4.9. В регион изделия поставляются тремя фирмами в соотношении $k_1 : k_2 : k_3$. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют p_1 %, второй – p_2 %, третьей – p_3 %. Найдите вероятность того, что

а) приобретенное изделие оказалось стандартным;

б) приобретенное изделие оказалось нестандартным.

Вариант	k_1	k_2	k_3	p_1	p_2	p_3
1	5	8	7	90	85	75
2	4	7	9	92	88	76
3	3	6	11	95	80	70
4	5	7	8	96	84	75
5	4	9	7	87	76	95
6	3	11	6	90	89	77

4.10. В регион изделия поставляются тремя фирмами в соотношении $k_1 : k_2 : k_3$. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют p_1 %, второй – p_2 %, третьей – p_3 %. Найдите вероятность того, что приобретенное изделие изготовлено третьей фирмой, если

а) изделие оказалось стандартным;

б) изделие оказалось нестандартным.

Вариант	k_1	k_2	k_3	p_1	p_2	p_3
1	5	8	7	90	85	75
2	4	7	9	92	88	76
3	3	6	11	95	80	70
4	5	7	8	96	84	75
5	4	9	7	87	76	95
6	3	11	6	90	89	77

ТЕМА 5 ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ, МУАВРА-ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Литература

[1], глава 2, § 2.1, 2.2, 2.3.

[2], глава 5, § 1, 2, 3.

Формула Бернулли

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Такая серия испытаний называется схемой Бернулли.

Вероятность $P_n(m)$ того, что событие A в n испытаниях появится m раз вычисляется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{5.1}$$

где $q = 1 - p$ – вероятность противоположного события $\overline{A}$.

Однако при большом числе испытаний n вычисление вероятности по формуле Бернулли становится громоздким. В этом случае применяют асимптотические (приближенные) формулы. К ним относятся локальная формула Муавра-Лапласа и формула Пуассона, которые дают более точный результат , чем больше n.

Локальная формула Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз приближенно вычисляется по *локальной формуле Муавра-Лапласа:*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \tag{5.2}$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.

$$P_{1000}(0) \approx \frac{2^0}{0!}e^{-2} \approx 0{,}1353;$$

$$P_{1000}(1) \approx \frac{2}{1!}e^{-2} \approx 0{,}2707;$$

$$P_{1000}(2) \approx \frac{2^2}{2!}e^{-2} \approx 0{,}2707.$$

Получим

$$P_{1000}(m \le 2) \approx 0{,}1353 + 0{,}2707 + 0{,}2707 = 0{,}6767 \approx 0{,}677.$$

Контрольные вопросы

1. Какие испытания называются независимыми?
2. В чем состоит схема Бернулли проведения испытаний?
3. Запишите формулу Бернулли. Что она позволяет найти? При каком числе испытаний целесообразно её применять?
4. Запишите локальную формулу Лапласа. Каковы условия её применения?
5. Запишите формулу Пуассона. При каких условиях её используют?
6. Запишите интегральную формулу Лапласа. Что она позволяет найти? Каковы условия её применения?

Задачи

5.1. В стаде коров l % первотелок. Наудачу выбираются n коров. Какова вероятность того, что среди отобранных коров будет:

а) m_1 первотелок;

б) от m_2 до m_3 первотелок;

в) по крайней мере m_4 коров-первотелок?

Вариант	l	n	m_1	m_2	m_3	m_4
1	20	5	3	2	4	3
2	25	6	3	3	5	4
3	19	7	4	2	5	5
4	22	5	2	2	4	2
5	24	6	2	2	5	3
6	18	7	3	3	5	5

5.2. В партии картофеля имеется l % клубней пораженных болезнью. Какова вероятность того, что среди наудачу выбранных n клубней будет:

а) m_1 пораженных;

б) от m_2 до m_3 пораженных;

в) не более m_4 пораженных?

Вариант	l	n	m_1	m_2	m_3	m_4
1	15	6	2	1	3	4
2	20	5	4	2	4	3
3	22	6	3	3	5	3
4	18	7	4	5	7	4
5	21	5	3	2	4	3
6	24	6	2	4	6	3

5.3. Из k яиц в среднем получаются l живых цыпленка. Какова вероятность того, что из n яиц получится:

а) m_1 живых цыпленка;

б) от m_2 до m_3 живых цыпленка;

в) хотя бы m_4 живых цыпленка?

