Динамическое программирование

1. Формулировка задачи динамического программирования.
2. Принцип оптимальности Беллмана.
3. Алгоритм решения задач динамического программирования.
4. Экономические приложения задач динамического программирования.

Основная литература:

Бережная, Е.В. Математические методы моделирования экономических систем: учеб. пособие. / Е.В. Бережная , В.И. Бережной — М.: Финансы и статистика, 2012. -432с.

Дополнительная литература:

- Давыдов, Е.Г. Элементы исследования операций: учебное пособие / Е.Г. Давыдов. – М. : КНОРУС, 2010. – 160 с.
- Просветов, Г.И. Программирование: задачи и решения: учебно-практическое пособие / Г.И. Просветов. – М.: «Альфа-Пресс», 2011. -112 с.
- Журнал "Математическое моделирование» mathnet.ru

Вопрос 1.

Формулировка задачи динамического программирования.

Динамическое программирование

это математический метод нахождения оптимальных решений многошаговых (многоэтапных) задач.

Динамическое программирование дает возможность принять ряд последовательных решений, обеспечивающих оптимальность развития процесса в целом.

Задачи динамического программирования имеют ряд особенностей.

1. В них рассматривается процесс поведения системы во времени.

2. Состояние системы в каждый момент времени однозначно определяется численными значениями небольшого набора параметров.

3. Операция выбора решения состоит в преобразовании этого набора параметров в такой же набор с другими числовыми значениями.

4. Если система в рассматриваемый момент времени находится в некотором состоянии, то ее поведение в дальнейшем определяется этим состоянием и выбираемым управлением, но не зависит от предыстории (т. е. от того, в каких состояниях находилась система до этого момента).

Постановка задачи динамического программирования.

Рассматривается некоторая система S состояние которой со временем меняется.

В начальный момент времени система находится в начальном состоянии S_0.

Процесс изменения состояний системы - управляемый, т. е. можно влиять на его ход посредством выбора управляющих факторов U_i.

С процессом связан некоторый критерий W, характеризующий качество управления и зависящий от него.

Оптимальность планирования означает выбор наилучшего управления для достижения поставленной цели, т.е. выбор такого U_i, чтобы $W(U_i)$ было оптимальным.

На первом шаге под воздействием управляющего фактора U_1 система переходит из состояния S_o в состояние S_1, то есть $S_1=S_1(S_o,U_1)$.

Целевая функция равна $W_1(S_o,U_1)$.И т.д.

На последнем n-м шаге под воздействием управляющего фактора U_n система переходит из состояния S_{n-1} в состояние S_n, то есть $S_n=S_n(S_{n-1},U_n)$.

Целевая функция равна $W_n(S_{n-1},U_n)$.

Целевая функция на i-м шаге имеет вид:

$$W_i(S_{i-1}, U_i) \ (i=1,2,\ldots,n)$$

и называется *функцией Беллмана*

Схема процесса

Целевая функция всего процесса перехода системы из состояния S_0 в состояние S_n:

$$Z(S_0, U) = W_1(S_0, U_1) + W_2(S_1, U_2) . + \ldots + W_n(S_{n-1}, U_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} W_i(S_{i-1}, U_i) \longrightarrow \max\ (\min)$$

Вывод.

Метод динамического программирования состоит в том, что оптимальное управление строится постепенно, этап за этапом.

На каждом промежутке оптимизируется управление только этого этапа.

При этом управление на каждом этапе должно быть оптимальным с точки зрения процесса в целом.

Вопрос 2.

Принцип оптимальности Беллмана.

Метод разбиения задачи на этапы и термин «динамическое программирование» были предложены Беллманом в 1950 годы.

Ричард Эрнст

Беллман (1920-1984)

американский математик, один из ведущих специалистов в области математики и вычислительной техники.

Принцип оптимальности Беллмана

Если вершины A и B лежат на оптимальном пути между вершинами O и X, то часть оптимального пути от O до X между вершинами A и B непременно является оптимальным путем от A до B.

