В. А. Малугин

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

УЧЕБНИК И ПРАКТИКУМ ДЛЯ СПО

Рекомендовано Учебно-методическим отделом среднего профессионального образования в качестве учебника и практикума для студентов образовательных учреждений среднего профессионального образования

Москва ▪ Юрайт ▪ 2018

УДК 519.2(075.32)
ББК 22.171я723
М19

***Автор*:**

Малугин Виталий Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математических методов анализа экономики экономического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

***Рецензенты*:**

Маршев В. И. — доктор экономических наук, профессор кафедры управления организацией экономического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова;

Афанасьев М. Ю. — доктор экономических наук, профессор, заведующий лабораторией прикладной эконометрики Центрального экономико-математического института Российской академии наук, ведущий научный сотрудник экономического факультета государственного академическогой университета гуманитарных наук.

Малугин, В. А.

М19 Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для СПО / В. А. Малугин. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 470 с. — (Серия : Профессиональное образование).

ISBN 978-5-534-06572-5

В книге освещены основные идеи теории вероятностей и математической статистики, необходимые для полноценного освоения эконометрики и смежных экономико-математических дисциплин. Изложение сопровождается вопросами для повторения, решенными задачами на экономическую тематику и значительным числом содержательных экономико-статистических задач для самостоятельного решения.

Уровень изложения материала предъявляет повышенные требования к пререквизитам, а именно: хорошему знанию элементарной математики, математического анализа, особенно интегрального исчисления, некоторых разделов линейной алгебры.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования и профессиональным требованиям.

Для студентов экономических специальностей среднего профессионального образования. Отдельные главы и задачи в них могут быть использованы в школьных группах повышенной нагрузки.

УДК 519.2(075.32)
ББК 22.171я723

ISBN 978-5-534-06572-5

Оглавление

Раздел II
МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Предисловие

> Наука начинается там, где начинаются измерения.
>
> *Д. И. Менделеев*

Теория вероятностей и математическая статистика (ТВ и МС) представляют собой второй уровень математического образования, опирающийся на математический анализ и линейную алгебру как на предметы первого уровня. К третьему уровню следует отнести специальные для данной профессии математические дисциплины. Для экономистов такой дисциплиной является, например, эконометрика.

В экономическом колледже и вузе, где математика является прикладной дисциплиной, все эти предметы преподаются на достаточно серьезном уровне, но не исчерпывающе. Для каждого предмета разыскивается компромисс между строгостью и простотой. Основные теоремы доказываются достаточно строго и подробно, другие, меньшего уровня важности, только формулируются.

Данная книга предназначена для студентов СПО, которые не выбрали математику в экономике своей основной специальностью, но готовы применять математические методы в профессиональной деятельности, планируют изучать далее эконометрику (а вероятность и математическая статистика являются пререквизитами этой дисциплины).

В книге рассматривается материал двух семестров обучения, на первом из которых изучается теория вероятностей с предварительной лекцией по комбинаторике, на втором — математическая статистика со вступительной лекцией по элементарной теории ошибок. Предполагается, что каждый предмет разбивается на 15 лекций и столько же семинаров. Автор не отвлекается на смежные дисциплины типа дискретной математики, нечетких множеств или анализа временны́х рядов. Вся книга посвящена предметам, обозначенным на титульном листе.

В равной степени в учебнике обращено внимание на теорию и на методы решения задач. Основные теоремы не только формулируются, но и по возможности доказываются. Уровень строгости доказательства не всегда соответствует требованиям научной монографии, но, как нам представляется, удовлетворяет требованиям учебника для студентов. Большое число приведенных примеров, иллюстрирующих основные положения теории, большое число разобранных задач, в которых заложены наиболее важные идеи, помогут легче воспринять и глубже усвоить достаточно сложный учебный материал. Задачи для самостоятельного решения снабжены ответами, а также, часто, формулами, объясняющими идею решения. Встречаясь в будущем с экономическими задачами, специалист должен узнавать знакомые с университетских времен примеры и брать их решения за образец.

Среди задач для самостоятельного решения встречаются уже решенные в тексте учебника задачи. Данная книга рассматривается как учебник и как задачник, каждый из которых несет свою полезную нагрузку. В задачнике представлены наиболее важные для понимания материала задачи, причем в возможно более полном объеме. Те, кому нужен только задачник, найдут достаточно разнообразный материал по каждой теме, выраженный в задачах. Им не придется разыскивать условия задач, листая учебник. Это нужно для преподавателей при составлении контрольных, для студентов, желающих проверить свои знания. Это нужно также для студентов, делающих первые шаги в овладении сложным материалом в качестве перехода от теории к ее применению. Их первые задачи для самостоятельного решения — это те, с решениями которых они знакомились некоторое время назад, читая учебник. Теперь надо самостоятельно решить задачу или хотя бы воспроизвести решение, что-то вспомнив, что-то додумав.

Изучив курс, представленный в учебнике, студент должен освоить:

трудовые действия

- владение методами комбинаторного анализа;
- логикой рассуждений при нахождении вероятности;
- навыками совершения операций со случайными величинами;
- навыками решения различных вероятностных задач;
- методами определения характеристик случайных величин;
- навыками построения и исследования точечных и интервальных оценок статистических параметров;
- навыками построения и проверки статистических гипотез;
- методами решения экономических задач с использованием ТВ и МС;

необходимые умения

- решать задачи на классическую, геометрическую, условную вероятности;
- решать задачи, связанные с распределениями случайной величины;
- вычислять различные характеристики случайной величины;
- составлять закон распределения и строить функцию распределения;
- использовать теоремы теории вероятностей при решении вероятностных задач;
- применять теоретические знания по теории вероятности к вопросам хеджирования и оптимизации в экономике;
- исследовать точечные оценки на несмещенность, состоятельность и эффективность;
- минимизировать ошибки первого и второго рода;

- применять методы математической статистики для исследования статистических параметров и проверки гипотез;

необходимые знания

- теоретических основ понятия вероятности и вероятностного пространства;
- определений основных терминов теории вероятностей и математической статистики;
- основных формул и теорем ТВ и МС;
- характеристик случайных величин и способы их определения;
- основных законов распределения, их числовых характеристик и свойства;
- понятий функции и плотности распределения случайных величин и их свойства;
- условных распределений и их свойства;
- правил операций со случайными величинами;
- ковариации и корреляции и их свойств;
- приложения ТВ и МС в экономике;
- понятий сходимости по вероятности и по распределению;
- методов, используемых в математической статистике.

При написании учебника автор с одной стороны пытался удовлетворить требованиям, предъявляемым к преподаванию курса теории вероятностей и математической статистики в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта. С другой стороны, автор соблюдал преемственность в использовании идей и методов, наработанных предыдущими лекторами, читавшими этот курс на экономическом факультете МГУ и представленных ими в пособиях для студентов.

Доказательства теорем и утверждений в учебнике снабжены значками начала и конца рассуждений ◄ и ►.

Раздел I
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава 1
КОМБИНАТОРИКА

В результате освоения материала данной главы студент должен:

знать

- основные правила комбинаторики;
- основные понятия комбинаторики;

уметь

- классифицировать выбор элементов с повторениями и без повторений (размещения, сочетания, перестановки);
- решать задачи, связанные с числом возможных расположений или с числом возможных актов совершения действий;

владеть

- методами комбинаторного анализа;
- навыками решения задач, связанных с выбором и расположением элементов.

1.1. Основные правила комбинаторики

Комбинаторика — один из разделов дискретной математики, используемый в теории вероятностей и математической статистике. Исследователю часто приходится иметь дело с задачами, в которых требуется подсчитать «число возможных расположений» элементов, «число возможных актов» совершения действий. В дальнейшем словосочетания, взятые в кавычки, будем заменять на более простое словосочетание «число способов». Например: сколькими способами можно расположить на полке пять книг? Или: 10 человек претендуют на занятие трех должностей в корпорации; сколькими способами сотрудники могут быть назначены на эти вакансии?

В основе решения комбинаторных задач лежат два правила.

Правило умножения. Пусть некоторый выбор A можно осуществить n способами, а затем другой выбор B можно совершить m способами, тогда выбор AB в указанном порядке можно сделать $n \cdot m$ способами.

Пример 1.1. Замок открывается если введен пароль из трех различных цифр. Сколько таких паролей существует?

Решение. На первом месте может находиться любая из 10 цифр, на втором месте — любая из 9 цифр, на третьем месте — любая из 8 цифр. В соответствии с правилом умножения число паролей будет равно $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$.

Сформулируем правило умножения в комбинаторике в общем виде.

Пусть требуется выполнить последовательно k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе — n_2 способами и т.д., то все k действий вместе в указанном порядке будут выполнены $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Пример 1.2. Даны цифры 0, 1, 2, 3, 4. Из них составляются пятизначные нечетные числа. Сколько различных чисел можно составить?

Решение. Любая из цифр 1, 2, 3, 4 может стоять на первом месте. Любая из цифр нечетны 1,3 — на последнем в силу нечетности числа. Тогда общее количество чисел равно $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 1000$.

Правило сложения. Пусть можно сделать выбор A одного элемента из первой группы, содержащей n элементов, и выбор B одного элемента из второй группы с m элементами. Тогда выбор $A + B$ одного элемента из первой или второй группы будет выполнен $n + m$ способами.

Пример 1.3. В корзине 20 белых, 30 желтых и 10 красных роз. Сколько существует способов выбрать белую или красную розы?

Решение. Белая роза может быть извлечена $n_1 = 20$ способами, красная — $n_2 = 10$ способами. По правилу сложения одна из двух: белая или красная роза — будет извлечена $n_1 + n_2 = 20 + 10 = 30$ способами.

Теперь рассмотрим различные подходы к выбору элементов.

1.2. Выбор элементов (размещения, сочетания, перестановки)

Первый подход — выбираем по одному.

