**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФГОУ ВПО «Пензенская ГСХА»**

# ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

## ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

**Учебное пособие
для студентов инженерных специальностей**

**Пенза 2009**

УДК 517(075)
ББК 22.161(я7)
П 69

Рецензенты: доктор технических наук, профессор Пензенского государственного университета архитектуры и строительства А. М. Данилов; доцент кафедры информатики Пензенской государственной сельскохозяйственной академии Н. В. Учаева.

Печатается по решению методической комиссии инженерного факультета Пензенской ГСХА от 30 марта 2009 г., протокол № 7.

П 69 Практикум по математике. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия: учебное пособие / В. А. Мачнев, Н. А. Кривошеева, Т. Г. Федина [и др.] – Пенза: РИО ПГСХА, 2009. – 183 с.

Учебное пособие предназначено для студентов инженерного факультета специальностей: 110301 – Механизация сельского хозяйства, 110303 – Механизация переработки сельскохозяйственной продукции, 110304 – Технология обслуживания и ремонта машин в АПК, 190601 – Автомобили и автомобильное хозяйство.

Учебное пособие содержит краткие теоретические сведения по основным разделам курса линейной алгебры и аналитической геометрии, решения типовых задач, задания для самостоятельного решения, что позволяет его использовать для аудиторных занятий и самостоятельной работы студентов.

# ПРЕДИСЛОВИЕ

В начале обучения в вузе студенты инженерных специальностей изучают курс математики, который служит фундаментальной базой инженерного образования. Для освоения общетехнических дисциплин, в том числе теоретической механики, студенты должны знать и уметь применять основные положения курса линейной алгебры и аналитической геометрии. Во всех разделах курса механики, начиная со статики, широко используется векторная алгебра и аналитическая геометрия. Для решения задач по механике необходимо уметь вычислять проекции векторов на координатные оси, находить геометрически и аналитически сумму векторов, определять скалярное и векторное произведение векторов, знать и применять свойства произведений векторов. Также надо уметь пользоваться прямоугольной декартовой системой координат на плоскости и в пространстве, составлять и преобразовывать уравнение линии на плоскости, определять вид линии по её уравнению и т. д.

Учебное пособие предназначено для студентов инженерных специальностей: 110301 – Механизация сельского хозяйства, 110303 – Механизация переработки сельскохозяйственной продукции, 110304 – Технология обслуживания и ремонта машин в АПК, 190601 – Автомобили и автомобильное хозяйство.

Пособие состоит из пяти разделов: «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия на плоскости», «Векторная алгебра», «Аналитическая геометрия в пространстве» и «Задания для самостоятельного решения». Первые четыре раздела имеют деление на пункты. В начале каждого пункта приведены краткие теоретические сведения (определения, формулы, признаки и т. п.), необходимые для решения задач. Далее рассматриваются решения типовых примеров. Затем предлагаются вопросы для самопроверки и задания, снабженные ответами.

Пятый раздел включает двенадцать заданий для самостоятельного решения, которые могут быть использованы в качестве типовых расчетных заданий.

При подготовке заданий практикума были использованы пособия, указанные в списке литературы. Часть заданий составлена авторами специально для пособия.

В состав учебного пособия входят приложения, содержащие примеры решения некоторых задач линейной алгебры с помощью программы «MathCAD» и приложения «Excel».

Материал практикума предоставляет возможность студентам самостоятельно освоить основные положения курса линейной алгебры и аналитической геометрии, приобрести и закрепить практические навыки решения задач. Изучать материал каждого пункта рекомендуется в следующем порядке:

- ознакомиться с краткими теоретическими сведениями;
- разобрать решения типовых примеров, что позволит не только сформировать навыки решения задач, но и лучше усвоить теоретический материал;
- ответить на вопросы для самопроверки;
- выполнить задания, снабженные ответами.

При выполнении заданий для самостоятельной работы из пятого раздела следует обратить внимание на указания, которые помогут выбрать метод, оформить и проверить решение.

По мнению авторов целесообразно использовать учебное пособие постоянно, как на аудиторных занятиях, так и для самостоятельной работы.

# 1 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

## 1.1 Определители

***Определителем второго порядка*** называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (1.1)$$

Определитель второго порядка равен разности произведения элементов, стоящих на главной диагонали, и произведения элементов, стоящих на побочной диагонали.

***Определителем третьего порядка*** называется число, которое вычисляется по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \qquad (1.2)$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме, состоящей из шести слагаемых, в каждое из которых входит по одному элементу из каждой строки и каждого столбца; знак слагаемого определяется по ***правилу «треугольников»*** (по правилу Сарруса):

● со знаком «+» берутся слагаемые, которые являются произведениями элементов, находящихся на главной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали;

● со знаком «–» – слагаемые, которые являются произведениями элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах треугольников с основаниями, параллельными побочной диагонали.

Знаки, с которыми слагаемые входят в формулу (1.2), легко запомнить, пользуясь схемой (*рисунок 1.1*):

*Рисунок 1.1*

Рассмотрим определитель $n$-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

где $a_{ij}$ – элемент определителя, $i, j = \overline{1, n}$.

***Минором*** $M_{ij}$ элемента $a_{ij}$ определителя $n$-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится элемент.

***Алгебраическим дополнением*** $A_{ij}$ элемента $a_{ij}$ называется произведение $(-1)^{i+j}$ на минор этого элемента, т. е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}. \qquad (1.3)$$

Для вычисления определителей выше третьего порядка применяется теорема Лапласа.

***Теорема Лапласа.*** Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Рассмотрим применение теоремы Лапласа:

● разложение определителя $n$-го порядка по $i$-ой строке имеет вид

$$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}; \qquad i = \overline{1, n}.$$

● разложение определителя по $j$-му столбцу

$$\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}; \quad j = \overline{1,\, n}.$$

Теорема Лапласа позволяет свести вычисление определителя $n$-го порядка к вычислению определителей ($n$–1)-го порядка. При этом выбирают для разложения такую строку (столбец), в которой наибольшее количество нулевых элементов.

***Определитель треугольного вида*** равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

## Основные свойства определителей

1. При замене строк столбцами с сохранением порядка (транспонировании) определитель не меняется.

2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

3. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

4. Если все элементы любой строки (столбца) равны нулю, то определитель равен нулю.

5. Если соответствующие элементы любых двух строк (столбцов) равны, то определитель равен нулю.

6. Если элементы любых двух строк (столбцов) пропорциональны, то определитель равен нулю.

7. Определитель не изменится, если к элементам любой строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число.

Вычисление определителя можно упростить, если предварительно, используя свойства определителей, преобразовать заданный определитель так, чтобы все его элементы в выбранной строке или столбце, кроме одного, были равны нулю. В качестве такого опорного элемента выбирают обычно 1 или –1, или элемент, являющийся делителем всех элементов выбранной строки или столбца.

**Пример 1.1.** Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

**Решение.**

Вычислим определитель по формуле (1.1):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7.$$

**Пример 1.2.** Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

**Решение.**

Определитель вычисляется по формуле (1.2). Запоминать эту формулу не следует, достаточно применить «правило треугольников».

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 2(-4)(-3) + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot (-1) - 1 \cdot (-4)(-1) -$$

$$-1 \cdot 3 \cdot (-3) - 0 \cdot 2 \cdot 2 = 24 + 2 - 4 + 9 = 31.$$

**Пример 1.3.** Вычислить определитель по теореме Лапласа:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}.$$

**Решение.**

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\Delta = 4 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + (-1) \cdot A_{13} =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-10 - (-3)) - 2 \cdot (5 - 6) - (-1 - (-4)) = -29.$$

**Пример 1.4.** Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

**Решение.**

Разложим определитель по элементам третьей строки:

$\Delta = (-1) \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 2 \cdot A_{33} + 0 \cdot A_{34} =$

$$= (-1) \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -[-1 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 0 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 \cdot 1] +$$

$$+ 2 \cdot [1 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 4 \cdot 4 \cdot 2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 1] =$$

$$= -(1 + 6 + 8 - 9) + 2(3 + 32 - 12 + 4) = -6 + 2 \cdot 27 = 48.$$

**Пример 1.5.** Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix}.$$

**Решение.**

Выберем первый столбец, возьмем в качестве опорного элемента $a_{31} = 1$.

Преобразуем определитель так, чтобы все остальные элементы первого столбца были равны нулю. Для этого элементы третьей строки умножим на (– 3) и прибавим к соответствующим элементам первой строки, элементы третьей строки умножим на 2 и прибавим к соответствующим элементам второй строки; затем элементы третьей строки умножим на (– 5) и прибавим к соответствующим элементам четвертой строки. Затем разложим определитель по элементам первого столбца.

Получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} \times(-3)+ \quad \times 2+ \quad \times(-5)+ \quad =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -20 & -4 & -13 \\ 0 & 18 & 1 & 10 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 0 & -32 & -14 & -22 \end{vmatrix} = 1\cdot A_{31} = (-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} -20 & -4 & -13 \\ 18 & 1 & 10 \\ -32 & -14 & -22 \end{vmatrix}.$$

Заметим, что общим множителем элементов третьей строки является число (–2), вынесем его за знак определителя.

Получим

$$\Delta = -2\cdot \begin{vmatrix} -20 & -4 & -13 \\ 18 & 1 & 10 \\ 16 & 7 & 11 \end{vmatrix}.$$

Вынесем общий множитель первого столбца (число 2) за знак определителя:

$$\Delta = -4\cdot \begin{vmatrix} -10 & -4 & -13 \\ 9 & 1 & 10 \\ 8 & 7 & 11 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка вычислим по правилу треугольников:

$$\Delta = -4\cdot(-10\cdot 1\cdot 11 + (-4)\cdot 10\cdot 8 + 9\cdot 7\cdot(-13) - 8\cdot 1\cdot(-13) -$$

$$-7\cdot 10\cdot(-10) - 9\cdot(-4)\cdot 11) = -4(-110 - 320 - 829 + 104 +$$

$$+700 + 396) = -4\cdot(-49) = 196.$$

Заметим, что с распространением персональных компьютеров и современных программных средств (электронная таблица «Excel», «MathCAD» и др.) вычисление определителей перестало быть трудоемким. Примеры вычисления определителей приведены в приложениях А и Б.

## Вопросы

1. Что называется определителем 2-го порядка?
2. Что называется определителем 3-го порядка?
3. Что называется минором элемента определителя?
4. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
5. Сформулируйте теорему Лапласа.
6. Чему равен определитель треугольного вида?
7. Каковы свойства определителей?
8. Каким образом свойства определителей применяются к их вычислению?

## Задания

**1.** Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

Ответ. а) 9;

б) $-\cos 2\alpha$.

**2.** Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$

Ответ. а) −81; б) 0.

**3.** Вычислить миноры $M_{11}$, $M_{23}$ и алгебраическое дополнение $A_{12}$ для определителя:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 7 \\ 1 & -1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Ответ. $M_{11} = -23$, $M_{23} = -7$, $A_{12} = -5$.

**4.** Вычислить определитель, разложив его по элементам первого столбца:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ответ. 30.

**5.** Преобразовать и вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & -3 \\ -2 & -3 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} ax & a^2 + x^2 & 1 \\ ay & a^2 + y^2 & 1 \\ az & a^2 + z^2 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ. а) −48; б) $a(x - z)(x - y)(z - y)$.

**6.** Решить уравнение:

а) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} x^2 & 3 & 2 \\ x & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$.

Ответ. а) 2; 3; б) 0; −2.

**7.** Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \\ 4 & -4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}$.

Ответ. а) 34; б) −24.

## 1.2 Матрицы

### 1.2.1 Матрицы и операции над ними

***Матрицей*** размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая $m$ строк и $n$ столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица называется ***квадратной*** $n$-го порядка, если число ее строк равно числу столбцов и равно $n$.

