ТЕМА 4 НЕПРЕРЫВНАЯ СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА. ФУНКЦИЯ И ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Литература
[1], глава 3, § 3.5, 3.6.
[2], глава 10, § 1, 2, 3; глава 11, § 1, 2, 3, 4, 5.

Функция распределения вероятностей случайной величины

Функцией распределения случайной величины X называется функция *F(x),* которая для любого числа $x \in R$ равна вероятности события *(X<x),* т.е. вероятности того, что случайная величина X примет значение, меньшее *x*.

Таким образом, по определению

$$F(x) = P(X < x). \tag{4.1}$$

Функцию *F(x)* называют также *интегральной функцией распределения.*

Геометрически равенство (4.1) можно истолковать так: *F(x)* есть вероятность того, что случайная величина X примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей *левее точки x*, т.е. случайная точка X попадет в интервал $(-\infty; x)$, (*рисунок 3*).

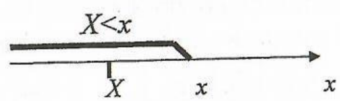

Рисунок 3

Функция распределения обладает следующими *свойствами*:

1. *F(x)* ограничена, т.е.

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. *F(x)* – неубывающая функция на *R*, т.е. если $x_2 > x_1$, то

$$F(x_2) \ge F(x_1).$$

3. *F(x)* обращается в ноль на минус бесконечности и равна единице в плюс бесконечности, т.е.

$$F(-\infty) = 0; \quad F(+\infty) = 1.$$

4. Вероятность попадания случайной величины X в промежуток $[a, b)$ равна приращению ее функции распределения на этом промежутке, т.е.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a). \tag{4.2}$$

5. Вероятность того, что непрерывная случайная величина принимает какое-либо конкретное значение x_0 равна нулю, т.е.

$$P(X = x_0) = 0. \tag{4.3}$$

6. *F(x)* непрерывна слева, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0).$$

Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется производная ее функции распределения.

Обозначается через *f(x)*.

Таким образом, по определению

$$f(x) = F'(x). \tag{4.4}$$

Функцию *f(x)* называют также *дифференциальной функцией распределения.*

Плотность распределения обладает следующими *свойствами*:

1. $f(x)$ неотрицательная, т.е.

$$f(x) \ge 0.$$

2. Вероятность попадания непрерывной случайной величины в промежуток $[a; b]$ равна определенному интегралу от ее плотности в пределах от *a* до *b*, т.е.

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)dx. \tag{4.5}$$

Геометрически эта вероятность равна площади *S* фигуры, ограниченной сверху кривой распределения $f(x)$ и опирающейся на отрезок $[a; b]$.

3. Функция распределения непрерывной случайной величины может быть выражена через плотность вероятности по формуле

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt. \qquad (4.6)$$

4. *Условие нормировки*: несобственный интеграл от плотности вероятности непрерывной случайной величины в бесконечных пределах равен единице, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1. \qquad (4.7)$$

Следствие: $P(X=c)=P(c\le X\le c)=\int_{c}^{c} f(x)dx=0$.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

x_i	1	3
p_i	0,7	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение.

Отметим на числовой оси возможные значения случайной величины X.

Рассмотрим интервал $x\le 1$ (*рисунок 4.1*).

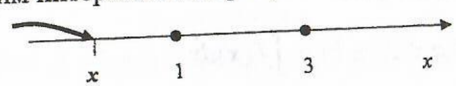

Рисунок 4.1

Событие $X<x$ для этого интервала является невозможным, так как меньше единицы нет ни одного возможного значения X, следовательно, для интервала $x\le 1$ значения функции $F(x)=P(X<x)=0$.

Рассмотрим следующий интервал $1<x\le 3$ (*рисунок 4.2*).

Рисунок 4.2

Событие $X<x$, если $x\in(1;3]$, состоит в том, что X примет значение 1, так как других возможных значений случайной величины X на этом интервале нет. Вероятность события $X=1$ по условию равна 0,7. Значит, в интервале $1<x\le 3$ функция $F(x)=P(X=1)=0{,}7$.

И, наконец, интервал $x>3$ (*рисунок 4.3*).

