ности» и задания для индивидуальной самостоятельной работы студентов, которые могут быть использованы в качестве расчетно-графической работы.

Каждая тема содержат краткие теоретические сведения, методические рекомендации по использованию основных теорем и формул, подробно разобранные примеры решения задач, контрольные вопросы и задачи для самостоятельного решения, снабженные ответами. Задачи соответствуют профилю вуза и составлены, в основном, по материалам сельскохозяйственной практики авторами пособия.

Рекомендуется следующий порядок работы над материалом каждой темы:

- изучение литературы по теме;
- разбор примеров решения задач;
- подготовка ответов на контрольные вопросы;
- самостоятельное решение задач.

Для контроля освоения раздела «Теория вероятностей» рекомендуется использовать задания для самостоятельной работы, включающие 30 вариантов, которые представлены в пособии.

ТЕМА 1 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Литература

[1], глава 1, § 1.5.
[2], глава 1, § 4.

Основные правила комбинаторики

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - элементы конечного множества.

Правило суммы. Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, элемент a_2 – другими n_2 способами и так далее, элемент a_k – n_k способами, отличными от предыдущих, то выбор одного из элементов: или a_1, или a_2, …, или a_k можно произвести $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Правило произведения. Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого такого выбора элемент a_2 можно выбрать n_2 способами и так далее, после каждого $(k-1)$ выбора элемент a_k можно выбрать n_k способами, то выбор всех элементов a_1, $a_2, \ldots$, a_k в указанном порядке можно осуществить $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Соединения без повторений

Пусть дано множество из n различных элементов. Рассмотрим соединения (комбинации) из n элементов по m $(m \le n)$ без повторений, в которые каждый элемент множества может входить не более одного раза.

Перестановками из n элементов называются соединения, которые отличаются порядком следования элементов.

Число перестановок из n элементов вычисляется по формуле

$$P_n = n!, \qquad (1.1)$$

где $n!$ (n факториал) равно произведению первых n натуральных чисел, то есть $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Размещениями из n элементов по m называются соединения, которые отличаются либо составом элементов, либо порядком их расположения (либо и тем, и другим).

Число размещений из n элементов по m определяется по формуле

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (1.2)$$

Сочетаниями из n элементов по m называются соединения, которые отличаются хотя бы одним элементом.

Сочетания отличаются только составом входящих элементов, порядок расположения элементов не учитывается.

Число сочетаний из n элементов по m вычисляется по следующей формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \qquad (1.3)$$

Отметим некоторые свойства числа сочетаний:

$$C_n^1 = n, \quad C_n^{n-1} = n, \quad C_n^0 = 1, \quad C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Последнее равенство применяется, если $m > n/2$.

Все рассмотренные соединения можно объединить в виде следующей блок-схемы (*рисунок 1*).

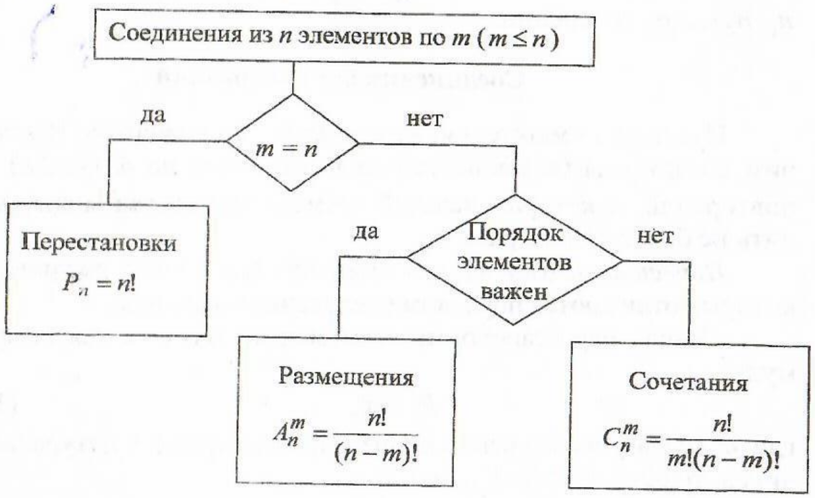

Рисунок 1

Заметим, что вычисление числа сочетаний из n элементов по m можно упростить, если использовать возможности табличного процессора MS Excel. Математическая функция ЧИСЛКОМБ(число; число_выбранных) позволяет рассчитать число сочетаний из данного числа элементов по заданному числу выбранных элементов.

Примеры решения задач

Пример 1.1. К приемному пункту элеватора подъехали 5 машин с зерном. Сколькими способами они могут выстроиться в очередь?

Решение.

Каждый вариант очереди представляет собой соединение из 5 различных элементов (машин) без повторений ($n = 5$). Соединения отличаются порядком следования элементов, поэтому являются перестановками.

