ТЕМА 3 ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Литература

[1], глава 1, § 1.7, 1.8, 1.9.

[2], глава 2, § 1, 2, 3; глава 3, § 1, 2, 3, 4, 5; глава 4, § 1.

Действия над событиями

Суммой событий A и B называется событие $A+B$, состоящее в появлении хотя бы одного из них, то есть или события A, или события B, или A и B вместе.

Произведением событий A и B называется событие $A{\cdot}B$, состоящее в их совместном появлении.

Операции над событиями можно представить как операции над множествами и проиллюстрировать диаграммами Эйлера-Венна (*рисунок 5*). При этом сумме событий $A+B$ соответствует объединение множеств $A \cup B$, произведению событий $A \cdot B$ – пересечение множеств $A \cap B$.

Рисунок 5

Теоремы умножения вероятностей

Вычисление вероятности произведения событий зависит от того, являются ли эти события зависимыми или независимыми.

События A и B называются *зависимыми*, если вероятность каждого их них изменяется в зависимости от того, произошло другое событие или нет.

События A и B называются *независимыми*, если вероятность каждого их них не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Условной вероятностью события B называется вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A наступило. Обозначается $P_A(B)$.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий

Вероятность совместного появления двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, то есть

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B). \qquad (3.1)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности других, при этом вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события произошли:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}}(A_n).$$

Теорема умножения вероятностей независимых событий

Вероятность совместного появления двух независимых событий A и B равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (3.2)$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких независимых в совокупности событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Теоремы умножения вероятностей можно объединить в виде блок-схемы (*рисунок 6*).

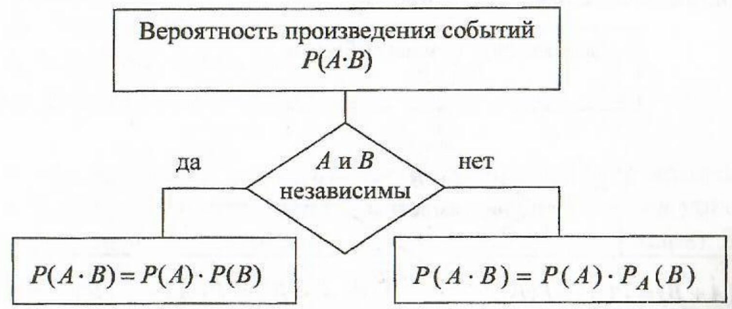

Рисунок 6

Теоремы сложения вероятностей

В зависимости от того, совместны или несовместны события A и B, имеют место следующие теоремы о вероятности суммы событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Вероятность появления одного из несовместных событий A и B равна сумме вероятностей событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (3.3)$$

Следствия:

1. Если несколько событий попарно несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме их вероятностей, то есть

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

2. Сумма вероятностей попарно несовместных событий, образующих полную группу, равна единице:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

3. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1.

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий A и B равна сумме вероятностей событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B). \qquad (3.4)$$

Теоремы сложения вероятностей представим в виде следующей блок-схемы (*рисунок 7*).

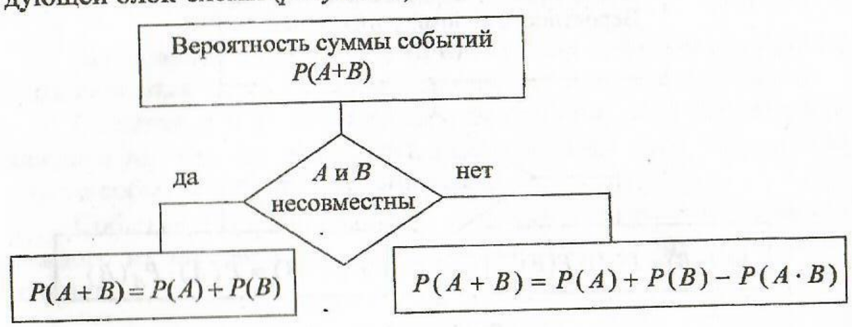

Рисунок 7

Заметим, что формулы для определения вероятности суммы большого числа совместных событий достаточно громоздки. В этой ситуации часто бывает целесообразно перейти к противоположному событию.