Вариант	k	l	n	m_1	m_2	m_3	m_4
1	5	4	200	170	155	175	150
2	8	6	200	150	140	160	130
3	10	7	200	140	130	150	120
4	10	9	300	260	250	260	250
5	8	7	300	250	240	270	260
6	9	8	100	80	50	90	85

5.4. В результате проверки качества приготовленного для посева зерна было установлено, что l % зерен всхожи. Найти вероятность того, что из отобранных и высаженных n зерен прорастет:

а) m_1 штук;

б) от m_2 до m_3 штук;

в) не менее m_4 штук?

Вариант	l	n	m_1	m_2	m_3	m_4
1	85	1000	700	700	740	900
2	80	1000	600	650	800	850
3	75	1000	600	700	800	500
4	70	1000	500	600	800	700
5	90	1000	800	800	900	700
6	95	1000	900	700	900	800

5.5. Среди семян клевера l % семян павилики. Какова вероятность обнаружить в навеске из n семян:

а) m_1 семян павилики;

б) менее m_2 семян павилики?

Вариант	l	n	m_1	m_2	Вариант	l	n	m_1	m_2
1	5	100	2	2	4	5	200	3	3
2	4	100	4	3	5	4	200	2	4
3	3	100	3	2	6	3	200	4	2

5.6. Доля брака при некотором производственном процессе составляет l %. При обнаружении в партии из n изделий не менее m бракованных вся партия задерживается. Определить вероятность того, что:

а) в партии будет обнаружено m бракованных изделий;

б) партия будет принята.

Вариант	l	n	m	Вариант	l	n	m
1	3	150	4	4	2	100	3
2	5	200	5	5	3	200	4
3	4	250	5	6	1	300	6

ТЕМА 6 НАИВЕРОЯТНЕЙШЕЕ ЧИСЛО ПОЯВЛЕНИЙ СОБЫТИЯ

Литература

[1], глава 2, § 2.1.

Число m_0 называется *наивероятнейшим числом* появлений события A или *модой*, если ему соответствует наибольшая вероятность $P_n(m_0)$ наступления события A m_0 раз в n независимых испытаниях.

Для определения моды используют неравенство:

$$np - q \le m_0 \le np + p, \qquad (6.1)$$

где n – число независимых испытаний;

p – вероятность появления события A в одном испытании;

q – вероятность непоявления события A в одном испытании, $q = 1 - p$.

Число m_0 появлений события A может принимать только целые значения, поэтому модой m_0 – целое число, принадлежащее промежутку $[np - q;\ np + p]$

Заметим, что если $np + p$ – целое число, то наивероятнейших чисел два: $m_0 = np + p$ и $m_0' = np - q$.

Примеры решения задач

Пример 6.1. Всхожесть семян данной партии равна 85%. Посеяли 25 семян. Найдите наивероятнейшее число взошедших семян.

Решение.

Проводится $n = 25$ повторных независимых испытаний (наблюдений за посеянными семенами), в каждом из которых вероятность наступления события A – прорастания семени – постоянна и равна $p = 0{,}85$. Значит, испытания удовлетворяют схеме Бернулли. Вероятность $q = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

Воспользуемся неравенством для определения моды:

$$np - q \le m_0 \le np + p.$$

Получим

$$25\cdot 0{,}85-0{,}15\le m_0\le 25\cdot 0{,}85+0{,}85,$$

$$21{,}1\le m_0\le 22{,}1.$$

Целое число, заключенное от 21,1 до 22,1 – число 22. Значит, наивероятнейшее число взошедших семян $m_0=22$.

Пример 6.2. Найти наивероятнейшее число бычков из 17 родившихся на ферме телят, если вероятность рождения бычка равна 0,5.

Решение.

Проводится $n=17$ повторных независимых испытаний (наблюдений за отелами), в каждом из которых вероятность наступления события A (рождение бычка) постоянна и равна $p=0{,}5$. Значит, испытания удовлетворяют схеме Бернулли. Вероятность $q=1-0{,}5=0{,}5$.

Воспользуемся неравенством для определения моды:

$$np-q\le m_0\le np+p.$$

Получим

$$17\cdot 0{,}5-0{,}5\le m_0\le 17\cdot 0{,}5+0{,}5,$$

$$8\le m_0\le 9.$$

Неравенству удовлетворяют два целых числа: 8 и 9. Таким образом, имеется два наивероятнейших числа родившихся бычков: $m_0=8$ и $m_0'=9$.

Пример 6.3. Известно, что вероятность прорастания семян данной партии пшеницы 0,95. Сколько семян следует взять из этой партии, чтобы наивероятнейшее число взошедших семян равнялось 100?

Решение.

Проводится некоторое число n повторных независимых испытаний (наблюдений за посеянными семенами), в каждом из которых вероятность наступления события A (прорастание семени) постоянна и равна $p=0{,}95$. Значит, испытания удовлетворяют схеме Бернулли. Вероятность $q=1-0{,}95=0{,}05$. Известно наивероятнейшее число наступлений события $m_0=100$.

