Вариант	p	n	Вариант	p	n
1	70	3	4	65	4
2	75	2	5	50	3
3	60	4	6	80	2

3.13. Многолетними наблюдениями установлено, что в данном районе в сентябре в среднем n дней дождливых. Совхоз должен в течение первых m дней выполнить определенную работу. Определите вероятность того, что эти дни не будут дождливыми.

Вариант	n	m	Вариант	n	m
1	10	3	4	14	2
2	15	4	5	13	3
3	12	2	6	16	4

3.14. На откормочной площадке содержатся n бычков черно-пестрой породы и m бычков симментальской породы. Для контрольного взвешивания отбираются l бычков. Какова вероятность того, что все они симментальской породы?

Вариант	n	m	l	Вариант	n	m	l
1	35	15	3	4	20	30	2
2	30	20	4	5	20	30	4
3	40	10	2	6	10	40	3

3.15. Проверяются n доильных аппаратов, m из них неисправны. Какова вероятность того, что из k случайно отобранных аппаратов неисправными окажутся:

а) менее l аппаратов;

б) не более l аппаратов?

Вариант	n	m	k	l	Вариант	n	m	k	l
1	12	5	5	1	4	16	3	3	1
2	15	6	4	2	5	18	5	3	2
3	14	4	6	1	6	20	4	5	1

ТЕМА 4 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Литература

[1], глава 1, § 1.11.
[2], глава 4, § 2, 3.

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить только совместно с одним из событий H_1, H_2, ..., H_n, которые попарно несовместны и образуют полную группу. События H_1, H_2, ..., H_n называются *гипотезами*, так как заранее неизвестно, какое из них наступит.

Тогда вероятность события A определяется по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + ... + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A) \qquad (4.1)$$

$$\text{или } P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A),$$

то есть вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез H_1, H_2, ..., H_n на соответствующие условные вероятности события A.

Формула Байеса

Если известно, что событие A наступило, апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез определяются по *формуле Байеса*:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}, \qquad (4.2)$$

где $P(H_i)$ - априорные (доопытные) вероятности гипотез,

$P_{H_i}(A)$ - условные вероятности события A,

$i = 1, 2, ..., n$.

Заметим, что в знаменателе формулы Байеса находится полная вероятность события A.

Значение формулы Байеса состоит в том, что при наступлении события A, то есть при получении новой информации, можно проверять и корректировать выдвинутые до испытания гипотезы. Такой подход, называемый *байесовским*, позволяет, например, корректировать управленческие решения в экономике.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Имеются три партии деталей, насчитывающих соответственно 20, 30, 50 штук. Вероятности того, что деталь проработает заданное время, равны соответственно для этих партий 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная деталь проработает заданное время?

Решение.

Событие A – наудачу выбранная деталь проработает заданное время.

Событие A может произойти только вместе с одним из следующих событий:

H_1 – деталь из первой партии;

H_2 – деталь из второй партии;

H_3 – деталь из третьей партии.

События H_1, H_2, H_3 несовместные и образуют полную группу, значит, являются гипотезами.

Вероятность события A найдем по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A).$$

Вероятности гипотез:

$$P(H_1) = \frac{20}{20+30+50} = \frac{20}{100} = 0{,}2,$$

$$P(H_2) = \frac{30}{20+30+50} = \frac{30}{100} = 0{,}3,$$

$$P(H_3) = \frac{50}{20+30+50} = \frac{50}{100} = 0{,}5.$$

Условные вероятности события A:

$$P_{H_1}(A) = 0{,}7,$$

$$P_{H_2}(A) = 0{,}8,$$

$$P_{H_3}(A) = 0{,}9.$$

Получим

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}83.$$

Пример 4.2. На сборку механизма попадают детали с трех автоматов в соотношении 2:3:1. Известно, что первый автомат дает 1,5% брака, второй и третий по 1%. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность, что она изготовлена первым автоматом?

Решение.

Событие A – наудачу взятая деталь оказалась бракованной.

Событие A может произойти только вместе с одним из следующих событий:

H_1 – деталь изготовлена на первом автомате;

H_2 – деталь изготовлена на втором автомате;

H_3 – деталь изготовлена на третьем автомате.

События H_1, H_2, H_3 несовместные и образуют полную группу, значит, являются гипотезами.

По условию задачи событие A произошло, и требуется найти $P_A(H_1)$, то есть послеопытную вероятность гипотезы H_1.