В самом деле, событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из нескольких совместных событий, противоположно событию – «не наступит ни одно из них»:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-P(\overline{A_1+A_2+...+A_n})=1-P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot...\cdot\overline{A}_n).$$

Если события A_1, A_2, …, A_n – независимые в совокупности и имеют одинаковую вероятность $P(A_1)=P(A_2)=...=P(A_n)=p$, при этом $P(\overline{A}_1)=P(\overline{A}_2)=...=P(\overline{A}_n)=1-p=q$, то вероятность наступления хотя бы одного из событий A_1, A_2, …, A_n можно найти по формуле

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=1-q^n.$$

Примеры решения задач

Пример 3.1. В корзине 7 белых и 3 черных шара. Поочередно извлекаются 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара белые, если

1) первый шар возвращается в корзину;

2) первый шар не возвращается в корзину.

Решение.

Событие A – оба шара белые. Оно состоит в совместном появлении событий:

B_1 - первый шар белый,

B_2 - второй шар белый,

поэтому событие A является произведением событий B_1 и B_2:

$$A=B_1\cdot B_2.$$

1) *Схема возвращенного шара.* Если первый шар возвращается в корзину, то соотношение белых и черных шаров в урне не меняется (при извлечении как первого, так и второго шара). Значит, события B_1 и B_2 - независимые.

Воспользуемся теоремой умножения вероятностей независимых событий (3.2):

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(B_2).$$

Вычислим вероятности событий B_1 и B_2, используя классическое определение вероятности:

$$P(B_1) = P(B_2) = \frac{7}{10} = 0{,}7.$$

Получим

$$P(A) = 0{,}7 \cdot 0{,}7 = 0{,}49.$$

2) *Схема невозвращенного шара.* Если первый шар не возвращается в корзину, то соотношение белых и черных шаров в урне меняется после того, как извлечен первый шар. Тогда вероятность события B_2 будет различной в зависимости от того, наступило событие B_1 (первый шар - белый) или не наступило (первый шар – черный). Значит, события B_1 и B_2 - зависимые.

Воспользуемся теоремой умножения вероятностей зависимых событий (3.1):

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(B_2).$$

Применяя классическое определение вероятности, вычислим вероятность события B_1:

$$P(B_1) = \frac{7}{10}.$$

Найдем условную вероятность события B_2 при условии, что событие B_1 наступило. Так как при наступлении события B_1 в корзине осталось 9 шаров, из них 6 белых, то

$$P_{B_1}(B_2) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

Получим

$$P(A) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{7}{15}.$$

Пример 3.2. На молочно-товарной ферме 60% коров черно-пестрой породы, 25% коров голштино-фризской и 15% коров красной степной пород. Найти вероятность того, что наудачу выбранная корова черно-пестрой или голштино-фризской породы.

Решение.

Событие A - наудачу выбранная корова черно-пестрой или голштино-фризской породы.

Событие A состоит в наступлении одного из двух событий:

B – выбрана корова черно-пестрой породы,

C – выбрана корова голштино-фризской породы,

поэтому событие A представляет собой сумму событий B и C:

$$A = B + C.$$

Так как события B и C несовместные, то воспользуемся теоремой сложения вероятностей несовместных событий (3.3):

$$P(A) = P(B) + P(C).$$

По условию задачи

$$P(B) = 0{,}6,$$
$$P(C) = 0{,}25.$$

Получим

$$P(A) = 0{,}6 + 0{,}25 = 0{,}85.$$

Пример 3.3. В фирме 25 сотрудников. Немецким языком владеют 10, французским – 7 сотрудников фирмы, знают оба языка – 2 сотрудника. Определить вероятность, что наудачу выбранный сотрудник знает хотя бы один из двух данных языков.

