Практическая работа № 1
«Построение простейших математических моделей. Построение простейших статистических моделей»

Порядок выполнения заданий.

Задание 1. Составить математическую модель следующей задачи.

На складе имеется 300 кг сырья. Надо изготовить два вида продукции. На изготовление первого изделия требуется 2 кг сырья, а на изготовление второго изделия — 5 кг. Определить план выпуска двух изделий.

Решение.

Обозначим, x_1 – единица первого изделия, x_2 – единица второго изделия. Тогда составим математическую модель:

$$2x_1+5x_2=300.$$

Задание 2. Составить математическую модель следующей задачи.

Предположим, что для производства продукции вида A и B можно использовать материал 3-х сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида A расходуется 14 кг первого сорта, 12 кг второго сорта и 8 кг третьего сорта. На изготовление продукции вида B расходуется 8 кг первого сорта, 4 кг второго сорта, 2 кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта 624 кг, второго сорта 541 кг, третьего сорта 376 кг. От реализации единицы готовой продукции вида A фабрика имеет прибыль 7 руб., а от реализации единицы готовой продукции вида B фабрика имеет прибыль 3 руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов A и B.

Решение.

Составим математическую модель задачи.

Пусть x_1 – единица готовой продукции вида A,

x_2 – единица готовой продукции вида B.

Цель фабрики получить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов A и B, тогда:

$F = 7x_1 + 3x_2 \to max.$

Система ограничений:

$$\begin{cases} 14x_1 + 8x_2 \le 624; \\ 12x_1 + 4x_2 \le 541; \\ 8x_1 + 2x_2 \le 376. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$ – *условие неотрицательности*.

Задание 3.

Составить математическую модель следующей задачи.

Имеются три пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3 и пять пунктов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 потребления этого груза. На пунктах A_1, A_2 и A_3 находится груз соответственно в количестве 200, 450, 250 тонн. В пункты B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 требуется доставить соответственно 100, 125, 325, 250, 100 тонн груза.

Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	**Пункты потребления**				
	B₁	***B₂***	***B₃***	***B₄***	***B₅***
A₁	5	8	7	10	3
A₂	4	2	2	5	6
A₃	7	3	5	9	2

Решение.

1. *Проверка сбалансированности модели задачи.*

Модель является сбалансированной, т.к. суммарный объем запасов сырья равен суммарному объему потребности в ней:

200+450+250=100+125+325+250+100.

2. *Построение математической модели*.

Неизвестным в этой задаче является объем перевозок.

Пусть x_{ij} – объем перевозок с i-го предприятия в j-ый пункт потребления.

Суммарные транспортные расходы – это функционал качества (критерий цели):

$$F = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij},$$

где c_{ij} – стоимость перевозки единицы продукции с i-го предприятия в j-й пункт потребления.

Неизвестные в этой задачи должны удовлетворять следующим ограничениям:

- Объем перевозок не могут быть отрицательными;
- Поскольку модель сбалансирована, то вся продукция должна быть вывезена с предприятия, а потребность всех пунктов потребления должна быть полностью удовлетворена.

Итак, имеем следующую задачу:

- Найти минимум функционала:

$$F = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{5} c_{ij}\, x_{ij} \to min.$$

- При ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} x_{i1} = 100; \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i2} = 125; \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i3} = 325; \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i4} = 250; \\ \sum_{i=1}^{3} x_{i5} = 100. \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{5} x_{1j} = 200; \\ \sum_{j=1}^{5} x_{2j} = 450; \\ \sum_{j=1}^{5} x_{3j} = 250. \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0,\ i \in [1;3],\ j \in [1;5].$

Задания для самостоятельной работы.

Задание 1. Составить математическую модель следующей задачи.

Предположим, что для производства продукции вида A и B можно использовать материал трех сортов. При этом на изготовление единицы изделия вида A расходуется a_1 кг первого сорта, a_2 кг второго сорта и a_3 кг третьего сорта. На изготовление продукции вида B расходуется b_1 кг первого сорта, b_2 кг второго сорта, b_3 кг третьего сорта. На складе фабрики имеется всего материала первого сорта c_1 кг, второго сорта c_2 кг, третьего сорта c_3 кг. От реализации единицы готовой продукции вида A фабрика имеет прибыль α руб., а от реализации единицы готовой продукции вида B фабрика имеет прибыль β руб. Определить максимальную прибыль от реализации всей продукции видов A и B.

Вариант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	c_1	c_2	c_3	α	β
1	19	16	19	26	17	8	868	638	853	5	4
2	14	15	20	40	27	4	1200	993	1097	5	13
3	9	15	15	27	15	3	606	802	840	11	6
4	13	13	11	23	11	1	608	614	575	5	7
5	19	16	19	31	9	1	1121	706	1066	16	19

Задача 2. Составить математическую модель следующей задачи.

Имеются три пункта поставки однородного груза A_1, A_2, A_3 и пять пунктов B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 потребления этого груза. На пунктах A_1, A_2 и A_3 находится груз соответственно в количестве a_1, a_2 и a_3 тонн. В пункты B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 требуется доставить соответственно b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 тонн груза. Расстояние между пунктами поставки и пунктами потребления приведено в таблице:

Пункты поставки	**Пункты потребления**				
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}
A_2	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}
A_3	D_{31}	D_{23}	D_{33}	D_{34}	D_{35}

Найти такой план закрепления потребителей за поставщиками однородного груза, чтобы общие затраты по перевозкам были минимальными.

Вариант	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	D
1	300	250	200	210	150	120	135	135	$\begin{pmatrix} 4 & 8 & 13 & 2 & 7 \\ 9 & 4 & 11 & 9 & 17 \\ 3 & 16 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
2	350	200	300	170	140	200	195	145	$\begin{pmatrix} 22 & 14 & 16 & 28 & 30 \\ 19 & 17 & 26 & 36 & 36 \\ 37 & 30 & 31 & 39 & 41 \end{pmatrix}$
3	200	250	200	190	100	120	110	130	$\begin{pmatrix} 28 & 27 & 18 & 27 & 24 \\ 18 & 26 & 27 & 32 & 21 \\ 27 & 33 & 23 & 31 & 34 \end{pmatrix}$
4	230	250	170	140	90	160	110	150	$\begin{pmatrix} 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \\ 49 & 26 & 27 & 18 & 38 \\ 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \end{pmatrix}$

5	200	300	250	210	150	120	135	135	$\begin{pmatrix} 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}$

Контрольные вопросы

1. Что такое модель? Приведите классификацию моделей. Какие вы знаете виды математических моделей? Дайте определение целевой функции.

2. Что такое область допустимых решений? Что называется допустимым решением, оптимальным решением? Какие способы реализации математических моделей вы знаете?