Воспользуемся формулой Байеса:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)P_{H_1}(A)}{P(A)}.$$

Вероятность события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + P(H_3)P_{H_3}(A).$$

Введем коэффициент пропорциональности k, тогда всего поступило $(2+3+1)k = 6k$ деталей, из них с первого автомата –

$2k$, со второго – $3k$, с третьего – k деталей. Используя классическое определение вероятности, вычислим вероятности гипотез:

$$P(H_1)=\frac{2k}{6k}=\frac{1}{3},$$

$$P(H_2)=\frac{3k}{6k}=\frac{1}{2},$$

$$P(H_3)=\frac{k}{6k}=\frac{1}{6}.$$

Найдем условные вероятности события A:

$$P_{H_1}(A)=\frac{1{,}5}{100}=0{,}015,$$

$$P_{H_2}(A)=\frac{1}{100}=0{,}01,$$

$$P_{H_3}(A)=\frac{1}{100}=0{,}01.$$

Получим

$$P(A)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}015+\frac{1}{2}\cdot 0{,}01+\frac{1}{6}\cdot 0{,}01=\frac{7}{600};$$

$$P_A(H_1)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}015}{\frac{7}{600}}=\frac{3}{7}.$$

Контрольные вопросы

1. Какие события называются гипотезами и почему?
2. Чему равна сумма вероятностей гипотез?
3. Приведите примеры случайных событий, которые осуществляются только совместно с какой-либо одной из гипотез.
4. Для каких случайных событий вероятность определяется по формуле полной вероятности?
5. Какова формула полной вероятности события?
6. Какие вероятности вычисляются по формуле Байеса?

Задачи

4.1. l % животным стада была сделана профилактическая прививка от заболевания A. Вероятность заболевания животного, которому сделана прививка, равна p_1, без прививки – p_2. Какова вероятность того, что наудачу выбранное животное окажется больным заболеванием A?

Вариант	l	p_1	p_2	Вариант	l	p_1	p_2
1	95	0,09	0,8	4	85	0,07	0,6
2	90	0,07	0,7	5	80	0,05	0,8
3	80	0,06	0,9	6	75	0,08	0,7

4.2. l % животным стада была сделана профилактическая прививка от заболевания A. Вероятность заболевания животного, которому сделана прививка, равна p_1, без прививки – p_2. Наудачу выбранное животное оказалось больным заболеванием A. Какова вероятность того, что этому животному была сделана профилактическая прививка?

Вариант	l	p_1	p_2	Вариант	l	p_1	p_2
1	95	0,09	0,8	4	85	0,07	0,6
2	90	0,07	0,7	5	80	0,05	0,8
3	80	0,06	0,9	6	75	0,08	0,7

4.3. Для посева заготовлены семена пшеницы, содержащие l % семян I сорта, m % семян – II сорта, k % семян – III сорта, n % семян – IV сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен равна, соответственно, для семян I сорта – a, II сорта – b, III сорта – c, IV сорта – d. Найдите вероятность того, что из наудачу взятого зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен.

Вариант	l	m	k	n	a	b	c	d
1	90	4	1	5	0,9	0,8	0,7	0,6
2	91	4	2	3	0,4	0,35	0,3	0,2
3	92	3	3	2	0,35	0,3	0,2	0,15
4	93	3	1	3	0,5	0,4	0,3	0,2
5	94	2	2	2	0,4	0,35	0,25	0,15
6	96	2	1	1	0,5	0,45	0,4	0,3

4.4. Для посева заготовлены семена пшеницы, содержащие l % семян I сорта, m % – II сорта, k % – III сорта, n % – IV сорта. Вероятность того, что из зерна вырастет колос, содержащий не менее 50 зерен, соответственно, для семян I сорта – a, II сорта – b, III сорта – c, IV сорта – d. Из наудачу взятого зерна вырос колос, содержащий 52 зерна. Какова вероятность того, что это было зерно I сорта?

Вариант	l	m	k	n	a	b	c	d
1	90	4	1	5	0,9	0,8	0,7	0,6
2	91	4	2	3	0,4	0,35	0,3	0,2
3	92	3	3	2	0,35	0,3	0,2	0,15
4	93	3	1	3	0,5	0,4	0,3	0,2
5	94	2	2	2	0,4	0,35	0,25	0,15
6	96	2	1	1	0,5	0,45	0,4	0,3

4.5. В специализированную больницу поступают, в среднем, k % больных с заболеванием К, l % – с заболеванием L, m % – с заболеванием М. Вероятность полного излечения заболевания К равна p, для заболеваний L и M эти вероятности равны, соответственно, r и t. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найдите вероятность того, что этот больной страдал заболеванием К.