Решение.

Событие A – наудачу выбранный сотрудник фирмы знает хотя бы один язык (или немецкий, или французский, или оба языка).

Событие A состоит в наступлении хотя бы одного из двух событий:

B – наудачу выбранный сотрудник знает немецкий язык,

C – наудачу выбранный сотрудник знает французский язык,

поэтому событие A представляет собой сумму событий B и C:

$$A = B + C.$$

Так как события B и C совместные, то воспользуемся теоремой сложения вероятностей совместных событий (3.4):

$$P(A) = P(B) + P(C) - P(B \cdot C).$$

Заметим, что событие $B \cdot C$ состоит в том, что наудачу выбранный сотрудник знает оба языка.

По условию задачи

$$P(B) = \frac{10}{25} = 0{,}4,$$

$$P(C) = \frac{7}{25} = 0{,}28,$$

$$P(B \cdot C) = \frac{2}{25} = 0{,}08.$$

Получим

$$P(A) = 0{,}4 + 0{,}28 - 0{,}08 = 0{,}6.$$

Пример 3.4. Для сигнализации об аварии установлены два независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор равна 0,95, а второй – 0,9. Найти вероятность того, что при аварии

1) сработают оба сигнализатора;

2) сработает один сигнализатор;

3) не сработает ни один сигнализатор;

4) сработает хотя бы один сигнализатор.

Решение.

Введем события:

A_1 – сработает первый сигнализатор;

A_2 – сработает второй сигнализатор;

$\overline{A}_1$ – не сработает первый сигнализатор;

$\overline{A}_2$ – не сработает второй сигнализатор.

По условию задачи $P(A_1) = 0{,}95$, $P(A_2) = 0{,}9$, тогда $P(\overline{A}_1) = 1 - P(A_1) = 0{,}05$, $P(\overline{A}_2) = 1 - P(A_2) = 0{,}1$.

1) Событие A – сработают оба сигнализатора. Оно состоит в совместном появлении событий A_1 и A_2, поэтому может быть представлено в виде произведения событий A_1 и A_2:

$$A = A_1 \cdot A_2.$$

События A_1 и A_2 являются независимыми, так как по условию задачи обладают постоянными вероятностями, независимыми от наступления других событий.

По теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Получим

$$P(A) = 0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}855.$$

2) Событие B – сработает один сигнализатор.

Событие B может осуществиться одним из двух способов:

или первый сигнализатор сработает, второй – не сработает, то есть наступит произведение событий $A_1 \cdot \overline{A}_2$;

или первый сигнализатор не сработает, второй – сработает, то есть наступит произведение событий $\overline{A}_1 \cdot A_2$.

Следовательно, событие B можно представить следующим образом:

$$B = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2.$$

События $A_1 \cdot \overline{A}_2$ и $\overline{A}_1 \cdot A_2$ несовместные. По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(B) = P(A_1 \cdot \overline{A}_2) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2).$$

События A_1, A_2, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ являются попарно независимыми. По теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2).$$

Получим

$$P(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 = 0{,}095 + 0{,}045 = 0{,}14.$$

3) Событие C – не сработает ни один сигнализатор. Оно состоит в совместном появлении событий $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$:

$$C = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2.$$

События $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$ являются независимыми. По теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(C) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2).$$

Получим

$$P(C) = 0{,}05 \cdot 0{,}01 = 0{,}005.$$

4) Событие D – сработает хотя бы один сигнализатор.

Первый способ. Событие D состоит в наступлении хотя бы одного из двух событий A_1 и A_2, поэтому может быть представлено в виде суммы событий A_1 и A_2:

$$D = A_1 + A_2.$$

События A_1 и A_2 являются совместными. По теореме сложения вероятностей совместных событий

$$P(D) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cdot A_2).$$

Так как события A_1 и A_2 – независимые, то по теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(A_1 \cdot A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Тогда

$$P(D) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Получим

$$P(D) = 0{,}95 + 0{,}9 - 0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}995.$$

Второй способ. Событие D может осуществиться одним из трех способов:

или первый сигнализатор сработает, второй – не сработает, то есть наступит произведение событий $A_1 \cdot \overline{A}_2$;

или первый сигнализатор не сработает, второй – сработает, то есть наступит произведение событий $\overline{A}_1 \cdot A_2$;

или первый и второй сигнализаторы сработают, то есть наступит произведение событий $A_1 \cdot A_2$.