Следствие:

- Чтобы найти оптимальный путь от O до A, достаточно исследовать продолжения к A всех оптимальных путей от вершин, предшествующих A.
- Продолжения неоптимальных путей к предшествующим вершинам можно не просчитывать: они никогда не дадут оптимального пути к A.

В общем виде *принцип оптимальности Беллмана* состоит в том, что на каждом этапе ищется оптимальное продолжение по отношению к состоянию системы, достигнутом ею на предыдущих этапах.

Вопрос 3.

Алгоритм решения задач динамического программирования

Планируя многошаговый процесс, необходимо выбирать управляющее воздействие на каждом шаге с учетом его будущих последствий на еще предстоящих шагах.

Среди всех шагов существует один, который может планироваться без «поправки на будущее".

Это последний шаг, так как после него шагов нет.

Спланировав оптимально последний шаг, к нему пристраивается предпоследний и т.д.

Следовательно, процесс динамического программирования на 1-м этапе разворачивается от конца к началу, то есть сначала планируется последний, N-й шаг.

В процессе оптимизации управления методом динамического программирования многошаговый процесс осуществляется дважды:

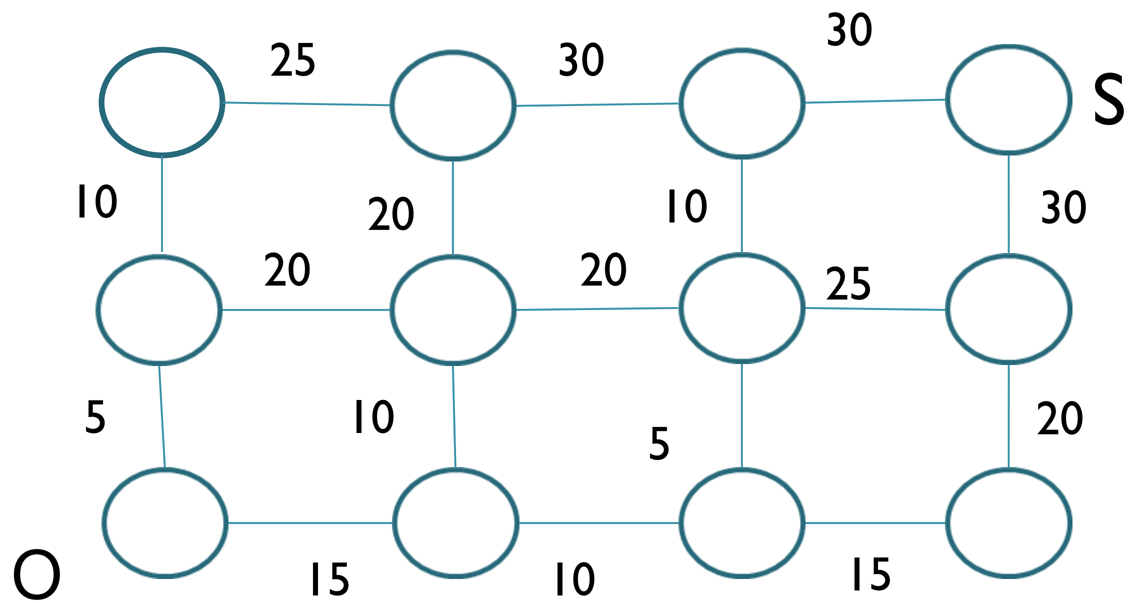
Первый раз - от конца к началу, в результате чего находятся условно оптимальное управление на каждом шаге и оптимальный выигрыш (тоже условный) на всех шагах, начиная с данного и до конца процесса;

Второй раз — от начала к концу, в результате чего находятся оптимальные управления на всех шагах процесса.

Из двух стадий оптимизации несравненно более важной и трудоемкой является первая.