Размещения. Пусть имеется группа из n различных элементов. Будем извлекать из группы последовательно по одному элементу и располагать их в порядке выбора, не возвращая элементы в исходную совокупность. Пусть совершено k операций выбора.

Теорема 1.1. *Число различных способов, которыми можно произвести последовательный выбор k элементов без возвращения из совокупности объема n, равно*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

◄ Выбираем первый элемент из совокупности в n элементов. Число таких вариантов равно n. Из оставшейся совокупности в $n - 1$ элементов выбираем следующий элемент. Число вариантов равно $n - 1$. Продолжая процесс отбора элементов, k-й элемент мы будем выбирать из $n - (k - 1)$ элементов. По правилу умножения общее число способов выбора k элементов будет равно

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot[n-(k-1)] = \frac{n!}{(n-k)!}.\blacktriangleright$$

Пример 1.4. Для совокупности {1, 2, 3} найти A_3^2 и выписать соответствующие комбинации цифр.

Решение. Число размещений равно $A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$. Соответствующие комбинации цифр имеют следующий вид: 12, 21, 13, 31, 23, 32.

Величина A_n^k называется *числом размещений без повторений из n элементов по k элементов*, а сами *размещения без повторений* — это все возможные комбинации элементов, отличающиеся друг от друга либо составом, либо порядком элементов.

Перестановки. Продолжим извлечение из группы последовательно по одному элементу, располагая их в порядке выбора и не возвращая в исходную совокупность, пока не извлечем все. Число размещений без повторений будет равно

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!.$$

Эти размещения содержат одни и те же элементы и различаются только перестановками своих элементов.

Пример 1.5. Для совокупности {1, 2, 3} найти P_3 и выписать соответствующие комбинации цифр.

Решение. Число перестановок равно $P_3 = 3! = 6$ с комбинациями цифр 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Перестановки — это все возможные совокупности элементов, отличающиеся друг от друга только порядком элементов.

Сочетания. Другой подход к выбору элементов — выбор сразу нескольких элементов («горстью»). Если же производится выбор по одному, то не учитывается порядок выбора.

Пусть, по-прежнему, имеется группа из n различных элементов. Зачерпнем из группы порцию из k элементов. Определив, какие это элементы, вернем их в исходную совокупность и зачерпнем вновь порцию из k элементов. Если в новой порции хотя бы один элемент окажется новым, зафиксируем порцию как второй способ выборки k элементов из n имеющихся элементов. В результате такой процедуры получаются комбинации, которые отличаются только составом элементов.

Теорема 1.2. *Число различных способов, которыми можно произвести одновременный неупорядоченный выбор k элементов из совокупности объема n элементов, равно*

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

◀Число размещений A_n^k (производится выбор k элементов из n) учитывает порядок расположения k элементов в группе. Если такой учет не производить, то A_n^k следует разделить на $k!$ (число перестановок элементов в выбранной группе). Тогда число способов одновременного выбора k элементов из n (учитывается только состав элементов, но не их расположение) определяется формулой

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.▶$$

Пример 1.6. Для совокупности {1, 2, 3} найти C_3^2 и выписать соответствующие комбинации цифр.

Решение. Число комбинаций без учета порядка равно $C_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$. Это 12, 13, 23.

Величина C_n^k называется *числом сочетаний из n элементов по k элементов*, а сами *сочетания* — это все возможные комбинации элементов, отличающиеся друг от друга только составом элементов.

Формула числа сочетаний обладает некоторыми полезными свойствами, доказательство которых элементарно:

$$C_n^0 = C_n^n;$$

$$C_n^k = C_n^{n-k};$$

$$C_{n+m}^n = C_{n+m}^m;$$

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k;$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n;$$

$$A_n^k = P_k \cdot C_n^k.$$

Размещения с повторениями. Будем извлекать из группы последовательно по одному элементу и располагать в порядке выбора, возвращая каждый раз элемент в исходную совокупность. Пусть совершено k операций выбора. Число размещений с повторениями в этом случае будет равно

$$\bar{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ раз}} = n^k.$$

Пример 1.7. Для совокупности {1, 2, 3} найти $\bar{A}_3^2$ и выписать соответствующие комбинации цифр.

Решение. Число размещений с повторениями равно $\overline{A}_3^2 = 3^2 = 9$. Соответствующие комбинации цифр имеют следующий вид: 11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33.

Величина $\overline{A}_n^k$ называется *числом размещений с повторениями из n элементов по k элементов. Размещения с повторениями* — это все возможные совокупности элементов, отличающиеся друг от друга составом элементов, а если элементы разные, то и порядком элементов.

Перестановки с повторениями (разбиение на группы). Пусть совокупность из n различных элементов разбивается на k групп так, что в первую группу попадают неупорядоченно n_1 элементов, во вторую — n_2 элементов и т.д., в k-ю группу — оставшиеся n_k элементов, причем группы не могут быть поменяны местами.

Теорема 1.3. *Число различных способов, которыми можно представить совокупность из n элементов в виде k пронумерованных групп с числом элементов в них соответственно $n_1, n_2, \ldots, n_k$, при условии что $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, равно*

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

◀Выбираем одновременно и неупорядоченно n_1 элементов из совокупности в n элементов и помещаем в первую группу, что можно сделать $C_n^{n_1}$ способами. Из оставшихся $n - n_1$ элементов выбираем n_2 элементов $C_{n-n_1}^{n_2}$ способами и помещаем во вторую группу. Продолжаем процесс отбора до k-й группы, куда помещаем оставшиеся n_k элементов. Используя правило умножения, получаем общее число способов разбиения в виде

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}^{n_k} =$$
$$= \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-n_1-\ldots-n_{k-1})!}{n_k! \cdot 0!} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$ ▶

Пример 1.8. Для совокупности {1, 2, 3, 4} найти число способов, которыми можно представить четыре цифры в виде двух упорядоченных групп по две цифры, и выписать соответствующие комбинации цифр.

Решение. Число разбиений на группы равно $\overline{P}_4(2,2) = \dfrac{4!}{2! \cdot 2!} = 6$. Соответствующие комбинации групп и элементов в группах представлены ниже:

$$\underbrace{[\{1,2\},\{3,4\}]}_{1}, \underbrace{[\{1,3\},\{2,4\}]}_{2}, \underbrace{[\{1,4\},\{2,3\}]}_{3},$$
$$\underbrace{[\{2,3\},\{1,4\}]}_{4}, \underbrace{[\{2,4\},\{1,3\}]}_{5}, \underbrace{[\{3,4\},\{1,2\}]}_{6}.$$

Замечание 1.1. Как очевидно из примера, способы выбора комбинаций 1 и 6, например, отличаются только перестановкой групп. В группах элементы не поменялись, поэтому говорят о перестановках с повторениями.

Замечание 1.2. Порядок элементов в каждой группе не важен, существен только порядок групп (группы пронумерованы).

Пример 1.9. Для совокупности {1, 2, 3, 4} найти число способов, которыми можно представить четыре цифры в виде трех упорядоченных непустых групп, и выписать соответствующие комбинации цифр.

Решение. Положим в первую группу две цифры, в остальные — по одной. Число разбиений на группы равно $\overline{P}_4(2,1,1)=\dfrac{4!}{2!\cdot(1!)^2}=12$. Соответствующие комбинации групп и элементов в группах представлены ниже:

$$\underbrace{[\{1,2\},\{3\},\{4\}]}_{1},\underbrace{[\{1,2\},\{4\},\{3\}]}_{2},\underbrace{[\{1,3\},\{2\},\{4\}]}_{3},\underbrace{[\{1,3\},\{4\},\{2\}]}_{4},$$
$$\underbrace{[\{1,4\},\{2\},\{3\}]}_{5},\underbrace{[\{1,4\},\{3\},\{2\}]}_{6},\underbrace{[\{2,3\},\{1\},\{4\}]}_{7},\underbrace{[\{2,3\},\{4\},\{14\}]}_{8},$$
$$\underbrace{[\{2,4\},\{1\},\{3\}]}_{9},\underbrace{[\{2,4\},\{3\},\{1\}]}_{10},\underbrace{[\{3,4\},\{1\},\{2\}]}_{11},\underbrace{[\{3,4\},\{2\},\{1\}]}_{12}.$$

Во всех 12 комбинациях в первой группе стоят две цифры. Но две цифры могут попасть во вторую или третью группы. Поэтому величину $\overline{P}_4(2,1,1)$ надо умножить на 3. Итак число способов, которыми можно представить четыре цифры в виде трех непустых групп, равно $3\overline{P}_4(2,1,1)=36$.

Замечание 1.3. Перестановки с повторениями учитывают перестановки групп с одинаковым числом элементов в них, но не учитывают перестановки с разным числом элементов.

Сочетания с повторениями. Пусть имеется совокупность n различных элементов. Будем извлекать из нее последовательно по одному элементу, запоминать его и возвращать назад. Пусть совершено k операций выбора. В полученной группе некоторые элементы могут повториться. Получающиеся при такой процедуре группы называются *сочетаниями с повторениями из n элементов по k*.

Теорема 1.4. *Число сочетаний с повторениями из n элементов по k равно*

$$\overline{C}_n^k=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{(n-1)!k!}.$$

◀Извлекаем из совокупности в n элементов последовательно по одному элементу и, фиксируя его, возвращаем каждый раз элемент в исходную совокупность. Совершив k операций выбора и получив тем самым первую группу из k элементов, создаем вторую группу, отличающуюся от первой либо составом элементов, либо числом повторений хотя бы одного элемента в группе. Пронумеруем в совокупности из n элементов места, занимаемые элементами, и сопоставим каждой группе в k элементов код из нулей и единиц, сформированный по следующим правилам:

1) если при выборе некий элемент попал в группу m раз, то записываем подряд m единиц на соответствующем месте. Если не попал, ставим нуль на этом месте;

2) разделяем разные элементы, попавшие в группу, нулями;

3) пустые места замещаем нулями так, чтобы их число было равно $n - 1$.