Следовательно, событие D можно представить следующим образом:

$$D = A_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_2.$$

Используя теоремы сложения вероятностей несовместных событий и умножения вероятностей независимых событий, получим

$$P(D) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Таким образом,

$$P(D) = 0{,}95 \cdot 0{,}1 + 0{,}05 \cdot 0{,}9 + 0{,}95 \cdot 0{,}9 = 0{,}995.$$

Третий способ. Введем противоположное событие $\overline{D}$, которое состоит в том, что не сработает ни один сигнализатор, то есть в совместном появлении событий $\overline{A}_1$ и $\overline{A}_2$, поэтому

$$\overline{D} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2.$$

По теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(\overline{D}) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2).$$

Получим

$$P(\overline{D}) = 0{,}05 \cdot 0{,}1 = 0{,}005.$$

Тогда

$$P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - 0{,}005 = 0{,}995.$$

Пример 3.5. Вероятность выпадения осадков в течение суток в октябре в некоторой местности равна 0,8. Найти вероятность того, что в октябре хотя бы один день из трех будет ясным.

Решение.

Событие A – хотя бы один день из трех в октябре будет ясным (без осадков).

Введем события:

B_1 – первый день ясный,

B_2 – второй день ясный,

B_3 – третий день ясный.

Событие A состоит в наступлении хотя бы одного из трех событий B_1, B_2, B_3 (или B_1, или B_2, или B_3, или попарно, или все три события вместе), поэтому

$$A = B_1 + B_2 + B_3.$$

События B_1, B_2, B_3 совместные, однако формула вычисления вероятности суммы трех совместных событий достаточно сложна. В такой ситуации целесообразно сначала вычислить вероятность противоположного события:

$\overline{A}$ - все три дня будут с осадками.

Событие $\overline{A}$ состоит в совместном появлении следующих событий:

$\overline{B}_1$ – первый день с осадками,

$\overline{B}_2$ – второй день с осадками,

$\overline{B}_3$ – третий день с осадками,

поэтому $\overline{A}$ является произведением событий $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$:

$$\overline{A} = \overline{B}_1 \cdot \overline{B}_2 \cdot \overline{B}_3.$$

События $\overline{B}_1$, $\overline{B}_2$, $\overline{B}_3$ – независимые в совокупности по условию задачи, так как имеют постоянные вероятности, равные 0,8.

По теореме умножения вероятностей независимых событий

$$P(\overline{A}) = P(\overline{B}_1) \cdot P(\overline{B}_2) \cdot P(\overline{B}_3).$$

Получим

$$P(\overline{A}) = 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}8^3 = 0{,}512.$$

Отсюда

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}512 = 0{,}488.$$

Пример 3.6. В партии из 20 деталей имеются 4 бракованные детали. Наугад извлекли 3 детали. Найти вероятность того, что были извлечены:

1) три стандартные детали;
2) только две стандартные детали;
3) хотя бы одна стандартная деталь.

Решение.

Введем события:

A_1 – первая деталь стандартная;

A_2 – вторая деталь стандартная;

A_3 – третья деталь стандартная.

$\overline{A}_1$ – первая деталь бракованная;

$\overline{A}_2$ – вторая деталь бракованная;

$\overline{A}_3$ – третья деталь бракованная.