***Единичной*** матрицей называется квадратная матрица, у которой элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а остальные элементы равны нулю:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

***Произведением*** матрицы $A$ на действительное число $\lambda$ называется матрица $B = \lambda \cdot A$, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы А на число $\lambda$, т. е.

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \ (i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}).$$

***Суммой*** двух матриц $A$ и $B$ одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица $C=A+B$ той же размерности, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $A$ и $B$, т. е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \ (i = \overline{1,m}; \ j = \overline{1,n}).$$

***Произведением*** матрицы $A$ размерности $m \times p$ и матрицы $B$ размерности $p \times n$ называется матрица $C$ размерности $m \times n$, каждый элемент которой $c_{ij}$ равен сумме произведений элементов $i$-ой строки матрицы $A$ на соответствующие элементы $j$-го столбца матрицы $B$, т. е.

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj}, \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Из определения произведения матриц следует, что умножение матриц *A* и *B* возможно, если число столбцов матрицы *A* равно числу строк матрицы *B*.

Операции над матрицами обладают свойствами, аналогичными операциям над числами, при этом роль единицы выполняет единичная матрица *E*, роль нуля – нулевая матрица *0* (все элементы которой – нули).

Однако, произведение матриц некоммутативно:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

**Пример 1.6.** Найти матрицу $C = 4A - 3B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Размерность матрицы *A* составляет $2 \times 3$, размерность матрицы *B* – $2 \times 3$. Так как размерности матриц *A* и *B* совпадают, то существует их линейная комбинация – матрица $C = 4A - 3B$, размерность которой составит также $2 \times 3$. Элементы матрицы *C* найдем, умножая элементы матрицы *A* на 4 и складывая с соответствующими элементами матрицы *B*, умноженными на (−3):

$$C = \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 & 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 1 & 4 \cdot 3 + (-3) \cdot 0 \\ 4 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 & 4 \cdot 4 + (-3) \cdot (-2) & 4 \cdot (-2) + (-3) \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 5 & 12 \\ -1 & 22 & -11 \end{pmatrix}.$$

**Пример 1.7.** Найти произведение матриц *A*·*B*, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Решение**.

Размерность матрицы $A$ составляет $2\times 3$, размерность матрицы $B$ – $3\times 2$. Произведение матриц $A$ и $B$ существует, так как число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. В результате умножения матриц $A$ и $B$ получится матрица $C$ размерности $2\times 2$. Элементы матрицы $C$ вычислим по определению произведения матриц:

- элемент $c_{11}$ найдем как сумму произведений соответствующих элементов 1 строки матрицы $A$ и 1 столбца матрицы $B$:

$$c_{11} = (4 \quad 2 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot(-4) = 10;$$

- элемент $c_{21}$ найдем как сумму произведений соответствующих элементов 2 строки матрицы $A$ и 1 столбца матрицы $B$:

$$c_{21} = (-1 \quad 0 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = -1\cdot 2 + 0\cdot 3 + 2\cdot(-4) = -10;$$

- элемент $c_{12}$ найдем как сумму произведений соответствующих элементов 1 строки матрицы $A$ и 2 столбца матрицы $B$:

$$c_{12} = (4 \quad 2 \quad 1)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = 4\cdot(-1) + 2\cdot 5 + 1\cdot(-1) = 5;$$

- элемент $c_{22}$ найдем как сумму произведений соответствующих элементов 2 строки матрицы $A$ и 2 столбца матрицы $B$:

$$c_{22} = (-1 \quad 0 \quad 2)\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\cdot(-1) + 0\cdot 5 + 2\cdot(-1) = -1.$$

Таким образом,

$$C=\begin{pmatrix}10 & 5\\ -10 & -1\end{pmatrix}.$$

Нахождение произведения матриц $A$ и $B$ может быть оформлено иначе, не выписывая вычисления элементов матрицы $C$. Чтобы не ошибиться в записи сумм произведений элементов матриц, под матрицей $A$ подписывают сначала первый столбец матрицы $B$, записывают первый столбец матрицы-произведения $C$, затем подписывают второй столбец матрицы $B$ и записывают второй столбец матрицы $C$.

$$C = AB = \begin{array}{c}\underline{\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}}\\ \begin{matrix}2 & 3 & -4\\ -1 & 5 & -1\end{matrix}\end{array}\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\\ -4 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4\cdot 2+2\cdot 3+1\cdot(-4) & 4(-1)+2\cdot 5+1(-1)\\ (-1)\cdot 2+0\cdot 3+2\cdot(-4) & (-1)(-1)+0\cdot 5+2\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10 & 5\\ -10 & -1\end{pmatrix}.$$

Отметим, что операции над матрицами можно выполнять, используя электронную таблицу «Excel» или «MathCAD» (см. приложения А и Б).

### 1.2.2 Обратная матрица

Матрица $A^{-1}$ называется ***обратной*** к квадратной матрице $A$, если их произведение равно единичной матрице $E$:

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E\,.$$

Матрица $A^{*}$ называется ***присоединенной*** к матрице $A$, если она получена из матрицы $A$ путем замены ее элементов на их алгебраические дополнения с последующим транспонированием, т. е.

$$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}, \qquad (1.4)$$

где $A_{ij}$ – алгебраические дополнения элементов $a_{ij}$, $i, j = \overline{1, n}$.

***Теорема* (*необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы*).** Для того, чтобы квадратная матрица $A$ имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденная, т. е. $|A| \neq 0$.

Если обратная матрица существует, то она единственная.

Обратную матрицу находят, используя формулу

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{*}. \tag{1.5}$$

**Пример 1.8.** Найти обратную матрицу к матрице $A$ и выполнить проверку.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Найдем определитель матрицы $A$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$$

Следовательно, матрица $A$ имеет обратную. Для нахождения обратной матрицы воспользуемся формулой (1.5)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^{*},$$

где $A^{*}$ определяется по формуле (1.4)

$$A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы $A$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 1 = 2,$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-(-1-(-2))=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-1-(-6)=5,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-(0-2)=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=4-(-4)=8,$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}4 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-(4-0)=-4,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=0-6=-6,$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-(4-(-2))=-6,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 3\end{vmatrix}=12.$$

Получим:

$$A^*=\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 8 & -6\\ 5 & -4 & 12\end{pmatrix}$$ – присоединенная матрица,

$$A^{-1}=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 8 & -6\\ 5 & -4 & 12\end{pmatrix}$$ – обратная матрица.

Выполним проверку:

$$A^{-1}A=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}2 & 2 & -6\\ -1 & 8 & -6\\ 5 & -4 & 12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$
=\frac{1}{18}\cdot\begin{pmatrix} 8-2+12 & 0+6-6 & 4+2-6 \\ -4-8+12 & 0+24-6 & -2+8-6 \\ 20+4-24 & 0-12+12 & 10-4+12 \end{pmatrix}=
$$

$$
=\frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.
$$

Таким образом, $A^{-1}\cdot A=E.$ Обратная матрица найдена верно.

В приложениях А и Б приведены примеры вычисления обратной матрицы с помощью программы «MathCAD» и приложения «Excel».

### 1.2.3 Ранг матрицы

***Минором k-го порядка*** матрицы $A$ называется определитель, элементами которого являются элементы матрицы, стоящие на пересечении любых ее $k$ строк и $k$ столбцов.

***Рангом*** матрицы $A$ называется наивысший порядок $r$ отличных от нуля миноров матрицы. Обозначается $r(A)=r$.

Матрица называется ***ступенчатой***, если все элементы матрицы, стоящие под главной диагональю, равны нулю, а элементы главной диагонали отличны от нуля, т. е.

$$
C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_{rr} & \dots & c_{rn} \end{pmatrix},
$$

где $c_{ii}\neq 0,\ i=\overline{1,r}$.

***Теорема.*** Ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк:

$$
r(C)=r.
$$

### Элементарные преобразования матрицы

1. Перестановка двух строк (столбцов).

2. Умножение элементов какой-либо строки (столбца) на число, отличное от нуля.

3. Сложение элементов какой-либо строки (столбца) с соответствующими элементами другой строки (столбца), умноженными на некоторое число.

4. Отбрасывание нулевой строки (столбца).

***Теорема.*** При элементарных преобразованиях и транспонировании матрицы (замене строк столбцами) ранг матрицы не меняется.

Значит, ранг матрицы равен рангу ступенчатой матрицы, полученной из данной с помощью элементарных преобразований и транспонирования. Это свойство применяется при его нахождении ранга матрицы.

**Пример 1.9.** Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Приведем матрицу $A$ к ступенчатому виду. Поменяем местами 1 и 2 строки, чтобы первый диагональный элемент был равен 1:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Получим нули в первом столбце под первым элементом. Для этого элементы 1-й строки умножим на (–4) и прибавим к соответствующим элементам 2-й строки, элементы 1-й строки умножим на (–5) и прибавим к элементам 3-й строки, элементы 1-й строки умножим на (–3) и прибавим к элементам 4-й строки:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 4 & 2 & -1 & 0\\ 5 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 5 & -3 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\times(-4)+ & \times(-5)+ & \times(-3)+\end{matrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 14 & -9 & -4\\ 0 & 19 & -7 & -3\\ 0 & 14 & -9 & -4\end{pmatrix}.$$

Получим нули во втором столбце под вторым элементом. Для этого элементы второй строки умножим на $\left(-\frac{19}{14}\right)$ и прибавим к элементам 3-й строки, элементы 2-й строки умножим на $(-1)$ и прибавим к элементам 4-й строки:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 14 & -9 & -4\\ 0 & 19 & -7 & -3\\ 0 & 14 & -9 & -4\end{pmatrix}\begin{matrix}\times\left(-\frac{19}{14}\right)+ & \times(-1)+\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 14 & -9 & -4\\ 0 & 0 & \frac{73}{14} & \frac{34}{14}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отбрасываем нулевую строку и получаем ступенчатую матрицу:

$$A\sim\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 1\\ 0 & 14 & -9 & -4\\ 0 & 0 & \frac{73}{14} & \frac{17}{7}\end{pmatrix}.$$

Так как при преобразовании матрицы $A$ к ступенчатому виду использовались только элементарные преобразования, то ранг матрицы $A$ равен рангу ступенчатой матрицы, т. е. числу ее ненулевых строк:

$$r(A)=3.$$

Пример нахождения ранга матрицы в «MathCAD» приведен в приложении А.

## Вопросы

1. Что такое матрица?
2. Что представляет собой произведение матрицы на число?
3. Что называется суммой матриц?
4. Сформулируйте определение произведения двух матриц.
5. Какая матрица называется обратной?
6. Какая матрица называется присоединенной к данной?
7. Какая матрица называется невырожденной?
8. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы.
9. Что называется минором $k$-го порядка матрицы?
10. Что называется рангом матрицы?
11. Какие преобразования матрицы не ведут к изменению ранга?
12. Какая матрица называется ступенчатой?
13. Чему равен ранг ступенчатой матрицы?
14. Как найти ранг матрицы?

## Задания

**1.** Вычислить 3A+2B, если
$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ -6 & 7 & -8 \end{pmatrix}$.

**2.** Вычислить произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -9 & -10 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 33 \\ 15 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 27 & 20 \\ 17 & 40 \end{pmatrix}$.

**3.** Убедиться, что произведение матриц $A$ и $B$ некоммутативное:

$$A=\begin{pmatrix}5 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 8\\ 1 & 5 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & 4 & -2\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $AB=\begin{pmatrix}20 & 20 & 4\\ 26 & 36 & 22\\ 15 & 26 & -3\end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix}24 & 17 & 21\\ 24 & 6 & 30\\ 16 & 23 & 23\end{pmatrix}$.

**4.** Вычислить произведение матриц:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 1 & 5 & 3\\ 1 & 3 & -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\ -2\\ 4\\ 5\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}26\\ 45\\ 3\end{pmatrix}$.