Число вариантов очереди равно числу перестановок из 5 элементов:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Пример 1.2. В группе 25 студентов, сколькими способами могут быть выбраны староста и его заместитель, если каждый студент может быть избран только на одну из этих должностей?

Решение.

1 способ. Каждый вариант выбора старосты и его заместителя представляет собой соединение из 25 элементов (студентов группы) по 2 элемента без повторений ($n = 25,\ m = 2$). Соединения отличаются либо составом, либо порядком их следования, либо и тем, и другим. Значит, соединения являются размещениями.

Число способов выбора старосты и его заместителя равно числу размещений из 25 элементов по 2 элемента:

$$A_{25}^2 = \frac{25!}{(25-2)!} = \frac{23! \cdot 24 \cdot 25}{23!} = 24 \cdot 25 = 600.$$

2 способ. Старостой может быть выбран любой из 25 студентов, то есть число способов выбора старосты $n_1 = 25$; заместителем – любой из оставшихся 24 студентов, поэтому число способов выбора заместителя старосты $n_2 = 24$.

По правилу произведения общее число способов выбора старосты и его заместителя равно

$$n_1 \cdot n_2 = 25 \cdot 24 = 600.$$

Пример 1.3. В растениеводческой бригаде 8 человек. Для погрузки семян бригадиру надо выделить 3 человека. Сколькими способами он может это сделать?

Решение.

Каждый вариант выбора 3 человек представляет собой соединение из 8 элементов (рабочих бригады) по 3 элемента без повторений ($n = 8$, $m = 3$). Соединения отличаются только составом входящих элементов (так как порядок отбора рабочих значения не имеет). Следовательно, соединения являются сочетаниями.

Число способов выбора 3 человек для погрузки семян равно числу сочетаний из 8 элементов по 3 элемента:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 7 \cdot 8 = 56.$$

Пример 1.4. Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никому из них не будет поставлена неудовлетворительная оценка?

Решение.

Каждый из студентов может получить любую из 3 оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно». Поэтому число способов выбора оценки для каждого студента равно 3: $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 3$. По правилу произведения общее число способов получения оценок равно $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 3^4 = 81$.

Заметим, что другой способ решения задачи 4 невозможен, так как соединения из 3 элементов по 4 элемента, о которых идет речь в условии задачи (оценки четырех студентов), являются соединениями с повторениями.

Пример 1.5. Из бригады, состоящей из 6 мужчин и 7 женщин, надо выбрать группу в составе 5 человек, чтобы среди них было не менее трех женщин. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Выбрать не менее трех – это значит: или трех, или четырех, или пять женщин. Для подсчета числа способов вы-

бора группы, в которой не менее трех женщин воспользуемся правилом суммы и сложим число способов n_1, n_2, n_3 выбора группы, в которой или 3 женщины, или 4 женщины, или 5 женщин соответственно (*рисунок 2*).

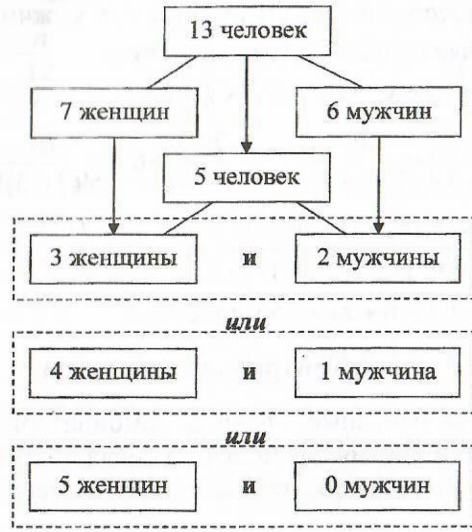

Рисунок 2

Найдем n_1 – число способов выбора группы из 5 человек, в которой 3 женщины и 2 мужчин. Из 7 женщин можно выбрать 3 женщины C_7^3 способами и после каждого такого выбора из 6 мужчин 2 мужчин можно выбрать C_6^2 способами. По правилу произведения число способов выбора 3 женщин и 2 мужчин равно $n_1 = C_7^3 \cdot C_6^2$.

Найдем n_2 – число способов выбора группы из 5 человек, в которой 4 женщины и 1 мужчина. Из 7 женщин можно выбрать 4 женщины C_7^4 способами и после каждого такого выбора из 6 мужчин 1 мужчину можно выбрать $C_6^1 = 6$ способами. По правилу произведения число способов выбора 4 женщин и 1 мужчины равно $n_2 = C_7^4 \cdot C_6^1$.

Найдем n_3 – число способов выбора группы из 5 человек, в которой все 5 женщин. Из 7 женщин можно выбрать 5 женщин C_7^5 способами. Тогда $n_3 = C_7^5$ (также $n_3 = C_7^5 \cdot C_6^0$, где формально C_6^0 – число способов выбора 0 мужчин из 6 мужчин).