1) Событие A – все три детали стандартные. Событие A состоит в совместном появлении событий A_1, A_2, A_3, поэтому

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

События A_1, A_2, A_3 являются зависимыми, так как соотношение стандартных и бракованных деталей меняется после извлечения первой и второй деталей, что приводит к изменению вероятностей данных событий. По теореме умножения вероятностей зависимых событий

$$P(A) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 \cdot A_2}(A_3).$$

Применяя классическое определение вероятности, вычислим вероятность $P(A_1)$ того, что первая деталь стандартная. Так как всего 20 деталей, из них 16 стандартных, то:

$$P(A_1) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}.$$

Найдем вероятность $P_{A_1}(A_2)$ того, что вторая деталь стандартная при условии, что первая деталь стандартная. Так как при наступлении события A_1 осталось 19 деталей, из них 15 стандартных, то

$$P_{A_1}(A_2) = \frac{15}{19}.$$

Найдем вероятность $P_{A_1 \cdot A_2}(A_3)$ того, что третья деталь стандартная при условии, что первая и вторая детали стандартные. Так как при наступлении событий A_1 и A_2 осталось 18 деталей, из них 14 стандартных, то

$$P_{A_1 \cdot A_2}(A_3) = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}.$$

Получим

$$P(A) = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{57} \approx 0{,}491.$$

2) Событие B – только две стандартные детали среди трех извлеченных деталей.

Событие B может осуществиться 3 способами:

или первая и вторая детали – стандартные и третья деталь – бракованная,

или первая и третья детали – стандартные и вторая деталь – бракованная,

или вторая третья детали – стандартные и первая деталь – бракованная.

Следовательно, событие B можно представить следующим образом:

$$B = A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3.$$

События $A_1 A_2 \overline{A}_3$, $A_1 \overline{A}_2 A_3$ и $\overline{A}_1 A_2 A_3$ – попарно несовместные. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3) + P(A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3) + P(\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot A_3).$$

События A_1, A_2, A_3, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$ – зависимые. По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(B) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(\overline{A}_3) + P(A_1) \cdot P_{A_1}(\overline{A}_2) \cdot P_{A_1 \overline{A}_2}(A_3) + \\ + P(\overline{A}_1) \cdot P_{\overline{A}_1}(A_2) \cdot P_{\overline{A}_1 A_2}(A_3).$$

Вычислим вероятности:

$$P(A_1) = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}, \qquad P_{A_1}(A_2) = \frac{15}{19},$$

$$P_{A_1 A_2}(\overline{A}_3) = \frac{4}{18} = \frac{2}{9},$$

$$P_{A_1}(\overline{A}_2) = \frac{4}{19}, \qquad P_{A_1 \overline{A}_2}(A_3) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6},$$

$$P(\overline{A}_1) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \qquad P_{\overline{A}_1}(A_2) = \frac{16}{19}, \qquad P_{\overline{A}_1 A_2}(A_3) = \frac{15}{18} = \frac{5}{6}.$$

Получим

$$P(B) = \frac{4}{5} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{2}{9} + \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{16}{19} \cdot \frac{5}{6} = \frac{8}{57} + \frac{8}{57} + \frac{8}{57} = \frac{24}{57} = \frac{8}{19}.$$

3) Событие C – хотя бы одна стандартная деталь среди трех извлеченных деталей.

Перейдем к противоположному событию:

$\overline{C}$ – извлечены три бракованные детали.

Оно состоит в совместном появлении событий $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$, $\overline{A}_3$, поэтому

$$\overline{C} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3.$$

По теореме умножения вероятностей зависимых событий:

$$P(\overline{C}) = P(\overline{A}_1) \cdot P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) \cdot P_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(\overline{A}_3).$$

Вычислим вероятности:

$$P(\overline{A}_1) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}, \qquad P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) = \frac{3}{19}, \qquad P_{\overline{A}_1\overline{A}_2}(\overline{A}_3) = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}.$$

Получим

$$P(\overline{C}) = \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{19} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{285},$$

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \frac{1}{285} = \frac{284}{285}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется суммой событий?
2. Что называется произведением событий?
3. Какие события называются независимыми?
4. Какие события называются зависимыми?
5. Что называется условной вероятностью события?
6. Сформулируйте теорему умножения вероятностей зависимых событий.
7. Сформулируйте теорему умножения вероятностей независимых событий.
8. Какие события называются несовместными?
9. Сформулируйте теорему сложения вероятностей несовместных событий.
10. Чему равна сумма вероятностей несовместных событий, образующих полную группу?
11. Какие события называются противоположными? Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
12. Какие события называются совместными?