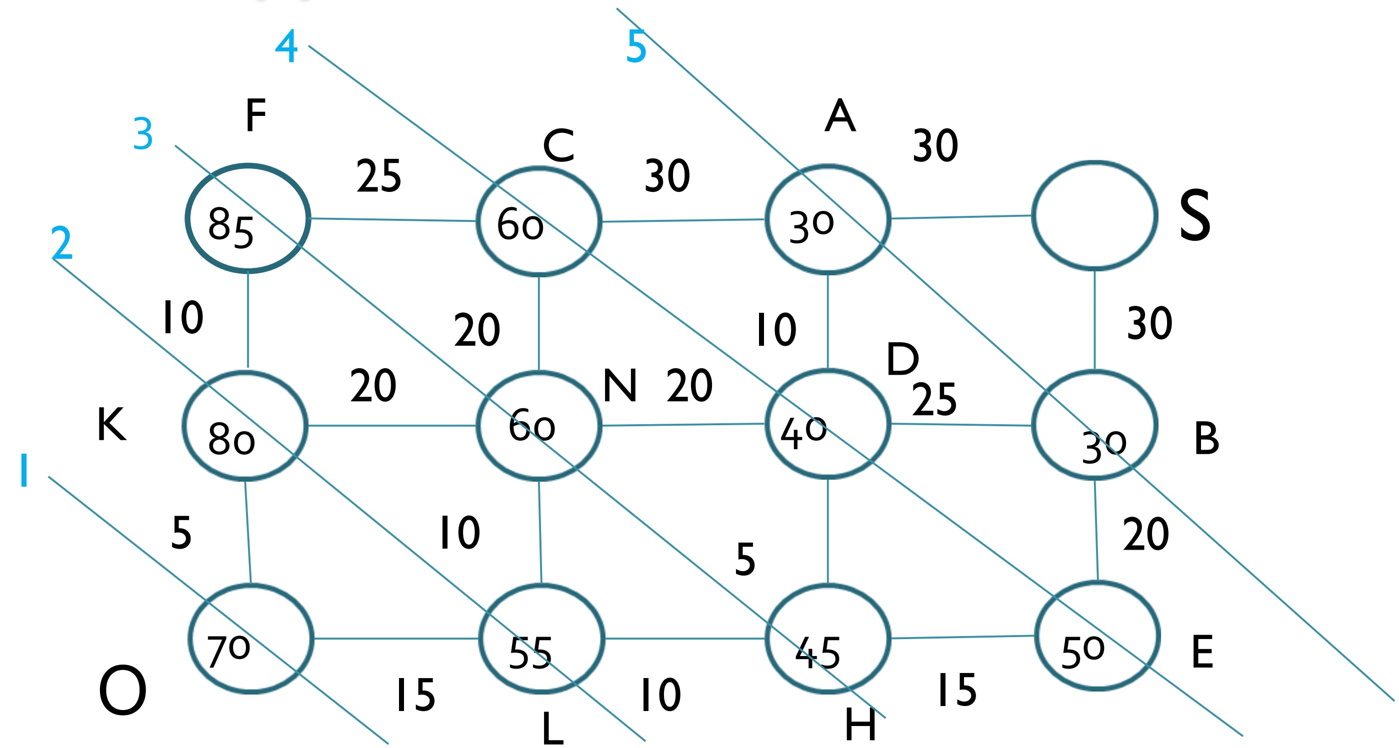
После окончания первой стадии выполнение второй трудности не представляет: остается только "прочесть" рекомендации, уже заготовленные на первой стадии.

Пример 1. Выбор маршрута движения автомобиля



Движение начинается в точке О, завершается в точке S.
Расход горючего (в условных единицах) между перекрестками указан на схеме.
Необходимо найти оптимальный маршрут движения с минимальными расходами горючего.

Пример 1. Выбор маршрута движения автомобиля



Применяется обратный ход. Движение от точки S к точке O. <u>На последнем 5 этапе</u> к точке S можно переместиться из двух точек A и B. Оптимальный условный расход топлива на последнем этапе равен W5(AS)=30 и W5(BS)=30. Впишем их в соответствующие круги.