**5.** Доказать, что матрица $A^{-1}$ является обратной для матрицы $A$:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -5\\ -18 & 1 & 24\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -6\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

**6.** Найти обратную матрицу $A^{-1}$ для матрицы $A$:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 6\\ 1 & 4 & 10\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 7 & 3\\ 3 & 9 & 4\\ 1 & 5 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ: а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}6 & -8 & 3\\ -4 & 7 & -3\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$; б) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3}\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

**7.** Вычислить ранг матрицы:

а) $A=\begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 & 15 \\ 5 & -3 & 2 & 15 \\ 10 & -11 & 5 & 36 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 3 & 15 & -9 \\ 5 & 5 & -7 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & -3 \\ 2 & 5 & -6 & -1 \\ 3 & 12 & -17 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $r(A) = 3$; б) $r(A) = 2$; в) $r(A) = 3$; г) $r(A) = 3$.

## 1.3 Системы линейных уравнений

### 1.3.1 Матричный метод решения систем линейных уравнений. Формулы Крамера

Рассмотрим ***систему n линейных уравнений с n неизвестными***:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.6}$$

***Матрицей системы*** называется матрица, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ . \; . & . \; . & . \; . & . \; . \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы системы $\Delta = |A|$ называется ***определителем системы***.

***Матрица-столбец неизвестных*** $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

***Матрица-столбец свободных членов*** $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}$.

Систему линейных уравнений (1.6) можно записать в ***матричной форме*** следующим образом:

$$A \cdot X = B \,. \tag{1.7}$$

***Теорема.*** Если определитель системы $n$ линейных уравнений с $n$ неизвестными отличен от нуля, т. е. $\Delta = |A| \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое определяется:

1) ***матричным методом*** по формуле

$$X = A^{-1} \cdot B \;; \tag{1.8}$$

2) по ***формулам Крамера***:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j = \overline{1, n}, \tag{1.9}$$

где $\Delta$ – определитель системы, $\Delta_j$ – определитель, полученный из определителя $\Delta$ путем замены $j$-го столбца столбцом свободных членов.

**Пример 1.10.** Решить систему уравнений матричным методом:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -7 \;. \end{cases}$$

**Решение.**

Найдем определитель системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18 \neq 0.$$

Следовательно, матрица $A$ имеет обратную. Воспользуемся результатом **примера 1.8**:

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 8 & -6 \\ 5 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Используя (1.3.3), получим

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 8 & -6 \\ 5 & -4 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 2\cdot 8 + 2\cdot(-2) + (-6)\cdot(-7) \\ -1\cdot 8 + 8\cdot(-2) + (-6)\cdot(-7) \\ 5\cdot 8 + (-4)\cdot(-2) + 12\cdot(-7) \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 54 \\ 18 \\ -36 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$.

**Пример 1.11.** Решить систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_3 = 8, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -2, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -7\ . \end{cases}$$

**Решение.**

Определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 18 \neq 0\ .$$

Следовательно, система имеет единственное решение.

Найдем вспомогательные определители (опустим промежуточные вычисления):

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 54, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 8 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 18,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 8 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -7 \end{vmatrix} = -36.$$

По формулам Крамера (1.9) получаем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{54}{18} = 3, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-36}{18} = -2.$$

Матричный метод и вычисления по формулам Крамера являются достаточно трудоемкими методами решения систем линейных уравнений. Электронная таблица «Excel» и «MathCAD» позволяют упростить применение этих методов, избавляя пользователя от вычислительной работы (см. приложения А и Б).

## 1.3.2 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим ***систему m линейных уравнений с n неизвестными***:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1\ , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2\ , \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m\ . \end{cases} \tag{1.10}$$

***Матрица системы*** $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$.

Матрица $\overline{A}$, полученная из матрицы $A$ добавлением столбца свободных членов, называется ***расширенной матрицей системы*** линейных уравнений:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Система уравнений называется ***совместной***, если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется ***определенной***, если она имеет единственное решение, и ***неопределенной***, если имеет более одного решения.

В случае неопределенности системы каждое ее решение называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением***.

Две системы называются ***эквивалентными*** (равносильными), если их решения совпадают. Эквивалентные системы получаются при элементарных преобразованиях системы (аналогичны элементарным преобразованиям строк расширенной матрицы системы).

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности системы линейных уравнений дает теорема Кронекера-Капелли.

***Теорема Кронекера-Капелли***. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы $r(A)$ равен рангу расширенной матрицы системы $r(\overline{A})$.

Следующие теоремы позволяют определить число решений совместной системы линейных уравнений.

***Теорема* (*условие определенности СЛУ*).** Если ранг матрицы $r(A)$ совместной системы линейных уравнений равен числу неизвестных $n$, то система определенная.

***Теорема* (*условие неопределенности СЛУ*).** Если ранг матрицы совместной системы $r(A)$ меньше числа неизвестных $n$, то система неопределенная.

Исследование системы линейных уравнений можно представить в виде схемы (*рисунок 1.2*).

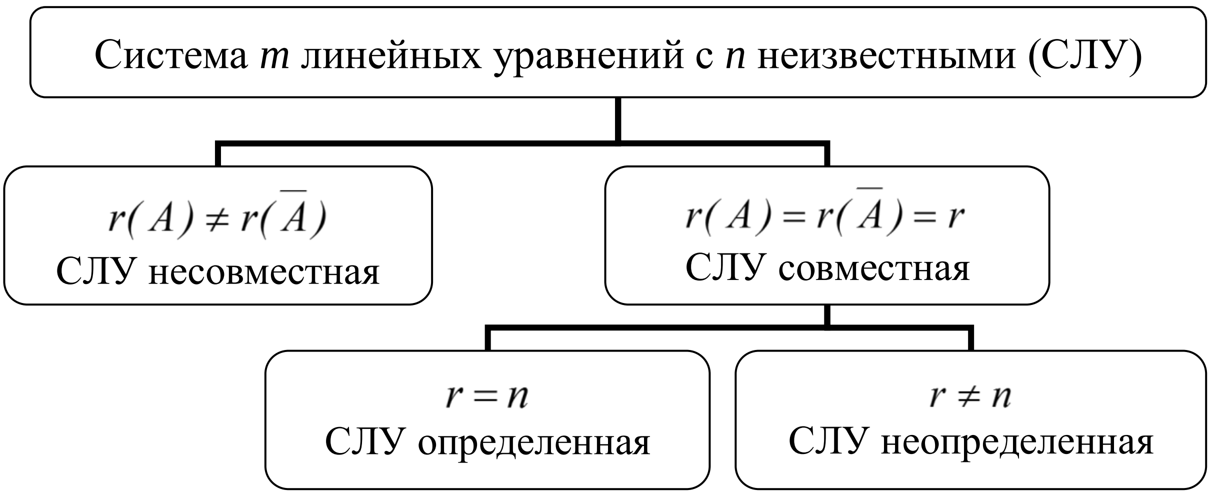



*Рисунок 1.2*

В случае неопределенности системы $(r < n)$ среди неизвестных можно выделить основные и неосновные.

***Основными*** (***базисными***) неизвестными называются $r$ неизвестных, если определитель из коэффициентов при них (т. е.

базисный минор) отличен от нуля. Остальные $(n-r)$ неизвестных называются ***неосновными*** (***свободными***).

***Метод Гаусса*** решения систем линейных уравнений состоит из двух этапов.

***Первый этап*** **(*прямой ход*).** Составить расширенную матрицу системы $\overline{A}$ . Привести ее к ступенчатому виду, используя элементарные преобразования строк матрицы системы.

На данном этапе целесообразно определить ранги матрицы системы и расширенной матрицы, а затем сделать вывод о совместности или несовместности системы по теореме Кронекера-Капелли. Если система совместна, то определить число решений на основании условий определенности и неопределенности.

***Второй этап*** **(*обратный ход*).** Перейти от ступенчатой матрицы к системе уравнений и решить ее.

В случае неопределенной системы требуется найти общее решение. Сначала необходимо определить, какие переменные являются базисными, а какие – свободными, затем выразить базисные переменные через свободные.

**Пример 1.12.** Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -5. \end{cases}$$

**Решение.**

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

Поменяем местами 1 и 4 строки.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \times(-4)+ \quad + \quad \times(-2)+ \\ \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -14 & 5 & 2 & 25 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & -5 & -1 & 3 & 13 \end{array}\right)\sim$$

Поменяем местами 2 и 4 строки.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -5 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & -7 \\ 0 & -14 & 5 & 2 & 25 \end{array}\right)\sim$$

Поменяем местами 2 и 3 столбцы.

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & 13 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 5 & -14 & 2 & 25 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \times(-3)+ \quad \times 5+ \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 19 & -9 & -46 \\ 0 & 0 & -39 & 17 & 90 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \times\frac{39}{19}+ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 19 & -9 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{28}{19} & -\frac{84}{19} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ \times\left(-\frac{19}{28}\right) \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 19 & -9 & -46 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

$r(A)=r(\overline{A})=4 \Rightarrow$система совместная.

$n=r=4 \Rightarrow$ система определенная.

Вернемся от ступенчатой матрицы к системе уравнений и найдем неизвестные, начиная с последнего уравнения:

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_2 - x_4 = -5, \\ -x_3 - 5x_2 + 3x_4 = 13, \\ 19x_2 - 9x_4 = -46, \\ x_4 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_2 - 3 = -5, \\ -x_3 - 5x_2 + 9 = 13, \\ 19x_2 - 27 = -46, \\ x_4 = 3; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - 3 - 3 = -5, \\ -x_3 + 5 + 9 = 13, \\ x_2 = -1, \\ x_4 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 1 - 6 = -5, \\ x_3 = 1, \\ x_2 = -1, \\ x_4 = 3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 1, \\ x_4 = 3. \end{cases}$$

Получено решение системы: $(2;\ -1;\ 1;\ 3)$.

**Пример 1.13.** Решить систему уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

**Решение.**

Составим расширенную матрицу системы и сведем ее к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

Поменяем местами 1 и 2 строки.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \times(-2)+ \quad \times(-3)+ \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \times(-1)+ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(\overline{A}) = 2 \Rightarrow$ система уравнений совместная,

$n = 4,\ r = 2,\ r \neq n \Rightarrow$ система уравнений неопределенная.

Перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ \quad -5x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 17. \end{cases}$$

Число основных (базисных) неизвестных равно рангу системы $(r = 2)$. Примем за основные $x_1$ и $x_2$, так как определитель, составленный из коэффициентов при этих неизвестных, отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Остальные $n - r = 4 - 2 = 2$ неизвестные являются неосновными (свободными). Выразим из последнего уравнения $x_2$ через $x_3$ и $x_4$ и подставим в первое уравнение:

$$\begin{cases} x_1 + 2 \cdot \dfrac{17 - 5x_3 + 7x_4}{-5} - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ x_2 = \dfrac{17 - 5x_3 + 7x_4}{-5}. \end{cases}$$

Из первого уравнения выразим $x_1$:

$$\begin{cases} x_1 = -6 + 2x_3 - 3x_4 - 2 \cdot \dfrac{17 - 5x_3 + 7x_4}{5}, \\ x_2 = \dfrac{-17}{5} + x_3 - \dfrac{7}{5} x_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5} - \dfrac{x_4}{5}, \\ x_2 = \dfrac{-17}{5} + x_3 - \dfrac{7}{5} x_4. \end{cases}$$

Задавая свободным неизвестным произвольные значения $x_3 = c_1$ , $x_4 = c_2$ найдем бесконечное множество решений системы:

$$x_1 = \frac{4}{5} - \frac{c_2}{5},$$

$$x_2 = -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5} c_2,$$

$$x_3 = c_1,$$

$$x_4 = c_2.$$

Таким образом, получено общее решение системы:

$$\left( \frac{4}{5} - \frac{c_2}{5}; -\frac{17}{5} + c_1 - \frac{7}{5} c_2;\ c_1; c_2 \right),\ c_1, c_2 \in R.$$

### 1.3.3 Системы линейных однородных уравнений

Система $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными называется ***системой линейных однородных уравнений*** (СЛОУ), если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.11)$$

Матричная форма записи СЛОУ

$$A \cdot X = 0.$$

Система линейных однородных уравнений всегда совместна, так как она имеет, по крайней мере, нулевое (тривиальное) решение

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0.$$

Следующая теорема дает ответ на вопрос, при каких условиях СЛОУ имеет ненулевые решения.