Тогда между построенными кодами и группами будет существовать взаимно однозначное соответствие. Располагая совокупностью из n элементов и извлекая из нее k элементов с повторениями, будем иметь все возможные комбинации k единиц в коде из $k + n - 1$ нулей и единиц, т.е. C_{n+k-1}^{k}.

Следовательно, $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$.▶

Разберем доказательство теоремы на конкретных примерах.

Пример 1.10. Для совокупности $\{a, b, c, d\}$ найти число способов, которыми можно выбрать две буквы из совокупности четырех букв, последовательно выбирая буквы, фиксируя их и затем возвращая в исходную совокупность.

Решение. Группы по две буквы из совокупности и соответствующие им коды имеют вид

$$\underbrace{\{a, a\}}_{11000}, \underbrace{\{a, b\}}_{10100}, \underbrace{\{a, c\}}_{10010}, \underbrace{\{a, d\}}_{10001}, \underbrace{\{b, b\}}_{01100}, \underbrace{\{b, c\}}_{01010}, \underbrace{\{b, d\}}_{01001}, \underbrace{\{c, c\}}_{00110}, \underbrace{\{c, d\}}_{00101}, \underbrace{\{d, d\}}_{00011}.$$

Число возможных способов, которыми можно разместить две единицы на пяти местах, равно

$$C_{n+k-1}^{k} = C_{4+2-1}^{2} = C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10,$$

что и будет представлять число сочетаний с повторениями двух элементов из четырех.

Пример 1.11. Для совокупности $\{1, 2, 3\}$ найти все сочетания с повторениями двух элементов из трех и выписать соответствующие комбинации цифр.

Решение. Выбираем из совокупности две цифры, возвращая каждый раз выбранную цифру в исходную совокупность. Будем иметь: $\overline{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$. Полученные группы: $\{11\}$, $\{12\}$, $\{13\}$, $\{22\}$, $\{23\}$, $\{33\}$.

Результаты рассуждений можно свести к схеме (рис. 1.1). Вначале следует составить несколько требуемых комбинаций.

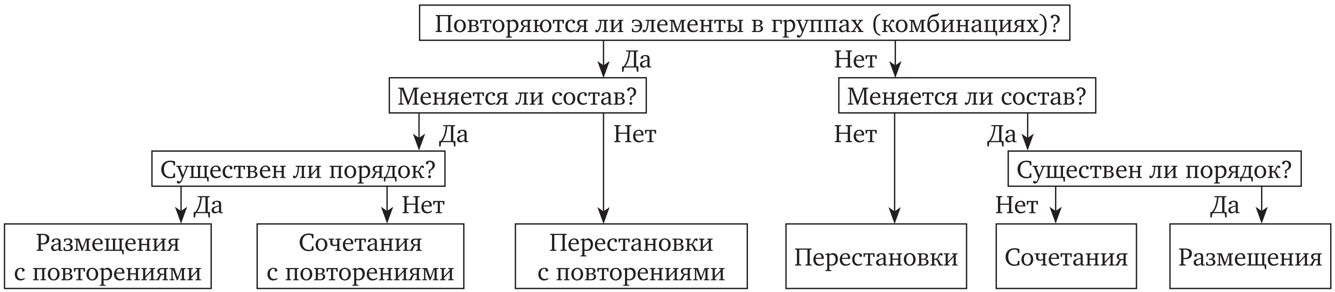

Рис. 1.1. **Комбинаторные рассуждения**

Вопросы и задания для повторения

1. Привести основные правила комбинаторики.
2. Что называется размещениями без повторений? Привести пример для совокупности из трех различных букв. Сформулировать теорему о размещениях.
3. Что называется перестановками? Привести пример для совокупности из трех различных букв. В чем их отличие от размещений?
4. Что называется сочетаниями? Привести пример для совокупности из трех различных букв. Сформулировать теорему о сочетаниях.
5. Перечислить и доказать свойства сочетаний.
6. Что называется размещениями с повторениями? Привести пример для совокупности из трех различных букв.
7. Что называется перестановками с повторениями? Привести пример для совокупности из трех различных букв. Сформулировать теорему о перестановках с повторениями.
8. Что называется сочетаниями с повторениями? Привести пример для совокупности из трех различных букв.

Примеры решения задач

Задача 1.1. Сколькими способами можно рассадить четырех студентов, явившихся на пересдачу, на 25 местах?

Решение. Искомое число способов равно числу размещений из 25 по 4:

$$A_{25}^{4} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

Задача 1.2. Даны все нечетные цифры. Сколько трехзначных чисел можно из них составить?

Решение. На первом месте в числе стоит любая из пяти цифр, на втором — также любая из пяти и т.д. Всего комбинаций $\overline{A}_5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 125$.

Задача 1.3. Даны цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Сколько существует способов расстановки цифр так, чтобы четные цифры стояли на четных местах, а нечетные — на нечетных?

Решение. Пять четных цифр можно расставить на пяти четных местах 5! способами. Каждому способу размещения четных цифр на четных местах соответствует 5! способов размещения нечетных цифр на нечетных местах. Общее число перестановок оказывается равным $5! \cdot 5! = (5!)^2 = 14\,400$.

Задача 1.4. Сколько перестановок можно составить из пяти букв {а, б, в, г, д}, в которых не встречались бы комбинации аб и ба?

Решение. Число всех перестановок пяти букв равно 5!. Рассмотрим варианты, когда буквы а и б стоят рядом. Первый вариант: а стоит на первом месте, б на втором, остальные три буквы расставлены произвольно. Таких случаев будет 3! Второй вариант: а стоит на втором месте, б — на третьем, таких случаев также будет 3! и т.д. Последний вариант: а стоит на четвертом месте, б стоит на пятом месте. Эти варианты вместе дают $4 \cdot 3!$ случаев. Возможно такое же число вариантов для комбинации ба. Следовательно, число способов размещения а и б рядом равно 2 · (4 · 3!). Поэтому число перестановок без комбинаций аб и *ба* есть 5! – 2 · (4 · 3!) = 4! · 3 = 72.

Задача 1.5. Проводится шахматный турнир, в котором 16 участников. Из какого числа партий может состоять турнир, если:

а) турнир проводится по системе плей-офф (участник выбывает из турнира после первого проигрыша);

б) между любыми двумя участниками проводится одна игра;

в) ничьи во внимание не принимаются.

Решение. а) В каждой партии участвуют два человека, один из которых выбывает. Вначале проводятся восемь партий, оставшиеся восемь человек проводят четыре партии, четыре победителя играют две партии, наконец, последняя партия выявляет чемпиона. Всего будет сыграно 8 + 4 + 2 + 1 = 15 партий.

б) Каждая партия отличается от других составом участников. Число способов выбрать двух участников из 16 без учета последовательности их выбора есть число сочетаний из 16 по 2: $C_{16}^2 = \frac{16!}{14! \cdot 2!} = 120.$

Задача 1.6. Студенту необходимо в течение недели пересдать четыре предмета. Сколькими способами это можно сделать, если в один день можно сдать один предмет? При этом:

а) последовательность пересдачи предметов имеет значение;

б) последовательность пересдачи предметов несущественна;

в) при условии выполнения п. б) один предмет будет сдаваться в последний день;

г) при условии выполнения п. а) один предмет будет сдаваться в последний день;

д) при условии выполнения п. а) один предмет будет сдаваться в последний день, и это будет алгебра.

Решение. Из семи дней студент должен выбрать четыре дня, когда он будет сдавать экзамены или зачеты.

а) Последовательность сдачи предметов представляет интерес. Число способов описывается размещениями: $A_7^4 = \frac{7!}{3!} = 840.$

б) Порядок пересдачи предметов не существен (нужно всего лишь выбрать четыре дня из семи), тогда число способов будет представлять сочетания: $C_7^4 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35.$

в) Если последовательность сдачи не важна и дополнительно известно, что последний экзамен (один из четырех) будет сдаваться в последний день, то число способов равно

$$4C_6^3 = 4 \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 80.$$

г) Если последовательность сдачи важна и дополнительно известно, что последний экзамен (один из четырех) будет сдаваться в последний день, то число способов равно

$$4A_6^3 = 4 \cdot \frac{6!}{3!} = 480.$$

д) Если последовательность сдачи важна и дополнительно известно, что последним экзаменом в последний день будет алгебра, то число способов равно $A_6^3 = \frac{6!}{3!} = 120$.

Задача 1.7. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «мама»?

Решение. Задача может быть решена простым перебором перестановок букв. Их всего шесть: мама, ммаа, маам, аамм, амма, амам. Получим решение в общем виде, что позволит решать более сложные задачи. Перенумеруем места, на которых стоят буквы. Первой группой будут два места, на которых разместим букву «м». Второй группой будут места для размещения двух букв «а». Четыре места делятся на две группы по два места, т.е. имеем дело с разбиениями на группы. Число способов разбить четыре элемента на две группы по два есть

$$\overline{P}_4(2,2) = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$$

Задача 1.8. Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «экономика»?

Решение. В слове девять мест, на которые претендуют две буквы «к», две буквы «о», одна буква «э», одна буква «и», одна буква «н», одна буква «м» и одна буква «а». Разбиение на семь групп описывается формулой

$$\overline{P}_9(2,2,1,1,1,1,1) = \frac{9!}{(2!)^2 \cdot (1!)^5} = 90\,720.$$

Задача 1.9. Сколько существует костей домино, каждая из которых содержит две цифры из семи: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6?

Решение. Кости домино можно рассматривать как сочетания с повторениями по два из семи цифр. Число таких комбинаций равно $\overline{C}_7^2 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$.