На предпоследнем (четвертом) этапе имеется 3 варианта:

Из точек C, D или E. Оптимальный условный расход топлива $W_{4,5}$ равен:

- $W_{4,5}(CS)=W_4(CA)+W_5(AS)=30+30=60$
- $W_{4,5}(ES)=W_4(EB)+W_5(BS)=20+30=50$
- $W_{4,5}(DS)=\min\{W_4(DA)+W_5(AS); W_4(DB)+W_5(BS)\}=\min\{40,55\}=40\rightarrow(DA)$

На третьем этапе имеется 3 варианта:

Из точекF ,N и H. Оптимальный условный расход топлива $W_{3,4,5}$ равен:

- $W_{3,4,5}(FS)=W_3(FC)+W_{4,5}(CS)=25+60=85$
- $W_{3,4,5}(NS)=\min\{W_3(NC)+W_{4,5}(CS); W_3(ND)+W_{4,5}(DS)\}=\min\{80,60\}=60\rightarrow(ND)$
- $W_{3,4,5}(HS)=\min\{W_3(HD)+W_{4,5}(DS); W_3(HE)+W_{4,5}(ES)\}=\min\{45,65\}=45\rightarrow(HD)$

На втором этапе имеется 2 варианта:

Из точек K и L. Оптимальный условный расход топлива $W_{2,3,4,5}$ равен:

- $W_{2,3,4,5}(KS)=\min\{W_2(KF)+W_{3,4,5}(FS); W_2(KN)+W_{3,4,5}(NS)\}=\min\{95,80\}=80\rightarrow(KN)$
- $W_{2,3,4,5}(LS)=\min\{W_3(LN)+W_{3,4,5}(NS); W_2(LH)+W_{3,4,5}(HS)\}=\min\{70,55\}=55\rightarrow(LH)$

Первый этап имеет 1 вариант:

Из точки O. Оптимальный условный расход топлива $W_{1,2,3,4,5}$ равен:

- $W_{1,2,3,4,5}(OS)=\min\{W_1(OK)+W_{2,3,4,5}(KS); W_1(OL)+W_{2,3,4,5}(LS)\}=\min\{85,70\}=70\rightarrow(OL)$

Таким образом оптимальный маршрут OLHDAS с минимальным расходом топлива 70 условных единиц.

4 вопрос.

Экономические приложения задач динамического программирования.

Пример 2. Задача о замене оборудования

Формулировка задачи:

Рассматривается плановый период из нескольких лет, в начале которого имеется одно оборудование фиксированного возраста.

В процессе работы оборудование дает ежедневно доход, требует эксплуатационных затрат и имеет остаточную стоимость, причем все перечисленные характеристики зависят от возраста оборудования.

В любой год оборудование можно сохранить или продать по остаточной стоимости и купить вместо нее новое оборудование по известной цене, которая может меняться со временем.

Поэтому, для каждого года в плановом периоде необходимо решить - сохранять имеющееся в этот момент оборудование или продать ее и купить новую с тем, чтобы суммарная прибыль за весь плановый период была максимальной.

Введем следующие обозначения:

t - возраст оборудования: $t = 0, 1, 2, \ldots$,

(t = 0 **-** соответствует использованию нового оборудования, и т. д.);

Z(t) **-** стоимость продукции, производимой за 1 год на оборудование возраста t;

U(t) **-** эксплуатационные затраты за 1 год на оборудование возраста t;

Условные обозначения (продолжение)

S(t) - остаточная стоимость оборудования возраста t;

T - текущее время в плановом периоде;

P(T) - цена новой оборудования в году T (может меняться со временем; для упрощения будем считать неизменной);

$\mathbf{t_0}$ - начальный возраст оборудования;

N - длина планового периода.

Для принятия решения необходимо вычислить функцию Беллмана , которая в данном случае имеет вид:

$$f_1 = \max \begin{cases} Z(t) - U(t) \\ S(t) - P + Z(0) - U(0) \end{cases}$$

Предположим, что с конца планового периода остается n+1 год; в распоряжении имеется оборудование возраста t и необходимо найти оптимальную политику для периода длиной n + 1 год.