***Теорема.*** Система линейных однородных уравнений имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа переменных, т. е. $r(A) < n$.

Если число уравнений СЛОУ равно числу неизвестных $(m = n)$, то она принимает вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (1.12)$$

Условие существования ненулевых решений системы $n$ линейных однородных уравнений с $n$ неизвестными сформулировано в следующей теореме.

***Теорема.*** Система $n$ линейных однородных уравнений с $n$ неизвестными имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, т. е. $|A| = 0$.

**Пример 1.14.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

**Решение.**

Число уравнений системы равно числу переменных. Определим число решений, для этого вычислим определитель системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как определитель системы равен нулю, то система имеет ненулевые решения. Найдем решения системы методом Гаусса.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \times(-2)+ & \times(-3)+ \\ & \\ & \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \times(-1)+ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ -5x_2 - x_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_3, \\ x_2 = -\dfrac{1}{5} x_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{4}{5} x_3, \\ x_2 = -\dfrac{1}{5} x_3; \end{cases}$$

Полагая свободную переменную $x_3 = c$, получим общее решение системы $\left(-\dfrac{4}{5}c;\ -\dfrac{1}{5}c;\ c\right)$, где $c \in R$.

**Пример 1.15.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 - 11x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 0. \end{cases}$$

**Решение.**

Число уравнений системы равно числу неизвестных.

Вычислим определитель системы:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & 5 & -11 \\ 3 & 4 & -9 \end{vmatrix} = -1.$$

Так как $|A| = -1 \neq 0$, то система линейных однородных уравнений имеет единственное нулевое решение: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

## Вопросы

1. Какой вид имеет система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными?
2. Какой вид имеет система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными?
3. Какая СЛУ называется совместной, несовместной, определенной, неопределенной?
4. Что называется матрицей СЛУ, матрицей неизвестных, матрицей свободных членов?
5. Какова матричная форма СЛУ?
6. Каково решение системы *n* линейных уравнений с *n* неизвестными в матричной форме?
7. Какая матрица называется расширенной матрицей СЛУ?
8. В чем суть метода Гаусса решения СЛУ?
9. Сформулируйте теорему Кронекера-Капелли.
10. Каково условие определенности совместной СЛУ?
11. Каково условие неопределенности совместной СЛУ?
12. Какие переменные называются базисными, свободными?
13. Какой вид имеет система однородных линейных уравнений?
14. Сформулируйте условие существования ненулевых решений СЛОУ.
15. Каково условие существования ненулевых решений системы *n* линейных однородных уравнений с *n* неизвестными?

## Задания

**1.** Решить систему уравнений по формулам Крамера и матричным методом:

а) $\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ 4x_1 + 8x_2 + x_3 = 18, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 33; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

Ответ: а) (3; 0; 6); б) (3; 1; 2).

**2.** Решить систему уравнений по формулам Крамера и матричным методом:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9, \\ 3x_1 - 4x_2 = 5. \end{cases}$$

Ответ: (3; 1).

**3.** Решить систему уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = 2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 + x_3 = 18, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 21, \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 33; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Ответ: а) (0; 2; 1); б) (3; 0; 6); в) $(-1$; 3; 1).

**4.** Исследовать систему уравнений с помощью теоремы Кронекера-Капелли:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$$

Ответ: система уравнений неопределенная.

**5.** Исследовать систему уравнений с помощью теоремы Кронекера-Капелли, если система задана в виде расширенной матрицы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & -2 & -3 \end{array}\right).$$

Ответ: система уравнений несовместная.

**6.** Исследовать систему уравнений с помощью теоремы Кронекера-Капелли и найти ее решение:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$$

Ответ: (2; 1; 1; 1).

**7.** Исследовать систему уравнений и найти ее общее решение:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 3. \end{cases}$

Ответ: а) $(-1+2c;\ 1+c;\ c)$; $c \in R$;

б) $(\frac{7}{3} - \frac{7}{3}c;\ -\frac{2}{3} + \frac{5}{3}c;\ c)$, $c \in R$.

**8.** Исследовать систему уравнений и найти ее общее решение:

а) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 4, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 - 7x_4 = 2. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 9x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 4, \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 14x_4 = -8. \end{cases}$

Ответ: а) $(2+c,\ -1-2c;\ 2c;\ c)$, $c \in R$;

б) $(-4+3c_1-2c_2;\ 3-2c_1+c_2;\ c_1;\ c_2)$, $c_1 \in R$, $c_2 \in R$;

в) $(-\frac{2}{11} + \frac{1}{11}c;\ \frac{10}{11} - \frac{5}{11}c;\ c;\ 0)$, $c \in R$;

г) $(c;\ -13+3c;\ –7;\ 0)$, $c \in R$.

**9.** Исследовать систему уравнений и найти ее общее решение:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = -4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 1, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = -1, \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = -7. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 15x_5 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 5. \end{cases}$

Ответ:
а) $(-2 + 3c_1 + 11c_2;\ 5 - 6c_1 - 18c_2;\ c_1;\ -3 + 2c_1 + 6c_2;\ c_2)$, $c_1 \in R$, $c_2 \in R$;
б) $(c_1;\ c_2;\ -6 + 5c_1 + c_2 - c_3;\ c_3;\ -1 + c_1)$, $c_1 \in R$, $c_2 \in R$, $c_3 \in R$.

**10.** Определить число решений системы уравнений и найти ее решение:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 = 0, \\ 6x_1 - x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(0;\ -4c;\ c)$, $c \in R$.

**11.** Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 - 11x_3 - 7x_4 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 - 13x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Ответ: $(c_1 - 3c_2;\ -2c_1 - 4c_2;\ c_1;\ c_2)$, $c_1 \in R$, $c_2 \in R$.

## 1.4 Собственные векторы и собственные значения матрицы

Для любой квадратной матрицы существует набор особых векторов, таких, что произведение матрицы на вектор из такого набора равносильно умножению этого вектора на определенное число.

Число $\lambda$ называется ***собственным значением (числом)*** матрицы $A$ порядка $n$, если существует такой ненулевой вектор $\vec{x}$, что выполняется равенство

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}. \tag{1.13}$$

Вектор $\vec{x}$ называется ***собственным вектором*** матрицы $A$.

Матричное уравнение (1.13) можно записать в виде

$$(A - \lambda E)\cdot \vec{x} = \vec{0}. \tag{1.14}$$

Уравнение (1.14) эквивалентно системе однородных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n} = 0, \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0, \end{cases} \tag{1.15}$$

где $a_{ij}$ – элементы матрицы $A$, $i, j = \overline{1, n}$; $\vec{x} = (x_1;\ x_2;...;\ x_n)$ – собственный вектор матрицы $A$.

Поскольку собственный вектор $\vec{x}$ не является нулевым и его координаты являются решением системы (1.15), то эта система линейных однородных уравнений имеет ненулевое решение. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

или

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{1.16}$$

Уравнение (1.16) называется ***характеристическим уравнением*** матрицы $A$.

Корнями уравнения (1.16) являются собственные числа матрицы $A$. Для каждого из них можно найти соответствующий собственный вектор как решение однородной системы (1.15).

**Пример 1.16.** Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Характеристическое уравнение (1.16) для этой матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Найдем определитель в левой части равенства. Получим уравнение

$$\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0.$$

Корни уравнения $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 5$ – собственные числа матрицы.

Для нахождения собственных векторов подставим найденные собственные значения в систему однородных уравнений (1.15), соответствующую заданной матрице $A$.

Собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 2$, является решением системы

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

По сути это одно уравнение $x_1 = -2x_2$. Полагая свободную переменную $x_2 = b$, получаем первый собственный вектор

$$\vec{x}_1 = (-2b;\ b) = b(-2;\ 1).$$

Подстановка второго собственного значения $\lambda_2 = 5$ в (1.15) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Полагая свободную переменную $x_2 = c$, получим второй собственный вектор матрицы $A$

$\vec{x}_2 = (c;\ c) = c(1;\ 1)$.

Поскольку $b$ и $c$ – произвольные числа, то одному собственному значению может соответствовать бесконечное множество коллинеарных собственных векторов разной длины. Например, при $b = 1$, $c = 1$ собственные векторы имеют вид

$x_1 = (-2;\ 1)$, $x_2 = (1;\ 1)$.

## Вопросы

1. Какой вектор называется собственным вектором матрицы?

2. Какое число называется собственным значением (числом) матрицы?

3. Какое уравнение называется характеристическим уравнением матрицы?

4. Как определить собственные числа матрицы?

5. Как найти собственные векторы матрицы?

## Задания

**1.** Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Ответ: а) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$; $\vec{x}_1 = b(4;\ -1)$, $\vec{x}_2 = c(1;\ -1)$;

б) $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 20$; $\vec{x}_1 = b(1;\ -2)$, $\vec{x}_2 = c(2;\ 1)$;

в) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 13$; $\vec{x}_1 = b(1;\ -1)$, $\vec{x}_2 = c(1;\ 2)$;

$b \neq 0$, $c \neq 0$.

**2.** Найдите собственные значения и собственные векторы матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_2 = -3$; $\vec{x}_1 = b(-2;\ 1;\ 1)$, $\vec{x}_2 = c(0;\ 1;\ 1)$,

$\vec{x}_3 = d(6;\ -7;\ 5)$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

# 2 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

## 2.1 Прямоугольная система координат на плоскости. Основные задачи аналитической геометрии

Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение точки на плоскости. Одной из таких систем является прямоугольная (декартова) система координат.

***Прямоугольная декартова система координат на плоскости*** (ПДСК) задается двумя взаимно перпендикулярными осями $Ox$ и $Oy$, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Единицу масштаба обычно берут одинаковой для обеих осей. Оси $Ox$ и $Oy$ называют осями координат, точку их пересечения $O$ – началом координат. Ось $Ox$ называют ***осью абсцисс***, а ось $Oy$ – ***осью ординат***. Обычно ось абсцисс располагают горизонтально и направленной вправо, а ось ординат – вертикально и направленной вверх. Оси координат делят плоскость на четыре области – четверти (или квадранты). Систему координат обозначают $Oxy$, а плоскость, в которой расположена система координат, называют ***координатной плоскостью*** (*рисунок 2.1*).

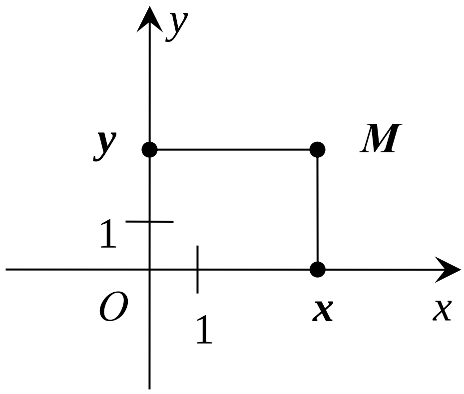



*Рисунок 2.1*

***Координатами точки*** $M$ в системе координат $Oxy$ называются числа $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$, являющиеся координатами проекций точки на оси координат: $\boldsymbol{M(x;\, y)}$. Число $\boldsymbol{x}$ называется ***абсциссой*** точки $M$, число $\boldsymbol{y}$ – ***ординатой*** точки $M$.