Задача 1.10. Руководитель подразделения должен написать десятистраничный отчет в течение недели. Сколькими способами он может распределить по дням работу, если:

а) писать не менее одной странички в день;

б) условием п. а) себя не ограничивать?

Решение. а) Используем так называемый принцип «шаров и перегородок» (рис. 1.2). Расположим 10 страниц в ряд и поставим между ними шесть перегородок, каждая из которых может стоять на одном из 9 мест. Число страниц между соседними перегородками автор должен написать в один из дней. Перегородки не должны совпадать, иначе в какой-то день не будет написана ни одна страница. Значит, надо выбрать шесть перегородок на девять мест, что описывается сочетаниями без повторений: $C_9^6 = \dfrac{9!}{3!\cdot 6!} = 84$.

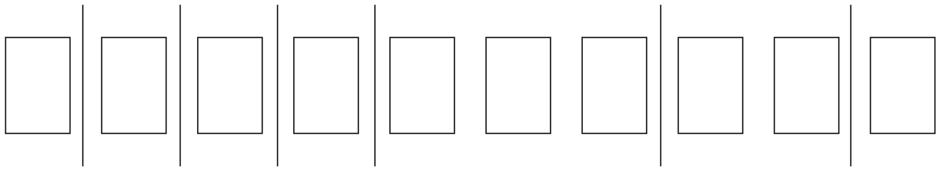

Рис. 1.2. **К задаче 1.10**

б) Поскольку могут возникнуть дни, когда не будет написана ни одна страница, перегородки (их всего шесть штук) могут совпадать. Мест для перегородок имеется 11 (до страниц, между ними и после). Значит, следует выбрать шесть перегородок на 11 мест, причем каждое место может быть выбрано вновь. Получили сочетания с повторениями:

$$\overline{C}_{11}^6 = C_{16}^6 = \frac{16\cdot 15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{6!} = 8008.$$

Задача 1.11. Вдоль движения маршрутного такси девять остановок. Из шести пассажиров на одной остановке выходят четыре человека, на другой — остальные. Сколько вариантов покинуть такси имеют пассажиры?

Решение. Пассажиры разбились на группы, что описывается перестановками с повторениями $\overline{P}_6(2,4)$. Из девяти остановок выбраны две. Число различных способов, которыми можно произвести последовательный выбор двух элементов без возвращения из совокупности объема девять, равно A_9^2. Таким образом, у пассажиров имеется $A_9^2 \cdot \overline{P}_6(2,4) = 9\cdot 8\cdot \dfrac{6!}{2!\cdot 4!} = 1080$ способов выйти из такси.

Задачи для самостоятельного решения

На формулу $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$

1.1. Из девяти монет разного достоинства надо выбрать три. Сколькими способами это можно сделать?

1.2. Профком выделяет на лабораторию в составе 30 сотрудников три путевки в дом отдыха. Сколько вариантов распределения существует, если сотрудник может получить только одну путевку?

1.3. В саду распустились 10 красных роз и 5 белых. Сколькими способами можно срезать в саду букет из 5 роз?

1.4. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 36 карт: а) две карты; б) две карты пиковой масти; в) два туза?

1.5. Пятнадцать студентов, встретившись утром на занятиях, обменялись рукопожатиями. Сколько всего рукопожатий будет сделано?

1.6. Товарищество собственников жилья выбирает из 10 человек, пожелавших работать в составе правления, председателя правления, секретаря и трех членов правления. Сколькими способами можно это сделать?

1.7. Учебная часть из курса численностью в 100 человек выбирает пять старост и столько же их заместителей. Сколькими способами это можно сделать?

1.8. Из корзины с яблоками и грушами выбирают два яблока и одну грушу. Сколькими способами это можно сделать, если в корзине пять яблок и три груши?

1.9. На группу из 25 человек выделены три билета в один театр и два — в другой. Сколькими способами они могут быть распределены?

1.10. Два малыша, играя в песочнице, делят шесть красных и шесть синих формочек для песка поровну: каждому по три формочки одного цвета. Сколько вариантов выбора у них есть?

1.11. В аквариуме вместе с восемью разноцветными рыбками гуппи плавают три меченосца. Владелец аквариума собирается продать шесть рыбок. Сколько может быть вариантов их вылова из аквариума, если всех трех меченосцев вместе продавать он не будет?

1.12. В саду распустились розы: девять белых, девять желтых и девять красных. Сколькими способами можно срезать букет из пять роз так, чтобы в нем были представлены все цвета?

На формулу $\overline{A}_n^m = n^m$

1.13. Кубик с разными цифрами на каждой грани был брошен дважды. Сколько различных чисел можно ожидать?

1.14. Владелец компьютера забыл пароль, но вспомнил, что пароль содержит три цифры, каждая кратна трем. Сколько вариантов пароля существует?

1.15. Трем операторам call-центра необходимо ввести в компьютер 10 квитанций об оплате. Сколькими способами они могут распределить эту работу между собой?

1.16. Группа пассажиров из пяти человек села в автобус, который на своем маршруте делает семь остановок. Сколько вариантов выхода из автобуса существует у пассажиров?

1.17. Дед Мороз привез по заказам родителей семь подарков детям из пяти квартир. Сколько всего существует вариантов раздачи подарков? Как изменится ответ при условии, что в пятой квартире проживает один ребенок?

1.18. Шесть игрушек малыш разложил по четырем ящикам. Сколькими способами он может это сделать?

1.19. Сколько символов можно закодировать с помощью 1 байта?

1.20. Механический кодовый замок на велосипеде содержит два буквенных разряда и три цифровых, расположенные в определенном порядке. Сколько различных шифров можно составить, используя 10 букв и 10 цифр?

1.21. Скоростная электричка останавливается на 10 станциях. Сколькими способами могут выйти на станциях шесть пассажиров, находящиеся в вагоне?

1.22. 10 шаров раскладывают по трем ящикам так, что не остается пустых ящиков. Сколькими способами это можно сделать?

1.23. В четырехзначном номере номере встречаются цифры 5 и 6 по отдельности или вместе. Сколько таких номеров существует?

1.24. Сколько существует четырехзначных номеров, в которых цифры 5 и 6 встречаются только вместе?

На формулу $P_n = n!$

1.25. На полке стоит подборка детективной литературы из 15 книг. Сколькими способами ее можно расставить на полке?

1.26. Малыш расставляет на полке фотографии девяти членов своей семьи. Фотографии папы и мамы он ставит рядом. Сколькими способами он может это сделать?

1.27. У малыша всего 10 различных машинок, которые он выстраивает в ряд. Между самой большой и самой маленькой машинками оказались еще две. Сколькими способами он может это сделать?

На формулу $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

1.28. Сколько существует таких четырехзначных чисел, составленных из различных четных цифр, имеется цифра 8?

1.29. На группу из 25 человек выделены три билета в различные театры. Сколькими способами они могут быть распределены?

1.30. Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из четырех занятий по разным предметам для студентов, изучающих 10 дисциплин.

1.31. Автобус, обычно развозящий рабочих по восьми адресам, везет 10 человек. По одному адресу выходят пять человека, по другому — три и по третьему — остальные. Сколькими способами рабочие могут выйти из автобуса?

1.32. Сколько существует пятизначных: а) номеров; б) чисел, не содержащих одинаковых цифр, но имеющих в своем составе цифры 1, 2 и 3 одновременно.

На формулу $\overline{P}_n(n_1, n_2) = \dfrac{n!}{n_1!n_2!}$

1.33. Десять разноцветных шаров раскладываются на две группы по пять шаров. Сколькими способами это можно сделать?

1.34. Группа из 12 детей в детском саду разбивается для игры на три партии. Сколькими способами это можно сделать, если:

а) в каждой партии по четыре человека;

б) в первой партии три человека, во второй — четыре, в третьей — пять человек;

в) партии содержат 3, 4 и 5 человек.

1.35. В научной лаборатории составляется научный отчет по 10 направлениям научных исследований, в которых принимает участие каждый сотрудник. Один сотрудник собирается написать четыре раздела, другой — три раздела, еще один — два раздела, наконец, четвертый сотрудник — один раздел научного отчета. Сколькими способами сотрудники лаборатории могут распределить работу между собой?

1.36. В военном ведомстве группа из восьми офицеров дежурит попарно «сутки через трое». Сколько различных расписаний дежурства для них можно составить?

1.37. Шесть книг случайным образом ставятся на три полки. Сколько существует вариантов попадания трех книг на одну из них?

1.38. Шесть туристов могут обратиться в четыре турфирмы случайным образом. Сколько существует вариантов обращения трех туристов хотя бы в одну фирму?

1.39. Подготовив два варианта контрольной работы, преподаватель разбил группу из 10 студентов на две подгруппы по 6 и 4 человека. Затем раздал каждой группе по варианту и посадил их в два ряда так, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант. Сколькими способами это можно сделать?

На формулу $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

1.40. Сколькими способами можно выбрать произвольно три пирожных в кондитерской, где продается пять разных видов?

1.41. Бригаде ремонтников поступило девять заказов на ремонт оборудования со сроком исполнения трое суток. Сколько вариантов распределения исполнения заказов по суткам у нее есть, если:

а) она будет выполнять не менее одного заказа в сутки;

б) она свободна в планировании исполнения заказов?

1.42. Инвестор планирует купить 12 акций пяти компаний. Сколько вариантов принятия решений у него есть, если:

а) решено купить хотя бы одну акцию каждой компании;

б) от акций одной или более компаний он может отказаться?

1.43. Сколько существует трехзначных цифровых: а) кодов; б) чисел, сумма цифр которых равна 6?

1.44. Сколько существует четырехзначных цифровых: а) кодов, б) чисел, сумма цифр которых равна 9?

1.45. Сколько существует шестизначных номеров, у которых сумма первых трех цифр равна сумме последних трех цифр и не превышает числа 6.