В случае сохранения оборудования доход за рассматриваемый период определяется выражением:

$$Z(t) - U(t) + \mathrm{f_n}(t+1)$$

В случае замены оборудования аналогичной функция примет вид:

$$S(t) - P + Z(0) - U(0) + \mathrm{f_n}(1)$$

Пусть функции Z(t), U(t) и значения Δ = Z(t)-U(t) заданы в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Z(t)	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15
U(t)	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15
Δ	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Для упрощения расчетов примем следующие условия:

- Оборудование возраста свыше 10 лет использовать невыгодно;
- остаточная стоимость равна нулю ($S(t)=0$);
- цена нового оборудования со временем не меняется и равна 10 условным единицам ($P=10$) ;
- длина планового периода равна 10 годам ($N=10$).

Упростим выражение, с учетом известных факторов:

В случае замены оборудования уравнение примет вид

$$S(t)-P+Z(0)-U(0)+f_n(1) = 0-10+20-10+f_n(1) = f_n(1)$$

Тогда формулы принимают вид:

$$f_{n+1} = \max \begin{cases} Z(t) - U(t) + f_n(t+1), \\ f_n(1), \end{cases}$$

Таблица 2 – Расчет срока замены оборудования

t / $f_n(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(t)$											
$f_2(t)$											
$f_3(t)$											
$f_4(t)$											
$f_5(t)$											
$f_6(t)$											
$f_7(t)$											
$f_8(t)$											
$f_9(t)$											
$f_{10}(t)$											

Заполнение таблицы будем производить по строкам: сначала заполним первую строку, потом вторую и т.д.

Первая строка таблицы 2 совпадает с последней строкой таблицы 1.

Таблица 2 – Расчет срока замены оборудования

t / $f_n(t)$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$f_2(t)$											
$f_3(t)$											
$f_4(t)$											
$f_5(t)$											
$f_6(t)$											
$f_7(t)$											
$f_8(t)$											
$f_9(t)$											
$f_{10}(t)$											

Заполним вторую строку:

$$f_2(0) = max\begin{cases} Z(0) - U(0) + f_1(1) \\ f_n(1) \end{cases}$$

$$= max\begin{cases} 10 + 9 \\ 9 \end{cases} = 19$$, сохранение оборудования,

$$\mathrm{f}_2(1) = max\begin{cases} Z(1) - U(1) + f_1(2) \\ f_1(1) \end{cases}$$

$$= max\begin{cases} 9+8 \\ 9 \end{cases} = 17,$$ сохранение оборудования,

$$\mathrm{f}_2(5) = max\begin{cases} Z(5) - U(5) + f_1(6) \\ f_1(1) \end{cases}$$

$$= max\begin{cases} 5+4 \\ 9 \end{cases} = 9,$$ сохранение оборудования.

$$\mathrm{f}_2(6) = max\begin{cases} Z(6) - U(6) + f_1(7) \\ f_1(1) \end{cases}$$

$$= max\begin{cases} 4+3 \\ 9 \end{cases} = 9,$$ **замена оборудования**

Таблица 2 – Расчет срока замены оборудования

t / $f_n(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9	9	9	9	9
$f_3(t)$											
$f_4(t)$											
$f_5(t)$											
$f_6(t)$											
$f_7(t)$											
$f_8(t)$											
$f_9(t)$											
$f_{10}(t)$											

Таблица 2 – Расчет срока замены оборудования

t / $f_2(0)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9	9	9	9	9
$f_3(t)$	27	24	21	18	17	17	17	17	17	17	17
$f_4(t)$	34	30	26	24	24	24	24	24	24	24	24
$f_5(t)$	40	35	32	31	30	30	30	30	30	30	30
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35	35	35	35	35	35
$f_7(t)$	51	48	45	43	41	41	41	41	41	41	41
$f_8(t)$	58	54	51	48	48	48	48	48	48	48	48
$f_9(t)$	64	60	56	55	54	54	54	54	54	54	54
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60	60	60	60	60	60	60

В рассмотренной задаче число возможных решений, принимаемых ежегодно, равно двум (сохранить оборудование или заменить).

На практике часто применяют решение о покупке ненового оборудования; в этом случае необходимо включить в число возможных решений решение: заменить имеющееся оборудование возраста t на оборудование возраста $t_n<5$ (на старую заменять не выгодно).

В этом случае формулы существенно усложняются.

Динамическое программирование позволяет учесть все решения, которые вызывают практический интерес.