В прямоугольной системе координат каждой точке $M$ плоскости соответствует единственная упорядоченная пара чисел $(x;\ y)$, и обратно, каждой упорядоченной паре чисел $(x;\ y)$ соответствует, и притом одна, точка $M$ на плоскости.

К основным задачам аналитической геометрии на плоскости относятся нахождение расстояния между двумя точками, определение координат точки, делящей отрезок в данном отношении, и вычисление площади треугольника.

***Расстояние* d *между точками*** $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ определяется по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\,. \tag{2.1}$$

***Точка*** *M* ***делит отрезок*** *M₁M₂* ***в отношении*** $\lambda$ (*рисунок 2.2*), если

$$\frac{M_1M}{MM_2}=\lambda\,.$$

Если $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, то ***координаты точки M, делящей отрезок*** $M_1M_2$ ***в отношении*** $\lambda$, определяются по формулам:

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\,. \tag{2.2}$$

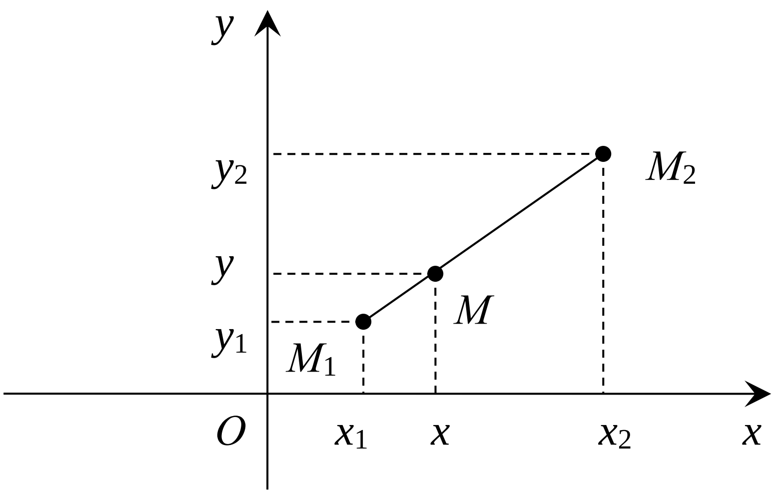



*Рисунок 2.2*

В частности, ***координаты середины отрезка*** определяются из (2.2) при $\lambda = 1$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$
(2.3)

**Пример 2.1.** Найти длину отрезка $AB$, если $A(2;\,3)$, $B(-1;\,7)$.

**Решение**.

Длину отрезка $AB$ найдем как расстояние между точками $A$ и $B$ по формуле (2.1):

$$AB = \sqrt{(-1-2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

**Пример 2.2.** Отрезок $AB$ разделен точками $M_1$ и $M_2$ на три равные части. Найти координаты точек $M_1$ и $M_2$, если $A(-2;\,1)$, $B(3;\,7)$.

**Решение.**

Разделим отрезок $AB$ на три равные части точками $M_1$ и $M_2$ (*рисунок 2.3*).


*Рисунок 2.3*

Точка $M_1$ делит отрезок $AB$ в отношении $\lambda_1 = \frac{AM_1}{M_1B} = \frac{1}{2}$.

Используя (2.2), найдем координаты точки $M_1$:

$$x_{M_1} = \frac{x_A + \lambda_1 x_B}{1+\lambda_1} = \frac{-2 + \frac{1}{2}\cdot 3}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

$$y_{M_1} = \frac{y_A + \lambda_1 y_B}{1+\lambda_1} = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 7}{\frac{3}{2}} = 3.$$

$$M_1(-\frac{1}{3};\ 3).$$

Точка $M_2$ делит отрезок $AB$ (*рисунок 2.3*) в отношении

$$\lambda_2 = \frac{AM_2}{M_2B} = \frac{2}{1} = 2.$$

Используя формулы (2.2), найдем координаты точки $M_2$:

$$x_{M_2} = \frac{x_A + \lambda_2 x_B}{1+\lambda_2} = \frac{-2+2\cdot 3}{1+2} = 1\frac{1}{3}$$

$$y_{M_2} = \frac{y_A + \lambda_2 y_B}{1+\lambda_2} = \frac{1+2\cdot 7}{1+2} = 5.$$

$$M_2(1\frac{1}{3};\ 5).$$

**Пример 2.3.** Определить длину медианы $BM$ в треугольнике $ABC$, если $A(1;\ 4)$, $B(-2;\ 5)$, $C(-3;\ 2)$.

**Решение**.

Так как медиана $BM$ делит противолежащую к вершине $B$ сторону $AC$ пополам, то точка $M$ – середина стороны $AC$. Вычислим её координаты по формулам (2.3):

$$x = \frac{1+(-3)}{2} = -1, \quad y = \frac{4+2}{2} = 3.$$

Таким образом, $M(-1;\ 3)$.

Длину медианы BM найдем как расстояние между двумя точками $B$ и $M$ по формуле (2.1):

$$BM = \sqrt{(-1-(-2))^2 + (3-5)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

## Вопросы

1. Как задается прямоугольная система координат на плоскости?

2. Что называется координатами точки в прямоугольной системе координат?

3. Как найти расстояние между двумя точками на плоскости?

4. Каковы координаты точки, делящей отрезок в данном отношении $\lambda$?

5. Как найти координаты середины отрезка?

## Задания

**1.** Определить расстояние между точками $M(-11; 21)$ и $N(9; 20)$.

Ответ: $\sqrt{401}$.

**2.** Определить длину отрезка $AB$, если $A(3; 8)$ и $B(-5; 14)$.

Ответ: 10.

**3.** Длина отрезка $AB$ равна 13, $B(7; 3)$. Найти ординату точки $A$, если её абсцисса равна −5.

Ответ: 8 или −2.

**4.** Показать, что треугольник с вершинами $A(4; 3)$, $B(7; 6)$, $C(2; 11)$ − прямоугольный.

**5.** Даны вершины треугольника $A(-1; -1)$, $B(0; -6)$, $C(-10; -2)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины $A$.

Ответ: 5.

**6.** Даны концы отрезка $AB$: $A(-3; 7)$, $B(5; 11)$. Этот отрезок тремя точками разделен на четыре равные части. Определить координаты точек деления.

Ответ: $(-1; 8)$, $(1; 9)$, $C(3; 10)$.

**7.** Даны вершины однородной треугольной пластинки $A(4; 2)$, $B(7; -2)$, $C(1; 6)$. Найти координаты центра тяжести треугольника.

*Указание.* Центр тяжести треугольника находится в точке пересечения его медиан. Точка пересечения медиан треугольника делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.

Ответ: $(4;\ 2)$.

**8.** Найти координаты точки, симметричной точке $A(-2;\ 0)$ относительно точки $B(5;\ -1)$.

Ответ: $(12;\ -2)$.

**9.** Точки $L(0;\ 0)$, $M(3;\ 0)$, $N(0;\ 4)$ являются серединами сторон треугольника $ABC$. Найти координаты вершин треугольника.

Ответ: $(-3;\ 4)$, $(3;\ -4)$, $(3;\ 4)$.

**10.** В треугольнике с вершинами $A(0;\ 2)$, $B(3;\ 5)$, $C(-3;\ -1)$ определить длину биссектрисы, проведенной из вершины $B$.

*Указание.* Биссектриса внутреннего угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении, равном отношению длин прилежащих сторон.

Ответ: $4\sqrt{2}$.

## 2.2 Уравнение линии на плоскости

Линия на плоскости задается как множество точек, обладающих некоторым, только им присущим, геометрическим свойством. Введение системы координат позволяет определить положение линии на плоскости с помощью уравнения.

***Уравнением линии*** на плоскости в прямоугольной системе координат $Oxy$ называется уравнение с двумя переменными $x$ и $y$ вида

$$F(x;\ y) = 0, \tag{2.5}$$

которому удовлетворяют координаты каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на линии.

Переменные $x$ и $y$ называются текущими координатами точек линии.

Чтобы составить уравнение линии как множества точек, обладающих одинаковым свойством, необходимо:

1) взять произвольную (текущую) точку $M(x;\ y)$ линии;

2) записать равенством общее свойство всех точек линии;

3) входящие в полученное равенство длины отрезков выразить через текущие координаты точки $M(x;\ y)$ и данные задачи.

***Параметрическими уравнениями линии*** на плоскости в прямоугольной системе координат $Oxy$ называется система уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \tag{2.6}$$

где $(x;\ y)$ – координаты произвольной точки, лежащей на данной линии, $t$ – переменная, называемая параметром.

Параметр $t$ определяет положение точки на плоскости. Если параметр $t$ изменять, то точка на плоскости перемещается, описывая данную линию.

Чтобы перейти от параметрических уравнений линии (2.6) к уравнению (2.5), надо каким-либо способом исключить параметр $t$. Однако такой переход не всегда возможен и целесообразен.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием его уравнения.

Так, для того, чтобы установить, лежит ли точка на данной линии, достаточно проверить, удовлетворяют ли координаты точки уравнению этой линии.

Чтобы найти координаты точки пересечения двух линий, заданных уравнениями $F_1(x;\ y) = 0$ и $F_2(x;\ y) = 0$, надо решить систему уравнений линий

$$\begin{cases} F_1(x;\ y) = 0, \\ F_2(x;\ y) = 0. \end{cases}$$

Если система не имеет решений, то линии не пересекаются.

**Пример 2.4.** Составить уравнение линии, сумма квадратов расстояний от каждой точки которой до точек $A(1;\ 3)$ и $B(-1;\ -3)$ равна 92.

**Решение.**

Пусть $M(x;\ y)$ – текущая точка искомой линии (*рисунок 2.4*).

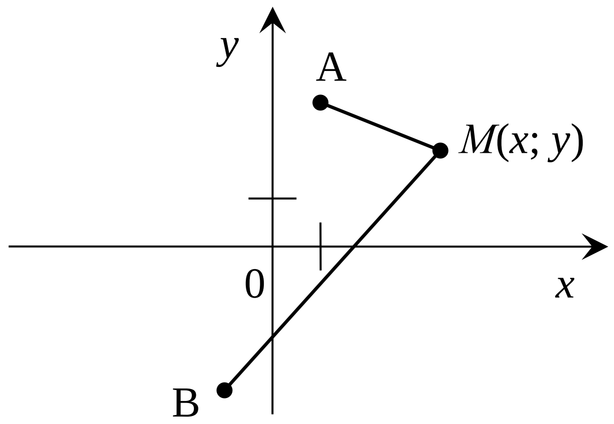



*Рисунок 2.4*

По условию задачи

$$AM^2 + BM^2 = 92.$$

Учитывая, что

$$AM = \sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2},\ BM = \sqrt{(x+1)^2 + (y+3)^2},$$

перейдем к координатной форме записи равенства:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 + (x+1)^2 + (y+3)^2 = 92,$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 + x^2 + 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 92,$$

$$2x^2 + 2y^2 + 20 = 92,$$

$$2x^2 + 2y^2 = 72,$$

$$x^2 + y^2 = 36.$$

Получили уравнение окружности радиуса $R = 6$ с центром в начале координат $O(0;\ 0)$ (*рисунок 2.5*).

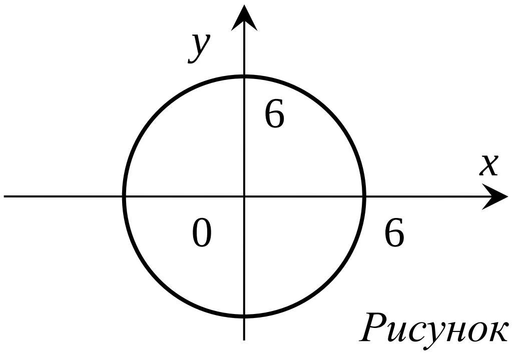



*Рисунок 2.5*

**Пример 2.5.** Построить линию, заданную параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = t^2. \end{cases}$$

**Решение.**

Придавая параметру $t$ произвольные значения, вычисляем соответствующие значения переменных $x$ и $y$ (*таблица 2.1*).