Глава 2
ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В результате освоения материала данной главы студент должен:

знать

- теоретические основы понятия вероятности и вероятностного пространства;
- классификацию вероятности — понятие классической, геометрической, условной вероятности;
- теорему умножения вероятностей и ее следствия;
- формулу полной вероятности и формулу Байеса (теорему гипотез);

уметь

- решать задачи на классическую, геометрическую, условную вероятности;
- строить дерево вероятностей при решении задач на полную вероятность;
- применять теорему гипотез;

владеть

- навыками решения вероятностных задач;
- логикой рассуждений при нахождении апостериорной вероятности.

2.1. Понятие о вероятности и вероятностном пространстве

Теория вероятностей занимается изучением закономерностей, выраженных математически в числовом или формульном виде, которые возникают при совершении действий с заранее непредсказуемыми результатами. Каждое изучаемое нами действие назовем *опытом*, *экспериментом* или *испытанием*. Результат действия назовем *элементарным исходом* или *элементарным событием* и будем выражать его в числовом виде. Основное свойство исхода — его неделимость. Исход невозможно собрать из двух или нескольких действий.

В качестве примера рассмотрим действие: бросание кубика с изображенными на каждой грани цифрами от 1 до 6. Исходом каждого действия будет выявление цифры на верхней грани. Варианты с падением кубика на ребро или потерей кубика рассматривать не будем.

Все множество элементарных исходов назовем *пространством элементарных исходов* и обозначим буквой Ω. Сами элементарные исходы будем обозначать буквой ω с индексом. Имеем

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Определим понятие *события* как *набора* (*множества*) *элементарных исходов*. Например, выпадение четной цифры при бросании кубика — это событие. Оно реализуется при любом из элементарных исходов ω_2, ω_4, ω_6.

Набор элементарных исходов только в том случае имеет вероятностный признак, если:

1) обеспечены одинаковые условия проведения каждого опыта;

2) возможна многократная повторяемость опыта.

Все пространство элементарных исходов (элементарных событий), т.е. набор всех возможных исходов, представляет собой событие, которое произойдет всегда. Это *достоверное* событие (что-нибудь да выпадет). А вот цифру 7, например, сколько бы мы ни бросали кубик, мы не увидим. Это *невозможное* элементарное событие.

Элементарное событие назовем *случайным*, если оно может произойти в результате опыта, а может и не реализоваться. Два элементарных события назовем *несовместными* или *непересекающимися*, если они не могут произойти одновременно. Теперь можно уточнить понятие теории вероятностей.

Теория вероятностей — это наука о закономерностях массовых случайных событий, реализуемых в одинаковых, могущих повторяться неограниченное число раз условиях. Математические законы теории вероятностей не являются абстракциями, лишенными физического содержания. Они представляют собой математическое выражение *реальных* закономерностей, существующих в массовых случайных явлениях природы и общества.

Перейдем от понятия пространства элементарных исходов к понятию *вероятностного пространства*, представляющего собой среду, в которой:

1) существует пространство элементарных событий, имеющих вероятностный признак;

2) любое множество (событие) данного пространства должно быть наблюдаемым и измеримым;

3) каждому такому событию поставлено в соответствие некоторое число для сравнения событий по возможности их реализации.

Совокупность событий представляет собой некоторый класс подмножеств Δ, удовлетворяющий определенным условиям:

1) если подмножество A принадлежит Δ, то дополнение $\overline{A}$ также принадлежит Δ (верна операция дополнения);

2) если подмножества $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ принадлежат Δ, то и их счетное объединение $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ принадлежит Δ (верна операция объединения).

Из теории множеств известно, что операции над подмножествами могут быть получены с помощью двух операций дополнения и объединения. Поэтому можно сказать, что совокупность подмножеств, удовлетворяющих классу Δ, замкнута относительно счетного числа операций. Говоря другими словами, совершая математические действия над подмножествами, принадлежащими Δ и описывающими события, мы не получим результат, выходящий за рамки такой совокупности подмножеств, которой событие не соответствует.

Таким образом, под событием понимается не любое подмножество пространства, а только подмножество из выделенного класса Δ. Проблема замкнутости относительно счетного числа операций отпадает, если пространство элементарных исходов Ω конечно или счетно (каждому исходу можно поставить определенное число из натурального ряда).

Как пример существования неизмеримых множеств рассмотрим элементарные исходы, являющиеся результатом бросания точки на отрезок [0; 1]. Мы производим измерение местоположения точки, которое естественно описываем рациональным числом. Множество рациональных точек, как известно, складывается из счетного числа точек. Оно является событием и также описывается рациональным числом. Но множество иррациональных точек есть дополнение к множеству рациональных точек, образуя вместе множество действительных чисел на отрезке. Значит, и множество иррациональных точек есть событие. Но, как указывают авторы учебника [3], «вряд ли естественно с физической точки зрения считать наблюдаемыми (и, следовательно, физически различимыми) событиями факты принадлежности точки к множеству рациональных и к множеству иррациональных чисел». В связи с этим не все множество чисел на отрезке [0; 1] является для нас наблюдаемым и измеримым.

Построим класс подмножеств Δ, т.е. зададим совокупность этих чисел, поставленных в соответствие каждому событию вероятностного пространства. Тем самым введем понятие вероятности или вероятностной меры как числовой характеристики степени возможности появления какого-либо определенного события.

Пусть каждому событию A поставлено в соответствие некоторое число $P(A)$, удовлетворяющее следующим аксиомам:

1) $P(A) \geq 0$ (аксиома неотрицательности);

2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);

3) $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots$ для любых $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ (аксиома сложения несовместных событий).

Это число $P(A)$ называется *вероятностью* события A.

Рассмотрим *свойства вероятности*.

1. Вероятность есть теоретическая характеристика, вычисляемая по условиям схемы эксперимента, она не может быть получена экспериментально.

2. Вероятность дополнительного события равна

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

◀Из равенства $\Omega = A + \overline{A}$ следует $P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A})$, или $1 = P(A) + P(\overline{A})$, откуда $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.▶

3. Вероятность невозможного события равна нулю: $P(\varnothing) = 0$.

◀Равенство следует из аксиомы сложения $A = A + \varnothing$.▶

4. Вероятность заключена между нулем и единицей: $0 \le P(A) \le 1$.

◀Поскольку $\Omega = A + \Omega \setminus A$, то $1 = P(A) + P(\Omega \setminus A)$. Значит, $0 \le P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$ по аксиоме неотрицательности. Тогда $0 \le P(A) \le 1$.▶

5. Вероятность сложения двух *произвольных* событий равна

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

◀Воспользуемся тем, что $A + B = A + B \setminus A$ и $B = BA + B \setminus A$. Из обоих равенств следует

$$P(B \setminus A) = P(A+B) - P(A);$$

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(AB).$$

Вычтем из первого равенства второе, получим

$$0 = P(A+B) - P(A) - P(B) + P(AB),$$

откуда и следует свойство 5.▶

Для трех произвольных событий справедливо равенство

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Для несовместимых событий A и B их пересечение есть невозможное событие: $AB = \varnothing$. Мы возвращаемся к аксиоме сложения несовместных событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Таким образом, мы ввели понятие *вероятностного пространства*, обозначаемого обычно как $\{\Omega, \Delta, P\}$, где символы Ω, Δ и P указывают на то, что мы имеем дело с *пространством элементарных исходов*, что, совершая операции с исходами, мы не выйдем за пределы *измеримых* подмножеств этого пространства (класс подмножеств Δ), что каждому исходу или событию соответствует некоторая *вероятность* его реализации P. В дальнейшем изложении мы не будем ссылаться на измеримость множеств, считая их таковыми по умолчанию. Рассмотрение указанных вопросов выходит за рамки данной книги.

Пример 2.1. Рассмотрим эксперимент с бросанием симметричной монеты. Естественным будет взять два события: выпадение «герба» (г) и выпадение «решки» (р), т.е. $\Omega = \{г; р\}$. Тогда класс подмножеств $\Delta = \{г, р, (г, р), \varnothing\}$. Вероятности можно посчитать следующим образом:

$$P(г) = \frac{1}{2},\ P(р) = \frac{1}{2},\ P(г, р) = 1,\ P(\varnothing) = 0.$$

Таким образом определена тройка $\{\Omega, \Delta, P\}$ — вероятностное пространство, в рамках которого можно рассматривать различные задачи.

Понимая, что ценность теоретических построений определяется их практической применимостью, привяжем понятие вероятности к практике, поставив в соответствие каждой возможности реализации события A полученное экспериментальным путем некоторое число $P_n(A)$.

2.2. Относительная частота события

Пусть в отдельном испытании может произойти или не произойти некоторое событие A. Проведем серию из n одинаковых испытаний и зафиксируем число появлений события A. Пусть это будет число m. Поделив число появлений события A на общее число испытаний, получим так называемую *относительную частоту события* A:

$$P_n(A) = \frac{m}{n}.$$

Иногда относительную частоту события называют *эмпирической* вероятностью. Относительная частота события A носит случайный характер и будет меняться от серии к серии испытаний. При увеличении длины серии испытаний эти колебания частоты от серии к серии будут становиться меньше, поскольку случайные обстоятельства, влияющие на испытания, в массе взаимно гасятся. Многочисленными экспериментами установлено, что:

1) частоты $P_n(A)$ с увеличением n проявляют тенденцию к стабилизации. Экспериментальный факт стабилизации частоты получил название *статистической устойчивости частот*;

2) относительные частоты события при неограниченном увеличении длины серии испытаний n приближаются к вероятности события:

$$P_n(A) \xrightarrow{n} P(A).$$

Конечно, при любом конечном числе опытов, а это всегда имеет место в эксперименте, вероятность события в общем случае мы не получим, но приближенное значение вероятности появления события A будем иметь.