Рисунок 4.3

Тогда событие $X<x$ означает, что X примет значения $X=1$ или $X=3$, каждое из которых меньше любого значения x, принимаемого на интервале $(3;+\infty)$, т.е.

$$F(x)=P(X<x)=P[(X=1)\cup(X=3)]=0{,}7+0{,}3=1.$$

Итак,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 1,\\ 0{,}7, & \text{если } 1<x\le 3,\\ 1, & \text{если } x>3.\end{cases}$$

График функции $F(x)$ приведен на *рисунке 4.4*:

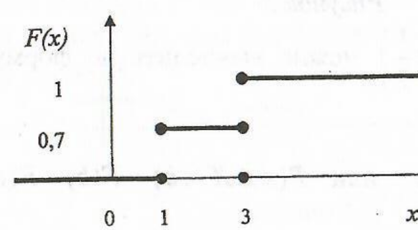

Рисунок 4.4

Пример 4.2. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ x^2, & при\ 0<x\le 1,\\ 1, & при\ x>1.\end{cases}$$

Найти плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$, вычислить вероятность $P\left(\frac{1}{3}<X<\frac{1}{2}\right)$.

Решение.

По определению плотности вероятностей (4.4) имеем:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ 2x, & при\ 0<x\le 1,\\ 0, & при\ x>1.\end{cases}$$

(В точке $x=1$ плотность $f(x)=F'(x)$ не существует, т.к. $F(x)$ в этой точке не дифференцируема).

Графики $F(x)$ и $f(x)$ отражены на *рисунке 5*:

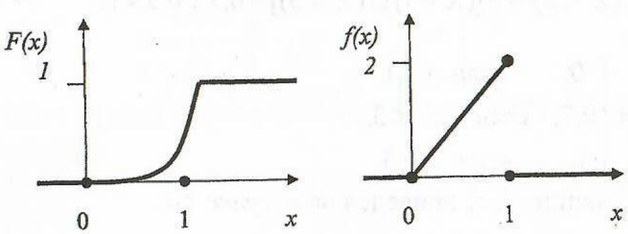

Рисунок 5

Вероятность $P\left(\frac{1}{3}<X<\frac{1}{2}\right)$ можно вычислить по формулам (4.2) или (4.5):

$$P(a\le X\le b)=\int_a^b f(x)dx \quad или \quad P(x\le X<b)=F(b)-F(a).$$

$$P\left(\frac{1}{3}<X<\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{36}$$

или

$$P\left(\frac{1}{3}<X<\frac{1}{2}\right)=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}2xdx=x^2\Big|_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{36}.$$

Пример 4.3. Непрерывная случайная величина задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при\ x\le 0,\\ 2x, & при\ 0<x\le 1,\\ 0, & при\ x>1.\end{cases}$$

Найти функцию распределения $F(x)$.

Решение.

Воспользуемся формулой (4.6): $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$.

а) Если $x\le 0$, то $f(t)=0$ (*рисунок 6.1*), следовательно, $F(x)=\int_{-\infty}^{x}0dt=0$.

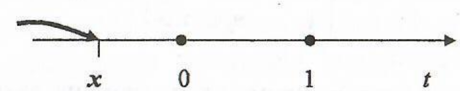

Рисунок 6.1

б) Если $0<x\le 1$, то при интегрировании от $-\infty$ до x $f(t)$ в точке $t=0$ меняет вид: слева от точки $t=0$ $f(t)=0$, в интервале от 0 до x $f(t)=2t$.

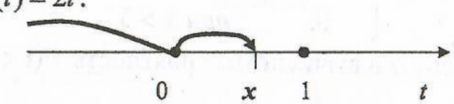

Рисунок 6.2

Разобьем интервал $(-\infty;x]$ точкой $t=0$ (*рисунок 6.2*), тогда

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{x} f(t)dt .$$

Запишем теперь под интегралами выражения для $f(t)$ на соответствующих интервалах:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 2tdt = x^2 .$$

Итак, если $0 < x \le 1$, то $F(x) = x^2$.

в) Если $x > 1$, то $f(t)$ меняет вид в точках $t = 0$ и $t = 1$.