*Таблица 2.1 – Значения параметрической функции*

| $t$ | −3 | −2 | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | −1 | −2 |
| $y$ | 9 | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 | 9 |

Построим линию по точкам с координатами $(x; y)$ из расчетной таблицы 2.1 (*рисунок 2.6*).

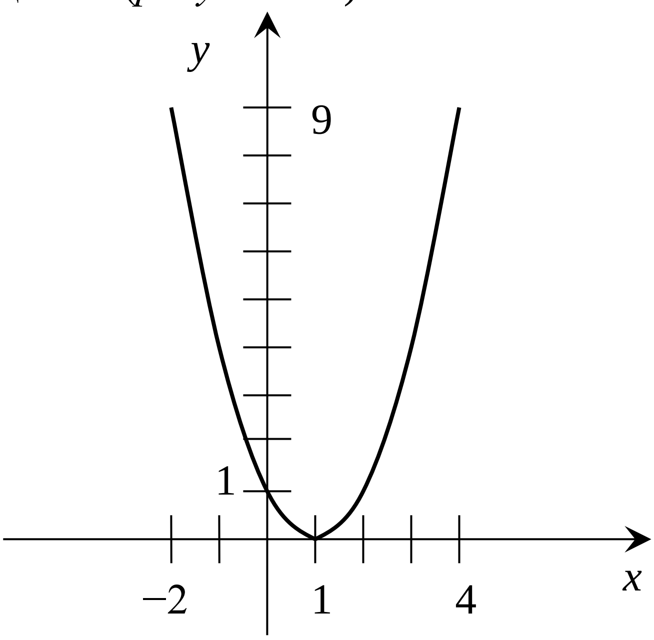



*Рисунок 2.6*

Из уравнений линии можно исключить параметр $t$. Для этого из первого уравнения выразим $t$:

$$t = 1 - x,$$

и подставим во второе уравнение:

$$y = (1 - x)^2 .$$

Получили уравнение параболы с вершиной в точке $(1; 0)$, осью симметрии параллельной $Oy$ и ветвями, направленными вверх (*рисунок 2.6*).

**Пример 2.6.** Построить линию, заданную параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$$

**Решение.**

Придавая параметру $t$ произвольные значения, вычисляем соответствующие значения переменных $x$ и $y$ (*таблица 2.2*).

*Таблица 2.2 – Значения параметрической функции*

| $t$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 2 | 0,71 | 0 | −0,71 | −2 | −0,71 | 0 | 0,71 | 2 |
| $y$ | 0 | 0,71 | 2 | 0,71 | 0 | −0,71 | −2 | −0,71 | 0 |

Построим линию (*рисунок 2.7*). Полученная линия называется астроидой.

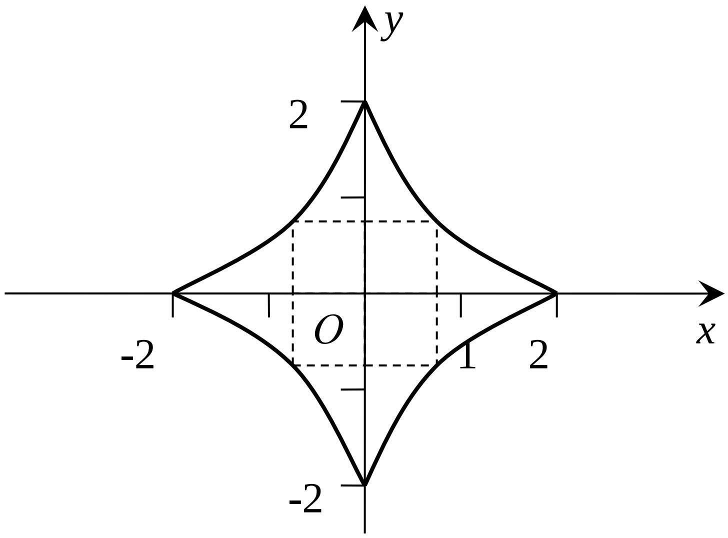



*Рисунок 2.7*

Исключим из уравнений линии параметр $t$. Возведем уравнения системы в степень с показателем $\frac{2}{3}$ и сложим их:

$$\begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = \left(2\cos^3 t\right)^{\frac{2}{3}}, \\ y^{\frac{2}{3}} = (2\sin^3 t)^{\frac{2}{3}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \cos^2 t, \\ y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} \sin^2 t, \end{cases}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}(\sin^2 t + \cos^2 t).$$

Так как $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$, то

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}.$$

Получили уравнение астроиды в виде $F(x;\ y) = 0$.

## Вопросы

1. Что называют уравнением линии на плоскости?
2. Как составить уравнение линии?
3. Каковы параметрические уравнения линии?
4. Как перейти от параметрических уравнений линий к уравнению вида $F(x;\ y) = 0$?

5. Каким образом определить, принадлежит ли точка линии или нет?

6. Как найти точку пересечения двух линий?

## Задания

**1.** Написать уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точек $A(0;\ 2)$ и $B(4;\ -2)$. Лежат ли на этой линии точки $C(-1;\ 1)$, $D(1;\ -1)$, $E(0;\ -2)$, $F(2;\ 2)$?

Ответ: $y = x - 2$; точки $D$ и $E$ лежат на линии, точки $C$ и $F$ не лежат на линии.

**2.** Написать уравнение траектории точки $M(x;\ y)$, которая при своем движении остается втрое дальше от точки $A(0;\ 9)$, чем от точки $B(0;\ 1)$.

Ответ: $x^2 + y^2 = 9$.

**3.** Написать уравнение линии, каждая точка которой вдвое ближе к точке $A(-1;\ 1)$, чем к точке $B(-4;\ 4)$.

Ответ: $x^2 + y^2 = 8$.

**4.** Составить уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки $A(x_0;\ y_0)$ и до прямой $x = a$ равно числу $\varepsilon$:

а) $A(4;\ 0)$, $a = 9$, $\varepsilon = \dfrac{2}{3}$;

б) $A(-8;\ 0)$, $a = -2$, $\varepsilon = 2$.

Ответ: а) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{20} = 1$; б) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{48} = 1$.

**5.** Составить уравнение линии, для каждой точки которой её расстояние до точки $A(x_0;\ y_0)$ равно расстоянию до прямой $y = b$:

а) $A(2;\ 1)$, $b = -1$;

б) $A(2;\ -1)$, $b = 2$.

Ответ: а) $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$; б) $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}(x-2)^2$.

**6.** Найти точки пересечения линий, заданных уравнениями:
а) $y=3x+2$; $y=-x-6$;
б) $y=3x^2$; $y=-5x+8$;
в) $y=3x^2-5x-1$; $y=-x^2+2x+1$.

Ответ: а) $(-2;\,-4)$; б) $(1;\,3)$, $\left(-2\frac{2}{3};\,21\frac{1}{3}\right)$;

в) $(2;\,1)$, $\left(-\frac{1}{4};\,\frac{7}{16}\right)$.

**7.** Построить линии, заданные параметрическими уравнениями, и преобразовать уравнения линии к виду $F(x;\,y)=0$, исключив параметр *t*:

а) $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=t^2, \\ y=2+t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x=3\cos t, \\ y=3\sin t; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x=3\sin t, \\ y=2\cos t; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x=\cos^2 t, \\ y=\sin^2 t+2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} x=\sin^2 t+1, \\ y=\cos t. \end{cases}$

Ответ: а) $y=\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}$; б) $(y-2)^2=x$; в) $x^2+y^2=9$;

г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; д) $y=3-x$; е) $y^2=-(x-2)$.

## 2.3 Прямая на плоскости

### 2.3.1 Уравнение прямой на плоскости

Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат *Oxy* и имеется прямая *l*.

***Углом наклона*** прямой *l* к оси *Ox* называется наименьший угол $\alpha$ между положительным направлением оси О*x* и прямой *l*, отложенный против часовой стрелки (*рисунок 2.8*).

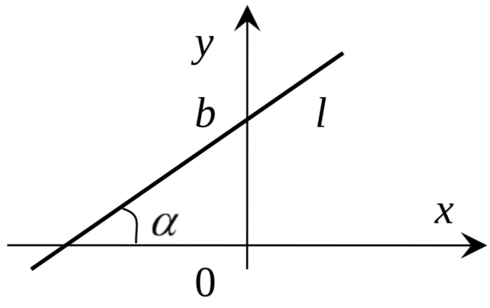



*Рисунок 2.8*

***Угловым коэффициентом прямой*** $l$, не параллельной оси $Oy$, называется тангенс угла наклона прямой к оси $Ox$, т. е.

$$k = tg\alpha . \tag{2.7}$$

Если прямая $l$ не параллельна оси $Oy$, то ее уравнение имеет вид

$$y = kx + b, \tag{2.8}$$

где $b$ – начальная ордината (прямая $l$ пересекает ось $Oy$ в точке с координатами ($0$; $b$)) (*рисунок 2.8*).

(2.8) – ***уравнение прямой с угловым коэффициентом и начальной ординатой.***

Если известны угловой коэффициент $k$ прямой $l$ и точка $M(x_0;\ y_0)$, принадлежащая прямой, то прямая $l$ может быть задана уравнением

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.9}$$

(2.9) – ***уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*** (т. е. с известным угловым коэффициентом).

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, то угловой коэффициент $k$ прямой $l$ вычисляется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.10}$$

***Уравнение прямой*** $l$, ***проходящей через две данные точки*** $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ имеет вид

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \tag{2.11}$$

Если прямая $l$ пересекает оси координат в точках $A(a;\ 0)$ и $B(0;\ b)$ (*рисунок 2.9*), то прямая $l$ может быть задана уравнением

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (2.12)$$

(2.12) – ***уравнение прямой «в отрезках».***

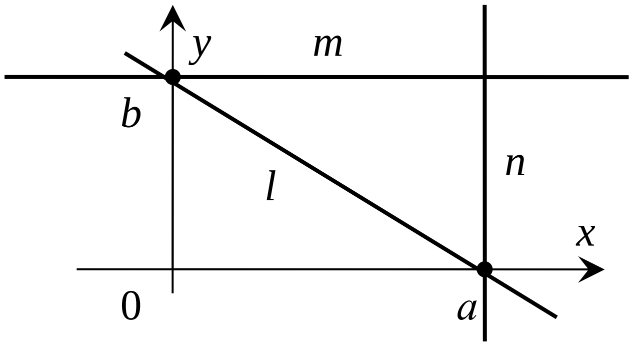



*Рисунок 2.9*

Если прямая $m$ параллельна оси $Ox$ (*рисунок 2.9*) и пересекает ось $Oy$ в точке $(0;\ b)$, то ее уравнение

$$y=b. \qquad (2.13)$$

Если прямая $n$ параллельна оси $Oy$ (*рисунок 2.9*) и пересекает ось $Ox$ в точке $(a;\ 0)$, то ее уравнение

$$x=a. \qquad (2.14)$$

Любая прямая на плоскости в заданной прямоугольной системе координат $Oxy$ определяется уравнением первой степени с двумя неизвестными $x$ и $y$:

$$Ax+By+C=0. \qquad (2.15)$$

Верно и обратное: любое уравнение первой степени с двумя переменными определяет прямую на плоскости.

(2.15) – ***общее уравнение прямой***.

**Пример 2.7.** Найти уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;\ 1)$, угол наклона которой к оси $Ox$ составляет 30°.