2.3. Классическая вероятность

Рассмотрим пространство элементарных исходов, имеющее следующие свойства:

- пространство элементарных исходов конечно;
- все исходы равновозможны;

• все исходы несовместны, т.е. никакие исходы не могут произойти одновременно;

• рассматриваемые исходы в сумме образуют достоверное событие.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ — конечное пространство, содержащее n элементарных исходов, с соответствующими вероятностями $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Пусть вероятности каждого исхода равны: $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$.

Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} p = np = 1.$$

Отсюда

$$p_i = p = \frac{1}{n}.$$

Вероятность события A, содержащего m исходов, равна

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i = \frac{m}{n}.$$

Читается формула классической вероятности следующим образом: *вероятность реализации события A равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу исходов вероятностного пространства*.

Пример 2.2. В корзине два яблока и три апельсина. Наудачу выбираются два фрукта. Какова вероятность выбрать два апельсина?

Решение. Разместим имеющиеся в корзине фрукты в ряд и перенумеруем их (рис. 2.1). Создадим пространство элементарных исходов, в котором каждый исход есть вынимание из корзины двух фруктов (например, первый исход — вынимание первого апельсина и первого яблока (1а + 1я) и т.д.):

$$\Omega = \{1а + 1я,\ 1 + 2я,\ 2а + 1я,\ 2а + 2я,\ 3а + 1я,\ 3а + 2я,\ 1а + 2а,\ 1а + 3а,\ 2а + 3а,\ 1я + 2я\}.$$

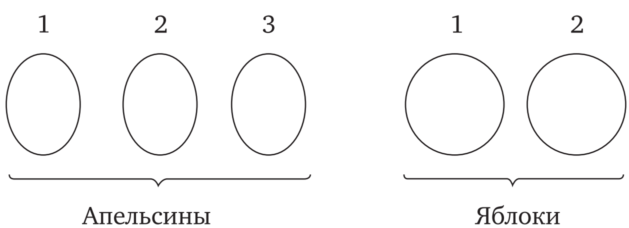

Рис. 2.1. **К примеру 2.2**

Всего 10 исходов. Благоприятствующими рассматриваемому событию будем считать исходы, когда выбраны два апельсина. Это три исхода. Тогда вероятность выбрать два апельсина из пяти фруктов равна $p = \frac{3}{10}$.

Этот же результат можно получить быстрее, воспользовавшись формулами комбинаторики. Общее число элементарных исходов равно числу способов вынуть из пяти фруктов два, т.е. равно числу сочетаний из пяти по два — C_5^2. Число благоприятствующих исходов равно числу способов вынуть из трех апельсинов два фрукта — C_3^2. Искомая вероятность будет равна

$$p = \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{\dfrac{3!}{(3-2)!2!}}{\dfrac{5!}{(5-2)!2!}} = \frac{3}{10}.$$

2.4. Геометрическая вероятность

Рассмотрим попадание точки на отрезок определенной длины $[L; M]$. Ввести событие как набор элементарных исходов попадания в точку здесь не удастся. Число точек на отрезке любой длины бесконечно велико и не может быть пронумеровано с помощью натурального ряда. Поэтому переходим от дискретной вероятностной схемы к непрерывной. Поступим следующим образом. Разобьем отрезок на ряд промежутков $[a_0; a_1]$, $(a_1; a_2]$, …, $(a_{n-1}; a_n]$, где $a_0 = L$, $a_n = M$. Будем считать событиями попадание точки в один из промежутков. Введем вероятности попадания точки в промежутки пропорционально их длинам. Коэффициент пропорциональности выберем из условий нормировки. Тогда вероятность попадания точки на определенный отрезок будет иметь вид

$$P(A) = \frac{a_i - a_{i-1}}{M - L},$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$. Подобная вероятность называется *геометрической*.

Пусть в общем случае Ω — некоторая область, имеющая меру $S(\Omega)$ (для отрезка, например, это его длина). Все точки области Ω равнодоступны. Разбив область Ω на подобласти $\{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$, будем считать вероятность попадания точки в область ω_i пропорциональной мере этой области $S(\omega_i)$, или с учетом нормировки

$$P(A) = \frac{S(\omega_i)}{S(\Omega)}.$$

Пример 2.3. В течение 8 ч рабочего времени два автомобиля курьеров могут прибыть на стоянку фирмы случайным образом и находиться там в течение 1 ч. Какова вероятность курьерам встретиться?

Решение. Обозначим моменты приезда автомобилей на стоянку через x и y, $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 8$. Курьеры встретятся, если разность между моментами приезда на стоянку автомобилей не превысит 1 ч, причем неизвестно, кто приедет первым. Тогда условие встречи на восьмичасовом промежутке имеет вид $|x - y| \le 1$, или $x - 1 \le y \le x + 1$.

Для наглядности изобразим x и y как оси координат на плоскости, где $0 \le x \le 8$, $0 \le y \le 8$. Область Ω представляет собой квадрат со стороной 8, а область A возможной встречи — заштрихованный шестиугольник (рис. 2.2). Искомая вероятность $P(A)$ равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади квадрата:

$$P(A) = \frac{8^2 - 7^2}{8^2} = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2 \approx 0{,}234.$$

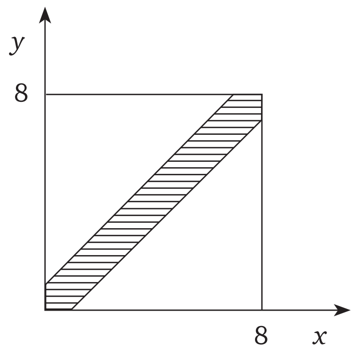

Рис. 2.2. **К примеру 2.3**

2.5. Условная вероятность

Событие B называется *независимым* от события A, если вероятность события B не зависит от того, произошло событие A или нет.

Пример 2.4. В корзине два белых шара и один черный. Два человека вынимают из корзины по одному шару. Пусть событие A — появление белого шара у первого человека, событие B — появление белого шара у второго. Вероятность события B до того, как известно что-либо о событии A, равна 2/3. Если стало известно, что событие A произошло, то вероятность события B становится равной 1/2, из чего можно заключить, что событие B зависит от события A.

Вероятность события B, вычисленная при условии, что имело место событие A, называется *условной вероятностью* события B и обозначается $P(B|A)$.

Для условий последнего примера

$$P(B) = \frac{2}{3}, \; P(B|A) = \frac{1}{2}.$$

Условие независимости события A от события B можно записать в виде

$$P(B|A) = P(B|\bar{A}) = P(B).$$

В случае зависимости B от A равенство не будет выполняться.

Теорема 2.1 (умножения вероятностей). *Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место*:

$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$

◀Докажем теорему для случая классической вероятности. Пусть в вероятностном пространстве Ω (рис. 2.3) из n элементарных исходов m исходов благоприятствуют событию A, k исходов — событию B, l исходов — событию AB. Тогда $P(AB) = \frac{l}{n}$, $P(A) = \frac{m}{n}$.

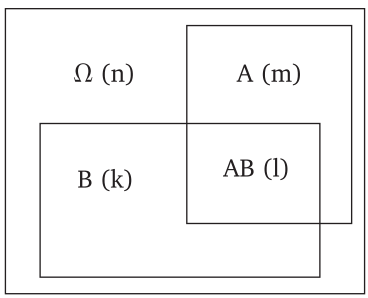

Рис. 2.3. **К доказательству теоремы умножения вероятностей**

Вычислим условную вероятность $P(B|A)$. Если известно, что событие A произошло, то из ранее возможных n случаев остаются возможными только те m, которые благоприятствуют событию A. Из них l случаев благоприятны событию B. Следовательно, $P(B|A) = \frac{l}{m}$. Подставляя полученные выражения в доказываемую формулу, получим $\frac{l}{n} = \frac{m}{n} \cdot \frac{l}{m}$, что является тождеством. Теорема доказана.▶

Следствие 1. Условная вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A имело место, равна

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Следствие 2. $P(AB) = P(B)P(A|B)$.

◀Не имеет значения, какое событие считать первым, а какое вторым:

$$P(AB) = P(BA) = P(B)P(A|B).▶$$

Следствие 3. Если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A, т.е. если $P(A|B) = P(A)$, то $P(B|A) = P(B)$.

◀Напишем теорему умножения вероятностей в двух формах:

$$P(AB) = P(A)P(B|A),\ P(AB) = P(B)P(A|B).$$

Приравняем правые части этих равенств:

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

и заменим $P(A|B)$ на $P(A)$, получим

$$P(A)P(B|A) = P(B)P(A).$$

Если событие A не произошло ($P(A) = 0$), то $P(B|A)$ есть вероятность события B.

Если событие A имело место, то $P(A) \neq 0$. Сократим равенство на выражение $P(A)$.

Тогда

$$P(B|A) = P(B).▶$$

Следствие 4. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.

◀Следствие вытекает из определения независимости событий:

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(A)P(B).▶$$

Следствие 5. Вероятность произведения трех событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое имело место и на условную вероятность третьего, вычисленную при условии, что первые два имели место:

$$P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB).$$

$$◀P(ABC) = P(AB)P(C|AB) = P(A)P(B|A)P(C|AB).▶$$

Теорему произведения вероятностей можно обобщить на случай произвольного числа событий.

Пример 2.5. В урне два белых и три черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что шары будут разных цветов.

Решение. Вынимаем шар из урны, он может быть белым (исход A) или черным (исход B). Пусть шар оказался белым. Имеем два шанса из пяти. Значит, вероятность равна $P(A) = \frac{2}{5}$. В урне осталось четыре шара. Вероятность вынуть теперь черный шар (три шанса из четырех) равна $P(B|A) = \frac{3}{4}$.

Событие — появление сначала белого шара, затем черного — представляет собой произведение вероятностей двух исходов $P(A)P(B|A)=\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{3}{10}$.