13. Сформулируйте теорему сложения вероятностей совместных событий.
14. Как найти вероятность появления хотя бы одного из нескольких событий?

Задачи

3.1. Среди семян пшеницы l % семян сорняков. Найти вероятность того, что все наудачу выбранные n семян будут сорняками.

Вариант	l	n	Вариант	l	n
1	10	5	4	20	4
2	5	3	5	30	5
3	15	2	6	25	4

3.2. В МТС n_1 комбайнов «Вектор», из них m_1 неисправны, и n_2 комбайнов «Дон», из них m_2 неисправны. Наудачу выбраны один комбайн «Вектор» и один комбайн «Дон». Какова вероятность того, что оба они неисправны?

Вариант	n_1	m_1	n_2	m_2
1	8	3	7	2
2	10	3	5	1
3	9	4	3	1
4	10	2	5	1
5	12	4	7	2
6	11	5	4	3

3.3. Контролер проверяет по одному m изделий, не возвращая их в партию, и принимает партию, если все m изделий окажутся годными. Определить вероятность того, что контролер примет партию из n изделий, если в ней k изделий бракованные.

Вариант	m	n	k	Вариант	m	n	k
1	5	20	2	4	6	40	3
2	4	30	3	5	5	10	1
3	5	40	4	6	4	20	2

3.4. Из n зерен отбираются l и в них определяется содержание фосфора, для чего зерно сжигается. Определить вероятность того, что во всех отобранных зернах окажется повышенное содержание фосфора, если из n зерен m имеют повышенное содержание этого вещества.

Вариант	n	m	l	Вариант	n	m	l
1	10	5	4	4	20	4	3
2	10	6	2	5	20	7	4
3	10	3	3	6	20	10	5

3.5. На полях хозяйства работают n тракторов. Вероятность выхода из строя для каждого трактора в течение рабочего дня равна p. Какова вероятность того, что в течение рабочего дня выход из строя произойдет:

а) менее, чем у m тракторов;

б) по крайней мере у m тракторов?

Вариант	n	p	m	Вариант	n	p	m
1	4	0,4	2	4	5	0,2	2
2	4	0,5	3	5	5	0,3	2
3	4	0,3	2	6	5	0,4	3

3.6. В навеске семян клевера l % семян павилики. Какова вероятность того, что из n взятых семян окажется:

а) хотя бы m семян павилики;

б) более m семян павилики?

Вариант	l	n	m	Вариант	l	n	m
1	10	4	2	4	25	3	1
2	15	3	1	5	30	4	2
3	20	3	1	6	35	4	2

3.7. Экзамен по теории вероятностей сдают n студентов, из которых m девушек. Какова вероятность того, что среди первых k студентов, получивших билеты, окажутся:

а) менее l юношей;

б) хотя бы l юношей?

Вариант	n	m	k	l	Вариант	n	m	k	l
1	15	10	4	2	4	25	15	4	2
2	20	12	6	2	5	30	10	5	2
3	18	14	6	1	6	27	12	5	1

3.8. В цехе находятся два станка. Вероятность того, что для первого станка в течение рабочего дня потребуется внимание мастера по ремонту равна p_1, для второго станка – p_2. Какова вероятность того, что в течение рабочего дня в этом цехе потребуется мастер по ремонту?

Вариант	p_1	p_2	Вариант	p_1	p_2
1	0,2	0,3	4	0,2	0,4
2	0,1	0,3	5	0,3	0,1
3	0,1	0,2	6	0,4	0,1

3.9. Некоторое устройство не работает тогда, когда откажет хотя бы один из двух независимо работающих элементов. Вероятность исправной работы первого элемента p_1, второго – p_2. Какова вероятность того, что в данный момент устройство не работает?