Применяя правило суммы, получим

$$n_1 + n_2 + n_3 = C_7^3 \cdot C_6^2 + C_7^4 \cdot C_6^1 + C_7^5 =$$

$$= \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} \cdot \frac{6!}{2!\cdot(6-2)!} + \frac{7!}{4!\cdot(7-4)!} \cdot 6 + \frac{7!}{5!(7-5)!} =$$

$$= \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4!} \cdot \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 4!} + \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!\cdot 1\cdot 2\cdot 3} \cdot 6 + \frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!\cdot 1\cdot 2} =$$

$= 35\cdot 15 + 35\cdot 6 + 21 = 756$ способов.

Контрольные вопросы

1. Каковы основные правила комбинаторики? Приведите примеры их применения для подсчета числа комбинаций.
2. Какие соединения называются соединениями без повторений?
3. Какие соединения называются перестановками из n различных элементов? Приведите примеры перестановок.
4. По какой формуле вычисляется число перестановок из n различных элементов?
5. Какие соединения называются размещениями из n различных элементов по m элементов? Приведите примеры размещений.
6. Как найти число размещений из n элементов по m?
7. Какие комбинации называются сочетаниями из n различных элементов по m элементов? Приведите примеры сочетаний.
8. По какой формуле вычисляется число сочетаний из n различных элементов по m элементов?
9. Чем размещения из n элементов по m отличаются от сочетаний из n элементов по m?
10. Что больше C_n^m или A_n^m?

Задачи

1.1. Агрофирма планирует засеять m полей разными культурами из n культур, семена которых имеются в наличии. Сколькими способами можно это осуществить?

Вариант	n	m	Вариант	n	m
1	12	4	4	13	3
2	6	3	5	9	4
3	10	2	6	7	2

1.2. Сколькими способами можно распределить m однородных общественных поручений среди n студентов группы?

Вариант	m	n	Вариант	m	n
1	2	13	4	4	11
2	2	20	5	3	16
3	3	15	6	3	18

1.3. Сколькими способами можно разместить n сельскохозяйственных культур по n участкам поля?

Вариант	n	Вариант	n
1	7	4	8
2	3	5	4
3	5	6	6

1.4. Сколькими способами можно закрепить n механизаторов за n участками поля?

Вариант	n	Вариант	n
1	5	4	3
2	8	5	7
3	6	6	4

1.5. Сколькими способами из n телочек можно оставить в хозяйстве m для создания стада?

Вариант	n	m	Вариант	n	m
1	11	6	4	7	4
2	17	14	5	15	11
3	13	8	6	9	5

1.6. Сколько различных пучков по m колосьев можно составить из n колосьев ржи?

Вариант	m	n	Вариант	m	n
1	4	22	4	3	25
2	5	19	5	5	18
3	4	21	6	3	24

1.7. Сколькими способами можно посадить вдоль забора в различном порядке n саженцев разных деревьев?

Вариант	n	Вариант	n
1	8	4	6
2	5	5	10
3	9	6	7

1.8. В лесничестве работают n бригад. Сколькими способами можно направить m бригад на различные участки леса?

Вариант	n	m	Вариант	n	m
1	7	3	4	10	4
2	9	2	5	6	2
3	5	3	6	8	4

1.9. Студент знает m вопросов из n. Сколькими способами можно составить билет с l вопросами, чтобы в нем было известно студенту:

а) k_1 вопросов;

б) не менее k_2;

в) более k_3;

г) по крайне мере k_4 вопросов?

Вариант	n	m	l	k_1	k_2	k_3	k_4
1	12	9	7	5	6	4	6
2	10	8	6	4	5	3	3
3	15	10	8	6	4	4	6
4	9	7	5	3	4	2	3
5	14	10	8	5	6	3	6
6	11	9	7	6	5	2	6

1.10. Имеется n зерен пшеницы, из них m зерен первого сорта. Сколькими способами можно отобрать l зерен так, чтобы среди них было:

а) k_1 зерен первого сорта;

б) менее k_2 зерен первого сорта;

в) не более k_3 зерен первого сорта;

г) хотя бы k_4 зерен первого сорта?

Вариант	n	m	l	k_1	k_2	k_3	k_4
1	15	10	8	5	3	4	6
2	12	8	6	5	2	3	4
3	10	7	5	4	2	3	3
4	11	9	7	6	3	6	5
5	14	10	6	4	2	3	4
6	18	14	10	6	4	7	8

1.11. Среди n семян m непротравленных. Сколькими способами можно отобрать l семян так, чтобы среди них непротравленных было:

а) только k_1 семян:

б) не менее k_2 семян;

в) не более k_3 семян;

г) хотя бы k_4 семян?

Вариант	n	m	l	k_1	k_2	k_3	k_4
1	12	9	7	5	6	3	6
2	10	8	6	4	5	4	3
3	15	10	8	6	4	5	6
4	9	7	5	3	4	2	3
5	14	10	8	5	6	3	6
6	11	9	7	6	5	2	4