Поскольку в задаче не указана последовательность вынимания шаров по цветам, следует рассмотреть и другую возможность: сначала вынимаем черный шар, затем белый: $P(B)P(A|B)=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}=\frac{3}{10}$. Складывая вероятности, получим

$$P(\text{два разноцветных шара})=P(A)P(B|A)+P(B)P(A|B)=\frac{3}{10}+\frac{3}{10}=\frac{3}{5}.$$

2.6. Формула полной вероятности

Пусть событие A может быть реализовано при условии осуществления одного из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$ (назовем их гипотезами), которые образуют *полную группу* событий. Это означает, что события:

1) попарно несовместны: $H_iH_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) в сумме образуют достоверное событие: $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$.

Теорема 2.2. *Вероятность события A при наличии гипотез вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события при этой гипотезе*:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A|H_i).$$

◀Представим событие A в виде

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n.$$

Так как гипотезы H_1, H_2, …, H_n несовместны, то и произведения AH_1, AH_2, …, AH_n также несовместны. Применяя к ним формулу сложения несовместных событий, получим

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n) =$$
$$= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n),$$

что и доказывает теорему.▶

Выведенная формула называется *формулой полной вероятности.*

Пример 2.6. Компания имеет три источника поставки комплектующих — фирмы H_1, H_2, H_3. На долю фирмы H_1 приходится 50% общего объема поставок, H_2 — 30%, H_3 — 20%. Из практики поставок известно, что среди поставляемых фирмой H_1 деталей 10% бракованных, фирмой H_2 — 5% и фирмой H_3 — 6%. Какова вероятность, что взятая наугад деталь окажется годной?

Решение. Обозначим теми же буквами H_1, H_2, H_3 гипотезы, состоящие в том, что деталь поставлена фирмой H_1, H_2 или H_3 соответственно. Тогда $P(H_1) = 0{,}5$, $P(H_2) = 0{,}3$, $P(H_3) = 0{,}2$. Имеем равенство

$$P(H_1) + P(H_2) + P(H_3) = P(\Omega) = 1.$$

Пусть событие A — появление годной детали. Условные вероятности получения годной детали от фирм равны соответственно

$$P(A|H_1) = 0{,}9,\ P(A|H_2) = 0{,}95,\ P(A|H_3) = 0{,}94.$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i) = 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}95 + 0{,}2 \cdot 0{,}94 = 0{,}923.$$

При решении подобных задач часто используют так называемое дерево вероятностей. Вероятности гипотез — основные ветви дерева, которые в свою очередь разветвляются на условные вероятности (рис. 2.4).

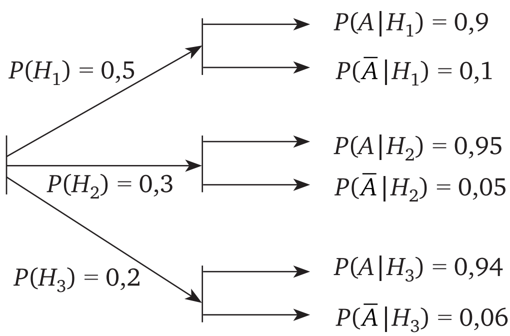

Рис. 2.4. **К примеру 2.6**

Для нахождения вероятности события A вероятности, стоящие на одной ветви и ее продолжении, перемножаются, а полученные произведения складываются.

2.7. Формула Байеса (теорема гипотез)

Формула Байеса, или теорема гипотез, позволяет уточнить величину вероятности изучаемого нами события, принимая во внимание в добавление к уже имеющимся сведениям информацию, появившуюся в результате нового произошедшего события, связанного с изучаемым.

Пусть имеется полная группа несовместных событий (гипотез) H_1, H_2, …, H_n. Вероятности этих событий до испытания известны и равны $P(H_1)$, $P(H_2)$, …, $P(H_n)$. В результате испытания произошло некоторое событие A. Как следует изменить вероятности этих гипотез в связи с получением новой информации — появлением события A?

Теорема 2.3 (Байеса). *Вероятность $P(H_i|A)$ гипотезы H_i при условии, что событие A произошло, связана с вероятностью $P(H_i)$ этой гипотезы до испытания следующей зависимостью*:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}.$$

◀Из теоремы умножения имеем $P(AH_i) = P(A)P(H_i|A) = P(H_i)P(A|H_i)$, откуда

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{P(A)}. \blacktriangleright$$

Данную формулу называют *формулой Байеса*. Безусловную вероятность справедливости гипотезы $P(H_i)$ называют *априорной*, а условную $P(H_i|A)$ — с учетом факта произошедшего события — *апостериорной*.

Замечание 2.1. Выражая $P(A)$ с помощью формулы полной вероятности, имеем

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(H_i)P(A \mid H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A \mid H_i)}, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Замечание 2.2. Перепишем формулу в другом виде:

$$P(H_i \mid A) = \frac{P(A \mid H_i)}{P(A)} P(H_i)$$

и рассмотрим ее физический смысл. Априорная вероятность $P(H_i)$ гипотезы H_i есть первоначальный уровень доверия предположению H_i. Апостериорная вероятность $P(H_i|A)$ гипотезы H_i при наступлении события A — изменившийся уровень доверия после принятия во внимание новых обстоятельств. Коэффициент $\dfrac{P(A \mid H_i)}{P(A)}$ показывает, как событие A помогает изменить уровень доверия к предположению H_i. Таким образом, по формуле Байеса можно более точно пересчитать вероятность по результатам испытания, беря в расчет как ранее известную информацию, так и данные новых наблюдений.

Теорема Байеса названа в честь ее автора Томаса Байеса (1702—1761). Он первый предложил использование теоремы для корректировки убеждений, основываясь на обновленных данных.

Пример 2.7. Ученые разработали метод предсказания землетрясений по предвестникам. В случае землетрясения его предвестники появлялись с вероятностью 0,80. Однако в 10% случаев, когда землетрясение не готовится, предвестники также могут возникнуть. Найти вероятность того, что произойдет землетрясение, если появились предвестники. Вероятность крупного землетрясения на Земле, сопровождающегося разрушениями, составляет 0,03 сут.$^{-1}$.

Решение. Пусть событие A — выдан прогноз при наличии предвестников, H_1 — землетрясение происходит, H_2 — не происходит. Вероятность того, что будет выдан прогноз:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}03 \cdot 0{,}8 + 0{,}97 \cdot 0{,}1 \approx 0{,}12.$$

Уточненная вероятность того, что произойдет землетрясение, если был выдан прогноз, равна

$$P(H_1 | A) = \frac{P(H_1)\,P(A|H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}03 \cdot 0{,}80}{0{,}12} \approx 0{,}20.$$

Таким образом, вероятность осуществления землетрясения при наличии прогноза примерно равна 0,2. В этом кроется одна из причин, по которым власти часто не предпринимают дорогостоящих мер защиты на сейсмоактивных территориях при выдаче учеными-сейсмологами прогноза землетрясения.

Вопросы и задания для повторения

1. Что называется пространством элементарных исходов?
2. Какие события называются случайными, несовместными?
3. Что называется вероятностью события? Каковы ее свойства?
4. Что называется вероятностным пространством?
5. Что называется статистической устойчивостью частот?
6. Привести условия реализации формулы классической вероятности.
7. Что такое геометрическая вероятность?
8. Какие события называются независимыми?
9. Что называется условной вероятностью?
10. Сформулировать и доказать теорему умножения вероятностей. Привести следствия теоремы.
11. Вывести формулу полной вероятности.
12. Вывести формулу Байеса.

Примеры решения задач

Задача 2.1. На юбилей фирмы каждому из 30 сотрудников давался номерной пригласительный билет в ресторан. Среди других мероприятий были разыграны 15 призов по случайно выбранным номерам. Какова вероятность того, что среди 15 сотрудников, оказавшихся за одним столом, восемь человек получили призы?

Решение. Из 30 билетов одновременно выбирается 15 шт., порядок выбора не существен. Пространство элементарных исходов есть число сочетаний из 30 по 15: C_{30}^{15}. Среди 15 призеров за первым столом оказались 8 человек. Число способов выбора равно C_{15}^{8}. Оставшиеся 7 человек за столом не получили призы. Это величина C_{15}^{7}. Возможен другой вариант, когда за вторым столом оказалось 8 призеров. Вероятность того, что за одним из двух столов сидели 8 призеров, равна

$$2\frac{C_{15}^{8}C_{15}^{7}}{C_{30}^{15}}\approx 0{,}534.$$

Задача 2.2. Найти вероятность того, что в семизначном номере присутствуют всего три различные цифры, причем две из них встречаются трижды.

Решение. Пространство элементарных исходов содержит события, число которых есть число размещений с повторениями, равное 10^7. Выбираем одну из 10 цифр (всего 10 вариантов) и ставим на три места семизначного номера (всего C_7^3 способов). Затем из оставшихся 9 цифр выбираем также одну (9 вариантов) и заполняем ею три места из оставшихся (всего C_4^3 способов). Наконец из 8 цифр выбираем одну (всего 8 вариантов) и размещаем ее на единственном оставшемся месте (1 вариант). Вероятность события

$$\frac{10C_7^3\cdot 9C_4^3\cdot 8}{10^7}\approx 0{,}010.$$

Задача 2.3. Одновременно бросаются пять игральных кубиков. Найти вероятность того, хотя бы на одном из них выпадет шестерка.

Решение. Задача может быть решена при суммировании вероятностей случаев выпадения шестерки один раз, два раза и т.д. Тем не менее задачи, в которых встречается сочетание «хотя бы один раз», удобно решать методом от противного. Вероятность того, что шестерка не выпадет при одном бросании кубика, равна $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что шестерка не выпадет на пяти кубиках, равна $\left(\frac{5}{6}\right)^5$. Тогда вероятность выпадения шестерки хотя бы один раз будет равна $1-\left(\frac{5}{6}\right)^5\approx 0{,}598.$

Задача 2.4. Наудачу взяты два натуральных числа x и y, каждое из которых не превышает десяти. Найти вероятность того, что их сумма окажется не более 12.