Вариант	p_1	p_2	Вариант	p_1	p_2
1	0,8	0,6	4	0,5	0,6
2	0,9	0,5	5	0,7	0,9
3	0,7	0,6	6	0,7	0,8

3.10. Первое орудие при одном залпе поражает мишень с вероятностью p_1. Второе – с вероятностью p_2. Какова вероятность поражения мишени, если каждое орудие производит по одному залпу?

Вариант	p_1	p_2	Вариант	p_1	p_2
1	0,4	0,2	4	0,2	0,8
2	0,7	0,3	5	0,3	0,5
3	0,6	0,7	6	0,1	0,9

3.11. Рабочий обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа станок не потребует внимания рабочего, для первого станка равна p_1, для второго – p_2, для третьего – p_3. Найти вероятность того, что в течение часа потребует внимания рабочего:

а) только один станок;

б) по крайней мере два станка.

Вариант	p_1	p_2	p_3	Вариант	p_1	p_2	p_3
1	0,35	0,12	0,28	4	0,28	0,24	0,13
2	0,22	0,11	0,34	5	0,34	0,19	0,15
3	0,27	0,15	0,22	6	0,22	0,16	0,17

3.12. Вероятность выпадения осадков в течение дня для некоторой местности в октябре равна p %. Какова вероятность того, что в течение n дней погода будет ясная?

Вариант	p	n	Вариант	p	n
1	70	3	4	65	4
2	75	2	5	50	3
3	60	4	6	80	2

3.13. Многолетними наблюдениями установлено, что в данном районе в сентябре в среднем n дней дождливых. Совхоз должен в течение первых m дней выполнить определенную работу. Определите вероятность того, что эти дни не будут дождливыми.

Вариант	n	m	Вариант	n	m
1	10	3	4	14	2
2	15	4	5	13	3
3	12	2	6	16	4

3.14. На откормочной площадке содержатся n бычков черно-пестрой породы и m бычков симментальской породы. Для контрольного взвешивания отбираются l бычков. Какова вероятность того, что все они симментальской породы?

Вариант	n	m	l	Вариант	n	m	l
1	35	15	3	4	20	30	2
2	30	20	4	5	20	30	4
3	40	10	2	6	10	40	3

3.15. Проверяются n доильных аппаратов, m из них неисправны. Какова вероятность того, что из k случайно отобранных аппаратов неисправными окажутся:

а) менее l аппаратов;

б) не более l аппаратов?

Вариант	n	m	k	l	Вариант	n	m	k	l
1	12	5	5	1	4	16	3	3	1
2	15	6	4	2	5	18	5	3	2
3	14	4	6	1	6	20	4	5	1

ТЕМА 4 ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И ФОРМУЛА БАЙЕСА

Литература

[1], глава 1, § 1.11.

[2], глава 4, § 2, 3.

Формула полной вероятности

Пусть событие A может наступить только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, которые попарно несовместны и образуют полную группу. События $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются *гипотезами*, так как заранее неизвестно, какое из них наступит.

Тогда вероятность события A определяется по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P_{H_1}(A) + P(H_2)\cdot P_{H_2}(A) + \ldots + P(H_n)\cdot P_{H_n}(A) \quad (4.1)$$

$$\text{или } P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A),$$

то есть вероятность события A равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез $H_1, H_2, \ldots, H_n$ на соответствующие условные вероятности события A.

Формула Байеса

Если известно, что событие A наступило, апостериорные (послеопытные) вероятности гипотез определяются по *формуле Байеса*:

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P_{H_i}(A)}, \quad (4.2)$$

где $P(H_i)$ - априорные (доопытные) вероятности гипотез,

$P_{H_i}(A)$ - условные вероятности события A,

$i = 1, 2, \ldots, n$.