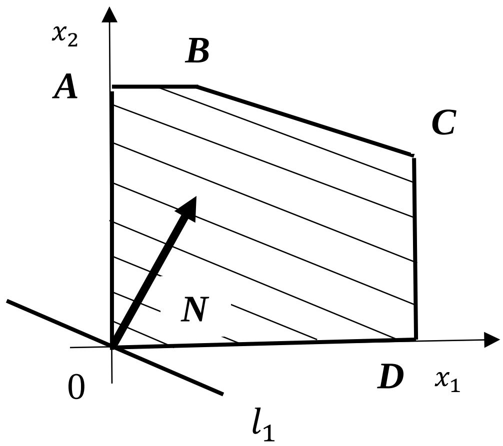

Рисунок 2 – Решение геометрическим способом задачи 2

Задача 3. Для кормления коров используются концентрированные и грубые корма. 1 кг концентрата содержит 1 кормовую единицу и 0,08 протеина, 1 кг грубых кормов содержит 0,25 кормовых единиц и 0,04 протеина. Суточный рацион одной коровы должен содержать не менее 10 кормовых единиц и не менее 1,2 единиц протеина. Определить оптимальный вариант суточного рациона кормления при условии, чтобы стоимость рациона была минимальной, если 1 кг концентрата стоит 5 у.е., а 1 кг грубых кормов – 2 у.е.

Решение.

Пусть x_1 – количество концентрированных кормов, а x_2 – количество грубых кормов суточного рациона. Условия задачи характеризуются следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0{,}25 \cdot x_2 \geq 10, \\ 0{,}08 \cdot x_1 + 0{,}04 \cdot x_2 \geq 1{,}2, \end{cases} \text{или} \quad \begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 40, \\ 2x_1 + x_2 \geq 30. \end{cases} \qquad (5)$$

При этих условиях требуется найти наименьшее значение линейной формы $L = 5x_1 + 2x_2$.

Построим в системе координат x_1Ox_2 граничные прямые $4x_1 + x_2 = 40$ (AB) и $2x_1 + x_2 = 30$ (CD) (рис. 3). Решив совместно систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 40, \\ 2x_1 + x_2 = 30, \end{cases}$$

Находим $x_1 = 5$ и $x_2 = 20$. Следовательно, прямые AB и CD пересекаются в точке E (5; 20).

Построим в этой же системе прямую $5x_1 + 2x_2 = 0$ (l_1), которая перпендикулярна вектору $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath}}$. Перемещая прямую l_1 параллельно самой себе в положительном направлении вектора $\boldsymbol{N}$, замечаем, что эта прямая

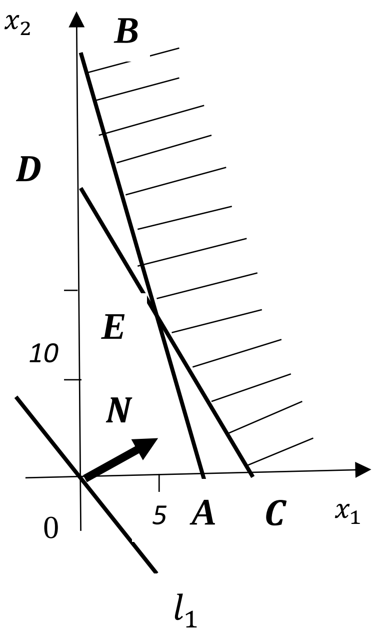

Рисунок 3 – Решение геометрическим способом задачи 3

впервые встречается с точкой E, координаты которой являются решением системы неравенств. В этой точке линейная форма принимает минимальное значение.

Итак, суточный рацион должен содержать 5 кг концентрата и 20 кг грубых кормов. Тогда стоимость суточного рациона буде равна

$$L_{min} = 5 \cdot 5 + 2 \cdot 20 = 65 \text{ у. е.}$$

Любое другое сочетание кормов, обеспечивающее выполнение заданных условий, приведет к удорожанию суточного рациона.

Задание для самостоятельного решения

1. Построить выпуклый многоугольник, заданный системой неравенств

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \geq -2, \\ x_1 - 3x_2 \geq -2a - 10, \\ x_1 + 2x_2 \geq 3a + 4, \\ x_1 \leq a + 8, \\ x_2 \geq a. \end{cases} \qquad (1)$$

Пользуясь графическим методом, найти минимум и максимум линейной формы $L = 2x_1 + x_2 - 3$. Значения параметра *a* даны в таблице:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

2.

Хозяйству требуется не более *a* трехтонных автомашин и не более (*a-2*) пятитонных. Отпускная цена машины первой марки 2 000 у.е., второй марки 4 000 у.е. Хозяйство может выделить для приобретения машин (6*a-20*) тыс. у.е. Сколько следует приобрести автомашин каждой марки в отдельности, чтобы их общая (суммарная) грузоподъемность была максимальной. Решить задачу графическим методом. Значения параметра *a* даны в таблице:

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20