Воспользуемся неравенством для определения моды:

$$np-q\le m_0\le np+p.$$

Подставим данные задачи:

$$0{,}95n-0{,}05\le 100\le 0{,}95n+0{,}95$$

Перейдем к системе неравенств:

$$\begin{cases}0{,}95n-0{,}05\le 100;\\ 0{,}95n+0{,}95\ge 100;\end{cases}$$

$$\begin{cases}0{,}95n\le 100{,}05;\\ 0{,}95n\ge 99{,}05;\end{cases}$$

$$\begin{cases}n\le 105{,}3;\\ n\ge 104{,}3.\end{cases}$$

Отсюда $104{,}3\le n\le 105{,}3$.

Целое число, удовлетворяющее неравенству, $n=105$.

Таким образом, следует взять 105 семян из данной партии.

Пример 6.4. По многолетним данным в июле наиболее часто наблюдалось 23 дня с ясной погодой. Найти вероятность ясной погоды в течение дня, считая её постоянной для каждого дня июля.

Решение.

Проводится $n=31$ повторных независимых испытаний (наблюдений за погодой в июле), в каждом из которых вероятность наступления события A (ясная погода в течение дня) постоянна и равна p. Значит, испытания удовлетворяют схеме Бернулли. Известно наивероятнейшее число наступлений события $m_0=23$.

Воспользуемся неравенством для определения моды:

$$np-q\le m_0\le np+p.$$

Подставим данные задачи и учтем, что $q=1-p$:

$$31p-(1-p)\le 23\le 31p+p,$$

$$32p-1\le 23\le 32p.$$

Перейдем к системе неравенств

$$\begin{cases}32p-1\le 23;\\ 32p\ge 23;\end{cases}\qquad \begin{cases}p\le 0{,}75;\\ p\ge 0{,}72.\end{cases}$$

Отсюда $0{,}72\le p\le 0{,}75$.

Следовательно, вероятность ясной погоды в течение дня в июле составляет 72 -75%.

Контрольные вопросы

1. Что такое наивероятнейшее число появлений события или мода?

2. Как определить наивероятнейшее число появлений события?

3. В каком случае мода принимает два значения?

4. Каким образом, зная наивероятнейшее число появлений события и вероятность его наступления, найти число проведенных независимых испытаний?

Задачи

6.1. На данном участке поля l % кустов томатов поражены фитофторой. Каково наиболее вероятное число пораженных кустов в одном ряду, если в каждом ряду n кустов?

Вариант	l	n	Вариант	l	n
1	30	40	4	35	30
2	25	50	5	40	20
3	20	60	6	15	40

6.2. Партия из N куриных яиц в среднем содержит m яиц, неудовлетворяющих нормам приемки. Контролю подвергается n яиц из этой партии. Каково наиболее вероятное число яиц в выборке, удовлетворяющих нормам приемки?

Вариант	N	m	n	Вариант	N	m	n
1	400	15	40	4	300	20	40
2	400	16	50	5	500	25	50
3	400	20	60	6	500	30	60

6.3. Прибор состоит из n независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в момент включения прибора равна p. Найти вероятность наивернейшего числа отказавших элементов.

Вариант	n	p	Вариант	n	p
1	8	0,3	4	7	0,2
2	5	0,2	5	6	0,3
3	6	0,3	6	8	0,2

6.4. Наивероятнейшее число изделий высшего сорта, изготавливаемых рабочим, равно m_0. Найти процент изделий высшего сорта, если рабочий за смену может изготовить n изделий.

Вариант	m_0	n	Вариант	m_0	n
1	114	120	4	110	130
2	120	132	5	100	120
3	150	200	6	116	125

6.5. Наиболее вероятно, что из n опытов m дадут положительный результат. Какова вероятность положительного результата в каждом опыте?

Вариант	n	m	Вариант	n	m
1	10	5	4	7	3
2	8	6	5	6	4
3	9	4	6	5	2

6.6. В стаде l % коров больны некоторым заболеванием. Сколько надо отобрать коров, чтобы наивероятнейшее число здоровых коров было равно m_0?

Вариант	l	m_0	Вариант	l	m_0
1	10	10	4	7	30
2	15	15	5	6	25
3	8	20	6	9	40

6.7. Всхожесть семян некоторого сорта составляет l %. Сколько нужно посеять семян, чтобы наиболее вероятным числом взошедших было m_0?

Вариант	l	m_0	Вариант	l	m_0
1	70	10	4	85	15
2	75	15	5	90	20
3	80	20	6	95	10