**Решение.**

Найдем угловой коэффициент прямой, используя (2.7):

$$k=tg30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через данную точку в данном направлении (2.9). Получим

$$y-1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2),$$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}x-\frac{2\sqrt{3}}{3}+1.$$

**Пример 2.8.** Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки $A(-1;\ 2)$ и $B(3;\ -2)$.

**Решение.**

Для вычисления углового коэффициента прямой воспользуемся формулой (2.10). Получим

$$k=\frac{-2-2}{3-(-1)}=-1.$$

**Пример 2.9.** Найти уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(4;\ -2)$ и $M_2(1;\ 3)$.

**Решение.**

Уравнение прямой, проходящей через две точки (2.11):

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

Получим

$$M_1M_2:\quad \frac{y+2}{3+2}=\frac{x-4}{1-4},$$

$$\frac{y+2}{5}=\frac{x-4}{-3},$$

$$-3(y+2)=5(x-4),$$

$$5x+3y-14=0.$$

**Пример 2.10.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;\ 3)$ параллельно осям координат.

**Решение**.

Используя (2.13) и (2.14), получим

уравнение прямой, параллельной оси $Ox$: $y=3$,

уравнение прямой, параллельной оси $Oy$: $x=5$.

### 2.3.2 Угол между двумя прямыми.

## Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой

Углом между двумя прямыми $l_1$ и $l_2$ называется угол $\varphi$, на который надо повернуть в положительном направлении (против часовой стрелки) прямую $l_1$ вокруг точки их пересечения до совпадения с прямой $l_2$ (*рисунок 2.10*).

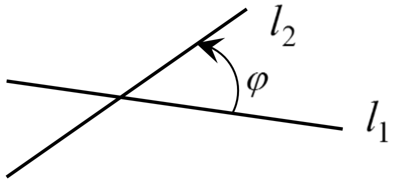



*Рисунок 2.10*

Если известны угловые коэффициенты $k_1$ и $k_2$ прямых $l_1$ и $l_2$, то ***тангенс угла*** $\varphi$ между прямыми $l_1$ и $l_2$ определяется по формуле

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{2.16}$$

Для того, чтобы прямые $l_1$ и $l_2$ были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были равны:

$$k_1 = k_2. \tag{2.17}$$

Если прямые $l_1$ и $l_2$ заданы общими уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ соответственно, то прямые параллельны тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты при переменных пропорциональны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \tag{2.18}$$

(2.17) и (2.18) – ***условия параллельности прямых***.

Для того, чтобы прямые $l_1$ и $l_2$ были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их угловые коэффициенты были обратными по абсолютной величине и противоположными по знаку:

$$k_2 = -\frac{1}{k_1}. \tag{2.19}$$

Если прямые $l_1$ и $l_2$ заданы общими уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ соответственно, то прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда коэффициенты при переменных удовлетворяют условию, т. е.

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \qquad (2.20)$$

(2.19) и (2.20) – ***условия перпендикулярности прямых***.

***Расстояние от точки*** $M_0(x_0;y_0)$ ***до прямой*** $l$, заданной общим уравнением $Ax+By+C=0$, есть длина перпендикуляра, опущенного из точки на прямую (*рисунок 2.11*), и определяется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (2.21)$$

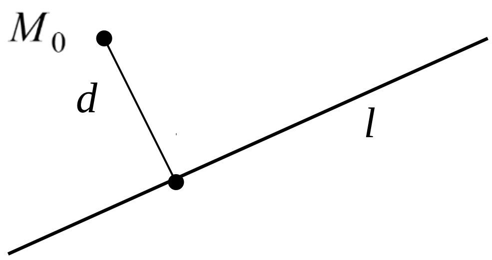



*Рисунок 2.11*

**Пример 2.11.** Даны вершины $\Delta ABC$: $A(-1;\,2)$, $B(2;\,-5)$, $C(7;\,4)$. Найти внутренний угол $B$ треугольника $ABC$.

**Решение.**

В прямоугольной системе координат $Oxy$ построим $\Delta ABC$ (*рисунок 2.12*).

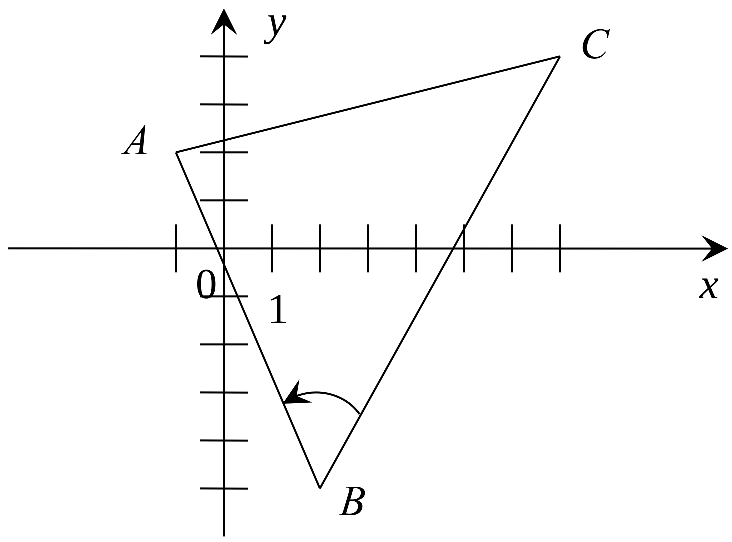



*Рисунок 2.12*

Используя формулу (2.10), найдем угловые коэффициенты прямых *AB* и *BC*:

$$k_{AB}=\frac{-5-2}{2+1}=\frac{-7}{3},\qquad k_{BC}=\frac{4+5}{7-2}=\frac{9}{5}.$$

Для вычисления угла между прямыми *AB* и *BC* воспользуемся формулой (2.16), причем

$$k_1=k_{BC}=\frac{9}{5},\ k_2=k_{AB}=-\frac{7}{3}.$$

Получим

$$tg\angle B=\frac{-\frac{7}{3}-\frac{9}{5}}{1+\frac{9}{5}\cdot\left(-\frac{7}{3}\right)}=\frac{31}{24},\qquad \angle B=arctg\,\frac{31}{24}\approx 0{,}92\ \text{(радиан)}.$$

**Пример 2.12.** Найти уравнение прямой $a$, проходящей через точку $M(4;\,-2)$ и параллельной прямой $b$: $3x-y-2=0$.

**Решение.**

Найдем угловой коэффициент прямой $b$; для этого перейдем от общего уравнения прямой к уравнению с угловым коэффициентом:

$$y=3x-2.$$

Значит, $k_b = 3$.

Так как $a \| b$, то по условию параллельности прямых (2.17)

$$k_a = k_b = 3.$$

Для получения уравнения прямой *a*, проходящей через данную точку $M(4; -2)$ с заданным угловым коэффициентом $k_a = 3$, воспользуемся уравнением (2.9). Получим

$$y + 2 = 3(x - 4) \text{ или } y = 3x - 14.$$

**Пример 2.13.** Найти уравнение прямой *l*, проходящей через точку *N*(1; 3) и перпендикулярной прямой *m*: $y = 5x + 1$.

**Решение.**

Из уравнения прямой *m* найдем ее угловой коэффициент $k_m = 5$. Так как $l \perp m$, то по условию перпендикулярности прямых (2.19)

$$k_l = -\frac{1}{k_m} = -\frac{1}{5} = -0{,}2.$$

Составим уравнение прямой *l* как прямой, проходящей через известную точку с заданным угловым коэффициентом (2.9). Получим

$$y - 3 = -0{,}2(x - 1) \text{ или } x + 5y - 16 = 0.$$

**Пример 2.14.** Найти расстояние от точки *M*(3; 7) до прямой $y = 2x - 1$.

**Решение.** Перейдем от уравнения прямой с угловым коэффициентом к общему уравнению прямой:

$$2x - y - 1 = 0.$$

Для нахождения расстояния от точки до прямой воспользуемся формулой (2.21).

Из уравнения прямой имеем $A = 2$, $B = -1$, $C = -1$. По условию координаты точки: $x_0 = 3$, $y_0 = 7$. Получим

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 1 \cdot 7 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0{,}89.$$

**Пример 2.15.** Найти точку пересечения прямых, заданных уравнениями: $3x+2y+3=0$ и $2x-y+9=0$.

**Решение.** Чтобы найти точку пересечения прямых, надо решить систему уравнений прямых:

$$\begin{cases} 3x+2y+3=0, \\ 2x-y+9=0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=3. \end{cases}.$$

$M(-3;\,3)$ – точка пересечения прямых.

### 2.3.3 Геометрический смысл неравенства первой степени

Областью решений линейного неравенства $Ax+By+C\le 0$ *(* $Ax+By+C\ge 0$ *)* является одна из двух полуплоскостей, на которые прямая $Ax+By+C=0$, соответствующая данному неравенству, делит координатную плоскость.

Для того чтобы определить, какая из двух полуплоскостей является областью решений, достаточно координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой, подставить в неравенство: если оно удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, содержащая данную точку, если же неравенство не удовлетворяется, то областью решений является полуплоскость, не содержащая данную точку.

Областью решений системы линейных неравенств является общая часть (пересечение) полуплоскостей – областей решений всех неравенств системы.

**Пример 2.16.** Построить область решений системы неравенств

$$\begin{cases} x-2y+3\le 0, \\ 2x+3y-22\le 0, \\ 4x-y-2\ge 0. \end{cases}$$

**Решение.**

Построим прямые, соответствующие неравенствам системы, и определим области решений каждого неравенства.

Первая прямая имеет уравнение $x-2y+3=0$. Отсюда

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}.$$

Найдем координаты некоторых двух точек прямой. Положим $x = 1$, тогда из уравнения прямой найдем $y = 2$. При $x = 5$ имеем $y = 4$. Таким образом, получили точки (1; 2) и (5; 4). Отметим точки и построим прямую (*рисунок 2.13*).

Возьмем некоторую точку, которая не лежит на прямой, например, начало координат *O*(0; 0), и подставим её координаты в первое неравенство системы:

$$0 - 2 \cdot 0 + 3 \le 0 \quad (3 \le 0).$$

Получили неверное неравенство. Значит, первое неравенство определяет полуплоскость, не содержащую точку *O*(0; 0). На *рисунке 2.13* отметим полуплоскость диагональной штриховкой.

Уравнение второй прямой $2x + 3y - 22 = 0$, выразим *y* через *x*, получим

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{22}{3}.$$

Пусть $x = 2$, тогда из уравнения прямой $y = 6$. Полагая $x = 5$, получим $y = 4$. Таким образом, найдены две точки прямой: (2; 6) и (5; 4). Отметим точки и построим прямую (*рисунок 2.13*).

Подставим во второе неравенство системы координаты точки *O*(0; 0):

$$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 22 \le 0 \quad (-22 \le 0).$$

Получили верное неравенство. Значит, второе неравенство определяет полуплоскость, содержащую начало координат. Она на *рисунке 2.13* отмечена горизонтальной штриховкой.

Третья прямая определяется уравнением $4x - y - 2 = 0$, отсюда $y = 4x - 2$.

Построим прямую по двум её точкам (1; 2) и (2; 6).

Подставим в третье неравенство системы координаты точки *O*(0; 0):

$$4 \cdot 0 - 0 - 2 \ge 0 \quad (-2 \ge 0).$$

Получили неверное неравенство. Значит, третье неравенство определяет полуплоскость, не содержащую начало координат $O(0;0)$. Она на *рисунке 2.13* отмечена вертикальной штриховкой.