Рисунок 6.3

Разобьем интервал интегрирования $(-\infty; x]$ точками $t = 0$ и $t = 1$ на три интервала (*рисунок 6.3*), получим:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0dt + \int_{0}^{1} 2tdt + \int_{1}^{x} 0dt = 0 + 1 + 0 = 1 .$$

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le 0, \\ x^2, & при\ 0 < x \le 1, \\ 1, & при\ x > 1. \end{cases}$$

Пример 4.4. Случайная величина X подчинена закону распределения с плотностью $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x \le 0, \\ a(3x - x^2), & при\ 0 < x \le 3, \\ 0, & при\ x > 3. \end{cases}$$

Найти коэффициент a и вычислить вероятность $P(1 < X < 2)$.

Решение.

По свойству плотности (4.7) имеем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 .$$

Так как все возможные значения случайной величины заключены на отрезке $[0;3]$, то

$$\int_{0}^{3} a(3x - x^2)dx = 1 .$$

Откуда:

$$a\left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^3 = a\left(\frac{27}{2} - 9\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2}{9} .$$

Вычислим вероятность $P(1 < X < 2)$ по формуле (4.5):

$$P(1 < X < 2) =$$

$$\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{9}x^2\right)dx = \left[\frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}\right]_1^2 = \frac{4}{3} - \frac{16}{27} - \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{13}{27} .$$

Контрольные вопросы

1. Какие случайные величины называются непрерывными?
2. Какими законами задается непрерывная случайная величина?
3. Что называется функцией распределения вероятностей случайной величины? Перечислить свойства $F(x)$.
4. Как определяется плотность вероятности непрерывной случайной величины? Перечислить свойства $f(x)$.
5. Как найти вероятность попадания значения непрерывной случайной величины в заданный интервал?

Задачи

4.1. Дан ряд распределения дискретной случайной величины

x_i	x_1	x_2	x_3
p_i	p_1	p_2	p_3

Найти: а) p_3, б) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Вариант	x_1	x_2	x_3	p_1	p_2
1	1	2	3	0,2	0,3
2	1	3	4	0,1	0,7
3	0	2	3	0,4	0,2
4	0	1	2	0,3	0,4
5	1	3	5	0,4	0,1
6	0	2	4	0,3	0,2

√ 4.2. В партии электролампочек l% бракованных. Наудачу выбираются m лампочек. Найти и построить график функции распределения дискретной случайной величины X – числа бракованных лампочек среди выбранных.

Вариант	l	m	Вариант	l	m
1	10	3	4	15	3
2	15	4	5	20	4
3	20	3	6	25	3

√ 4.3. Среди n клубней картофеля m клубней сорта «Синеглазка». Наудачу отобраны l клубней. Найти функцию распределения дискретной случайной величины X – числа клубней сорта «Синеглазка» среди отобранных и построить график этой функции.

Вариант	m	n	l	Вариант	m	n	l
1	4	10	3	4	2	20	2
2	6	10	2	5	3	20	3
3	3	10	3	6	4	20	2

√ 4.4. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x\le 0,\\ \dfrac{x^l}{M}, & при\ 0<x\le m,\\ 1, & при\ x>m. \end{cases}$$

Найти:

а) плотность распределения $f(x)$;

б) коэффициент М.

Вариант	l	m	Вариант	l	m
1	2	10	4	3	7
2	2	9	5	3	6
3	2	8	6	3	5

4.5. Случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & при\ x\le 0,\\ \dfrac{2}{a}\left(1-\dfrac{x}{a}\right), & при\ 0<x\le a,\\ 0, & при\ x>a. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятность попадания X на участок от $\dfrac{a}{2}$ до a.

Вариант	a	Вариант	a
1	4	4	2
2	6	5	10
3	8	6	12

4.6. Непрерывная случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & при\ x<0,\\ 1-e^{-bx^2}, & при\ x\ge 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$;

б) вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу $(0;a)$.

Вариант	b	a	Вариант	b	a
1	0,5	1	4	1	1
2	0,2	2	5	2	2
3	0,3	1	6	3	1