Решение. Пространство элементарных исходов содержит события, число которых равно $10\cdot 10 = 100$. Возьмем первое число равным единице. Тогда второе может быть любым от 1 до 10, всего 10 случаев. Если первое число равно 2, то второе также может быть любым от 1 до 10. Если первое число равно 3, то второе может меняться от 1 до 9. Перебирая таким образом значения первого числа от 1 до 10, получим количество случаев $10 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 64$. Вероятность того, что их сумма окажется не более 12, равна $64/100 = 0{,}64$.

Задача 2.5. Эксперт принимает правильное решение с вероятностью $p > \frac{1}{2}$. Чтобы увеличить число верных решений, была создана группа для принятия решений в составе трех человек, два из которых — известные эксперты, компетентность третьего неизвестна. Как будет меняться доля правильных решений группы по сравнению с решением, принимаемым одним экспертом, в зависимости от компетентности третьего члена комиссии?

Решение. Пусть вероятность принятия правильного решения независимыми экспертами A и B равна p, третьим членом группы C — x. Правильное решение принимается группой в составе трех человек большинством голосов с вероятностью

$$p_3 = P(ABC) + P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C}) = p^2x + 2p(1-p)x + p^2(1-x).$$

Сравним работу группы с работой одного эксперта. Предположим, что доля правильных решений группы выше. Тогда

$$p_3 = p^2x + 2p(1-p)x + p^2(1-x) > p.$$

После преобразований получим $p_3 - p = (1-p)p(2x-1) > 0$.

1. Если вероятность x принятия правильного решения третьим членом группы больше $\frac{1}{2}$, то число правильных решений при этом повышается по сравнению с работой одного эксперта. Пусть $x = p$. Процент верных решений повысится на величину

$$\frac{p_3 - p}{p}100\% = \frac{(1-p)p(2p-1)}{p}100\% = \left(\frac{1}{8} - 2\left(p - \frac{3}{4}\right)^2\right)100\%$$

и может достичь величины 12,5% (процент повышения правильных решений группой экспертов по сравнению с одним экспертом).

2. Если третий член группы экспертов некомпетентен, принимая решения случайным образом «чет-нечет» ($x = \frac{1}{2}$), то $p_3 = p$. Некомпетентный член группы как бы нейтрализует работу одного из двух экспертов.

3. Наконец, если третий член группы, имея искаженные знания о предмете, чаще принимает неверные решения ($x < \frac{1}{2}$), то работа экспертной группы фактически блокируется: $p_3 < p$.

Задача 2.6. На окружности радиусом R наудачу проводится хорда, параллельная данному направлению. Какова вероятность того, что длина хорды не превысит R?

Решение. Совместим центр окружности с началом декартовой системы координат. Из геометрических соображений находим длину хорды: $l=2\sqrt{R^2-x^2}$, где x — расстояние от начала координат до хорды. Поскольку она должна быть не больше радиуса, то, решая неравенство $2\sqrt{R^2-x^2}\le R$, получаем $|x|\ge\frac{\sqrt{3}}{2}R$. Событию $l\le R$ благоприятствует множество значений $x\in\left[-R;\,-\frac{\sqrt{3}}{2}R\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2}R;\,R\right]$ из промежутка $x\in[-R;\,R]$. Вероятность этого события равна

$$P=\frac{2\left(R-\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)}{2R}=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0{,}134.$$

Задача 2.7. Рабочий, имея в ящике 10 деталей, среди которых четыре бракованные, должен вынуть стандартную. Какова вероятность, что ею окажется четвертая деталь, вынутая из ящика?

Решение. Если только четвертая деталь оказалась стандартной, то первые три были бракованные. Рабочий вынимает первую бракованную деталь с вероятностью $\frac{4}{10}$ (исход A), вторую бракованную деталь — с вероятностью $\frac{3}{9}$ (исход B), третью бракованную деталь — с вероятностью $\frac{2}{8}$ (исход C). Наконец, ему попадается стандартная деталь, вероятность вынуть которую $\frac{6}{7}$ (исход D). По теореме умножения вероятность события, заключающегося в том, что мастер вынимает последовательно три бракованные детали и, затем стандартную, равна

$$P(ABCD)=P(A)P(B\,|\,A)P(C\,|\,AB)P(D\,|\,ABC)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{6}{7}=\frac{1}{35}.$$

Задача 2.8. В молодежном лагере организована экскурсия. Подошли три автобуса. Два приятеля Петя и Вася, потеряв друг друга в толпе, садятся в автобусы случайным образом.

а) Какова вероятность $P(B|A)$ того, что один из них сядет в первый автобус, если известно, что они сели в разные автобусы?

б) Найти вероятность $P(AB)$ того, что хотя они попали в разные автобусы, кто-то из них оказался в первом.

Решение. а) Известно, что ребята сели в разные автобусы. Пространство элементарных исходов будет равно A_3^2 (событие A). Число случаев, благоприятствующих событию B (кто-то сел в первый автобус) при упорядоченном выборе равно A_2^1. Второй попал либо во второй, либо в третий автобус. Всего два случая. Тогда вероятность $P(B|A)$ того, что один из них сядет в первый автобус, если известно, что они сели в разные, имеет вид

$$P(B|A) = \frac{2A_2^1}{A_3^2} = \frac{4}{6}.$$

б) В отличие от первого вопроса при ответе на второй надо учитывать, что, хотя они могли расположиться в автобусах произвольным образом, случайно произошли два события: событие A — ребята оказались в разных автобусах, событие B — кто-то из них попал в первый. В этом случае пространство элементарных исходов равно $\bar{A}_3^2 = 3^2$. Вероятность ребятам оказаться в разных автобусах равна $P(A) = \dfrac{A_3^2}{\bar{A}_3^2} = \dfrac{3!}{3^2} = \dfrac{6}{9}$.

Вероятность события, что они сели в разные автобусы, причем кто-то из них оказался в первом, равна

$$P(AB) = P(A)P(B\,|\,A) = \frac{A_3^2}{\bar{A}_3^2} \cdot \frac{2A_2^1}{A_3^2} = \frac{4}{9}.$$

Для наглядности составим пространство элементарных событий в виде таблицы, обозначив ребят как П и В:

1-й вагон	**2-й вагон**	**3-й вагон**	**Число способов**
ПВ	—	—	Пассажир Петя сел в первый вагон, пассажир Вася — в первый, либо во второй, либо в третий вагон. Всего три случая
П	В	—	
П	—	В	
В	П	—	Пассажир Петя сел во второй вагон, пассажир Вася — в первый, либо во второй, либо в третий вагон. Всего три случая
—	ПВ	—	
—	П	В	
В	—	П	Пассажир Петя сел в третий вагон, пассажир Вася — в первый, либо во второй, либо в третий вагон. Всего три случая
—	В	П	
—	—	ПВ	

Таблица подтверждает, что в четырех случаях из девяти в первом вагоне находится один пассажир.

Задача 2.9. Составляются номера с пятью цифрами. При условии, что все цифры в номере разные, найти вероятность того, что среди них имеется цифра 0. Найти вероятность того, что в номере с пятью разными цифрами имеется цифра 0.

Решение. Если дано, что в номере цифры разные, пространство элементарных исходов равно A_{10}^5 (событие A). Число случаев, благоприятствующих событию B (выбираем цифру 0) равно 1. На остальные места следует выбрать в произвольном порядке три из оставшихся девяти цифр — число способов C_9^4. Все пять выбранных цифр следует расставить по разрядам пятизначного номера числом способов 5!, тогда номера будут разными. Вероятность $P(B|A)$ того, что в пятизначном числе с разными цифрами есть цифра 0, имеет вид

$$P(B|A)=\frac{1\cdot C_9^4\cdot 4!}{A_{10}^5}=0{,}5.$$

Ответ можно получить сразу. Нужно выбрать пять цифр с нулем. Остаются невыбранными также пять цифр. Результат: $P(B|A) = 0{,}5$.

Во втором случае необходимо найти вероятность совместных событий $P(AB)$: событие A — все цифры разные, событие B — в номере есть цифра 0. Пространство элементарных исходов равно $\bar{A}_{10}^5=10^5$. Вероятность иметь номер с различными цифрами, среди которых есть цифра 0, равна

$$P(AB)=P(A)P(B\,|\,A)=\frac{A_{10}^5}{\bar{A}_{10}^5}\cdot\frac{1\cdot C_9^4\cdot 5!}{A_{10}^5}=\frac{C_9^4\cdot 5!}{\bar{A}_{10}^5}\approx 0{,}151.$$

Задача 2.10. При массовом рентгеновском обследовании населения вероятность обнаружить заболевание туберкулезом у больного туберкулезом равна 0,9, вероятность принять здорового человека за больного равна 0,01. Доля больных туберкулезом по отношению ко всему населению равна 0,001. Найти вероятность того, что человек здоров, если при обследовании он был признан больным.

Решение. Введем события: пациент болен — H_1, пациент здоров — H_2. Вероятность того, что на обследование поступил больной пациент, $P(H_1)$, здоровый — $P(H_2)$.

Пусть событие A — «пациент признан больным». Тогда событие $\bar{A}$ — пациент признан здоровым. Сформулируем условные вероятности. По результатам обследования признанный больным пациент действительно оказался больным — $P(A|H_1)$, признанный здоровым оказался больным — $P(\bar{A}|H_1)$, признанный больным на самом деле здоров — $P(A|H_2)$, признанный здоровым действительно здоров — $P(\bar{A}\,|\,H_2)$. Соответствующее дерево вероятностей представлено на рис. 2.5. Вычислим сначала полную вероятность признания пациента больным:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) = 0{,}001 \cdot 0{,}9 + 0{,}999 \cdot 0{,}01 = 0{,}01089.$$