Вариант	k	l	m	p	r	t
1	50	30	20	0,5	0,9	0,4
2	40	10	50	0,5	0,8	0,6
3	40	30	30	0,7	0,9	0,8
4	50	40	10	0,7	0,8	0,9
5	20	30	50	0,8	0,6	0,7
6	40	20	40	0,8	0,7	0,9

4.6. На некотором заводе на каждые 100 изделий приходится в среднем m_1 нестандартных, на втором заводе – m_2, на третьем заводе – m_3. Продукции этих заводов составляют, соответственно, l %, p %, k % всех изделий , приобретаемых жителями района. Найдите вероятность того, что выбранное наугад изделие будет стандартным.

Вариант	m_1	m_2	m_3	l	p	k
1	5	3	4	50	30	20
2	10	4	9	40	10	50
3	15	10	5	30	40	30
4	18	2	6	20	40	40
5	6	4	10	30	30	40
6	7	5	10	50	30	20

4.7. В мастерской на трех станках изготавливаются однотипные детали. За смену изготовлено на первом станке n_1 деталей, на втором – n_2, на третьем – n_3 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали на первом станке равна p_1, на втором – p_2, на третьем – p_3. Найдите вероятность того, что наугад выбранная деталь окажется стандартной.

Вариант	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3
1	20	20	10	0,1	0,05	0,1
2	25	15	10	0,15	0,1	0,05
3	10	20	20	0,1	0,1	0,15
4	15	10	25	0,05	0,1	0,1
5	20	15	15	0,1	0,15	0,1
6	15	20	15	0,1	0,1	0,05

4.8. В мастерской на трех станках изготавливаются однотипные детали. За смену изготовлено на первом станке n_1 деталей, на втором – n_2, на третьем – n_3 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали на первом станке равна p_1, на втором – p_2, на третьем – p_3. Наугад выбранная деталь оказалась стандартной. Какова вероятность того, что она изготовлена на первом или втором станке?

Вариант	n_1	n_2	n_3	p_1	p_2	p_3
1	20	20	10	0,1	0,05	0,1
2	25	15	10	0,15	0,1	0,05
3	10	20	20	0,1	0,1	0,15
4	15	10	25	0,05	0,1	0,1
5	20	15	15	0,1	0,15	0,1
6	15	20	15	0,1	0,1	0,05

4.9. В регион изделия поставляются тремя фирмами в соотношении $k_1 : k_2 : k_3$. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют p_1 %, второй – p_2 %, третьей – p_3 %. Найдите вероятность того, что

а) приобретенное изделие оказалось стандартным;

б) приобретенное изделие оказалось нестандартным.

Вариант	k_1	k_2	k_3	p_1	p_2	p_3
1	5	8	7	90	85	75
2	4	7	9	92	88	76
3	3	6	11	95	80	70
4	5	7	8	96	84	75
5	4	9	7	87	76	95
6	3	11	6	90	89	77

4.10. В регион изделия поставляются тремя фирмами в соотношении $k_1 : k_2 : k_3$. Среди продукции первой фирмы стандартные изделия составляют p_1 %, второй – p_2 %, третьей – p_3 %. Найдите вероятность того, что приобретенное изделие изготовлено третьей фирмой, если

а) изделие оказалось стандартным;

б) изделие оказалось нестандартным.

Вариант	k_1	k_2	k_3	p_1	p_2	p_3
1	5	8	7	90	85	75
2	4	7	9	92	88	76
3	3	6	11	95	80	70
4	5	7	8	96	84	75
5	4	9	7	87	76	95
6	3	11	6	90	89	77

ТЕМА 5 ФОРМУЛЫ БЕРНУЛЛИ, МУАВРА-ЛАПЛАСА И ПУАССОНА

Литература

[1], глава 2, § 2.1, 2.2, 2.3.

[2], глава 5, § 1, 2, 3.

Формула Бернулли

Пусть проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна p. Такая серия испытаний называется схемой Бернулли.

Вероятность $P_n(m)$ того, что событие A в n испытаниях появится m раз вычисляется по *формуле Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (5.1)$$

где $q = 1 - p$ – вероятность противоположного события $\overline{A}$.

Однако при большом числе испытаний n вычисление вероятности по формуле Бернулли становится громоздким. В этом случае применяют асимптотические (приближенные) формулы. К ним относятся локальная формула Муавра-Лапласа и формула Пуассона, которые дают более точный результат , чем больше n.

Локальная формула Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число испытаний n достаточно велико, то вероятность $P_n(m)$ того, что событие A появится m раз приближенно вычисляется по *локальной формуле Муавра-Лапласа:*

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x), \qquad (5.2)$$

где $x = \dfrac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $q = 1 - p$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$.