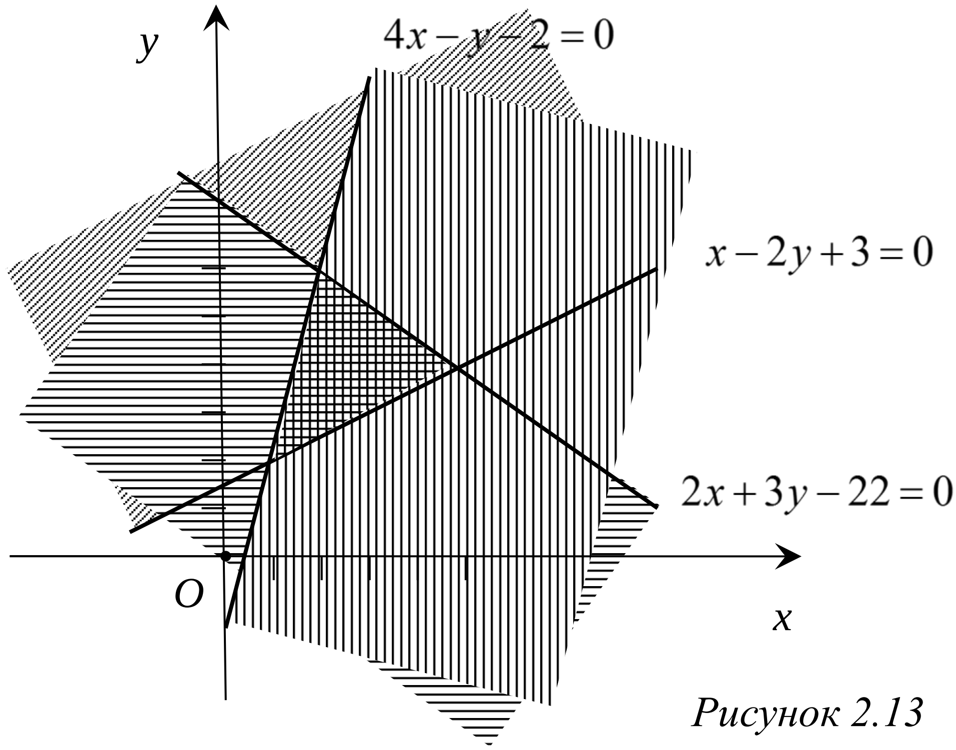



*Рисунок 2.13*

Найдем общую часть полуплоскостей решений неравенств системы и отметим её решетчатой штриховкой.

**Вопросы**

1. Какой угол называется углом наклона прямой к оси *Ox*? Что называется угловым коэффициентом прямой?

2. Какой вид имеет уравнение прямой: 1) с угловым коэффициентом; 2) проходящей через данную точку в данном направлении; 3) проходящей через две данные точки; 4) «в отрезках»; 5) общее?

3. Какой вид имеет уравнение прямой, параллельной оси *Ox*? Какой вид имеет уравнение прямой, параллельной оси *Oy*?

4. Как найти угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки?

5. Как найти угол между двумя прямыми на плоскости?

6. Каково условие параллельности двух прямых на плоскости?

7. Каково условие перпендикулярности двух прямых на плоскости?

8. Как найти расстояние от точки до прямой на плоскости?

9. Как определить, какую полуплоскость определяет неравенство первой степени?

10. Что является областью решений системы неравенств?

## Задания

**1.** Стороны *AB*, *BC*, *AC* треугольника *ABC* заданы соответственно уравнениями: $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.

Ответ: $A(2;\,-1)$, $B(-1;\,3)$, $C(2;\,4)$.

**2.** Дан треугольник *ABC* с вершинами в точках $A(1;\,5)$, $B(2;\,0)$, $C(3;\,1)$. Составить уравнения стороны *AC*, высоты *CK* и медианы *BM*.

Ответ: *AC*: $2x+y-7=0$; *CK*: $x-5y+2=0$; *BM*: $x=2$.

**3.** Определить острый угол $\varphi$ между прямыми: $5x-y+7=0$ и $3x+2y=0$.

Ответ: $\varphi=45°$.

**4.** Установить, какие из следующих пар прямых перпендикулярны:

а) $3x-y+5=0$, $x+3y-1=0$;

б) $3x-4y+1=0$, $4x-3y+7=0$;

в) $6x-15y+7=0$, $10x+4y-3=0$;

г) $9x-12y+5=0$, $8x+6y-13=0$;

д) $7x-2y+1=0$, $4x+6y+17=0$;

е) $5x-7y+3=0$, $3x+3y-5=0$.

Ответ: а), в), г).

**5.** Дана прямая $2x+3y+4=0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;\,1)$

а) параллельно данной прямой;

б) перпендикулярно данной прямой.

Ответ: а) $2x+3y-7=0$; б) $3x-2y-4=0$.

**6.** Найти точку Q, симметричную точке $P(-5;\,13)$ относительно прямой $2x-3y-3=0$.

Ответ: $Q(11;\,-11)$.

**7.** Составить уравнения прямых, проходящих через вершины треугольника $A(5;\,-4)$, $B(-1;\,3)$, $C(-3;\,-2)$ параллельно противоположным сторонам.

Ответ: $5x-2y-33=0$, $x+4y-11=0$, $7x+6y+33=0$.

**8.** Установить, какие из следующих пар прямых параллельны:

а) $3x+5y-4=0$, $6x+10y+7=0$;

б) $2x-4y+3=0$, $x-2y=0$;

в) $3x+15y+7=0$, $y=5x+1$;

г) $2x-1=0$, $x+3=0$;

д) $y+3=0$, $5y-7=0$.

Ответ: а), б), г), д).

**9.** Дан треугольник с вершинами в точках $A(1;\,0)$, $B(2;\,3)$, $C(3;\,1)$. Вычислить длину высоты *BD* и длину отрезка *AD*.

Ответ: $BD=\sqrt{5}$, $AD=\sqrt{5}$.

**10.** Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8=0$ и уравнение его диагонали $2x+y+4=0$. Написать уравнения остальных сторон ромба, зная, что точка $(-9;\,-1)$ лежит на стороне ромба, параллельной данной.

Ответ: $x+3y+12=0$, $3x-y-4=0$, $3x-y+16=0$.

## 2.4 Кривые второго порядка

***Линией (кривой) второго порядка*** называется линия, определяемая общим уравнение второй степени

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{2.22}$$

где $A$, $B$ и $C$ не равны нулю одновременно.

Уравнение (2.22) называется ***общим уравнением кривой второго порядка.***

Кривыми второго порядка являются окружность, эллипс, гипербола и парабола. При этом возможны случаи вырождения: для эллипса (окружности) – в точку или мнимый эллипс (окружность), для гиперболы – в пару пересекающихся прямых, для параболы – в пару параллельных прямых.

### 2.4.1 Окружность

***Окружностью*** называется геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (центра).

***Уравнение окружности*** радиуса $R$ с центром в точке $C(x_0;\ y_0)$ (*рисунок 2.14*) имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{2.23}$$

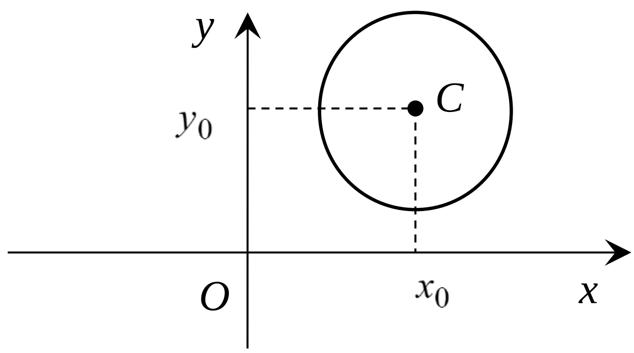



*Рисунок 2.14*

При $A = C \neq 0$ и $B = 0$ уравнение (2.22) определяет окружность и принимает вид

$$Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{2.24}$$

### 2.4.2 Эллипс

***Эллипсом*** называется геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть постоянная величина, большая, чем расстояние между фокусами.

***Каноническое*** (простейшее) ***уравнение эллипса*** имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2.25)$$

где $a$ и $b$ – полуоси эллипса.

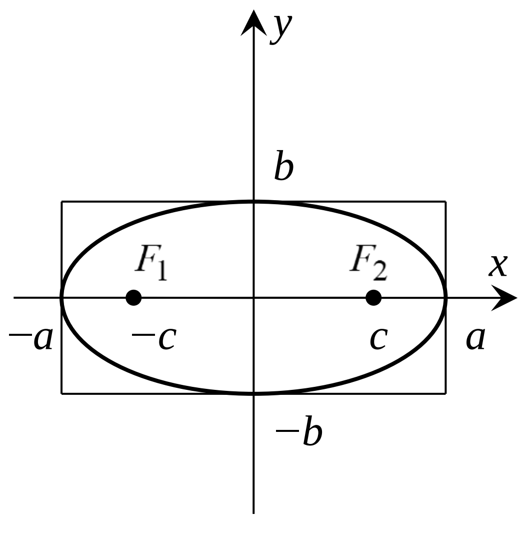
Полуоси эллипса $a$, $b$ и $c$ – половина расстояния между фокусами, связаны следующим соотношением:

$$b^2=a^2-c^2. \qquad (2.26)$$

Вершинами эллипса являются точки с координатами $(\pm a;\ 0)$ и $(0;\ \pm b)$.

Если $a>b$, то фокусы эллипса находятся на оси $Ox$: $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$ (*рисунок 2.15, а*).

Если $a<b$, то фокусы эллипса находятся на оси $Oy$: $F_1(0;\ -c)$, $F_2(0;\ c)$ (*рисунок 2.15, б*).



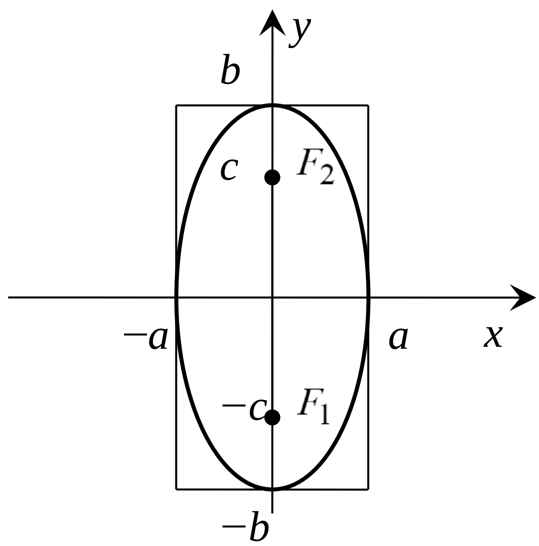




*Рисунок 2.15*

***Эксцентриситетом эллипса*** называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси.

При $a>b$ эксцентриситет эллипса определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{a}, \qquad (2.27)$$

при $a < b$ – по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{b}. \qquad (2.28)$$

Так как в первом случае $0 < c < a$, а во втором – $0 < c < b$, то $0 < \varepsilon < 1$.

Эксцентриситет характеризует форму эллипса: чем больше значение эксцентриситета, тем эллипс более «растянут» вдоль большей оси; чем ближе значение эксцентриситета к нулю, тем эллипс ближе по форме к окружности.

### 2.4.3 Гипербола

***Гиперболой*** называется геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух данных точек (фокусов) есть постоянная величина, причем меньшая, чем расстояние между фокусами.

Если фокусы гиперболы $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$ расположены на оси $Ox$ (*рисунок 2.16, а*), то ***каноническое уравнение гиперболы*** имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (2.29)$$

где $a$ – действительная, $b$ – мнимая полуоси гиперболы,

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (2.30)$$

Вершины гиперболы находятся в точках с координатами $(\pm a;\ 0)$.

Если фокусы гиперболы $F_1(0;\ -c)$, $F_2(0;\ c)$ расположены на оси $Oy$ (*рисунок 2.16, б*), то ***каноническое уравнение гиперболы*** имеет вид

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \tag{2.31}$$

где $a$ – мнимая, $b$ – действительная полуоси гиперболы,

$$a^2=b^2-c^2. \tag{2.32}$$

Вершины гиперболы находятся в точках с координатами $(0; \pm b)$.

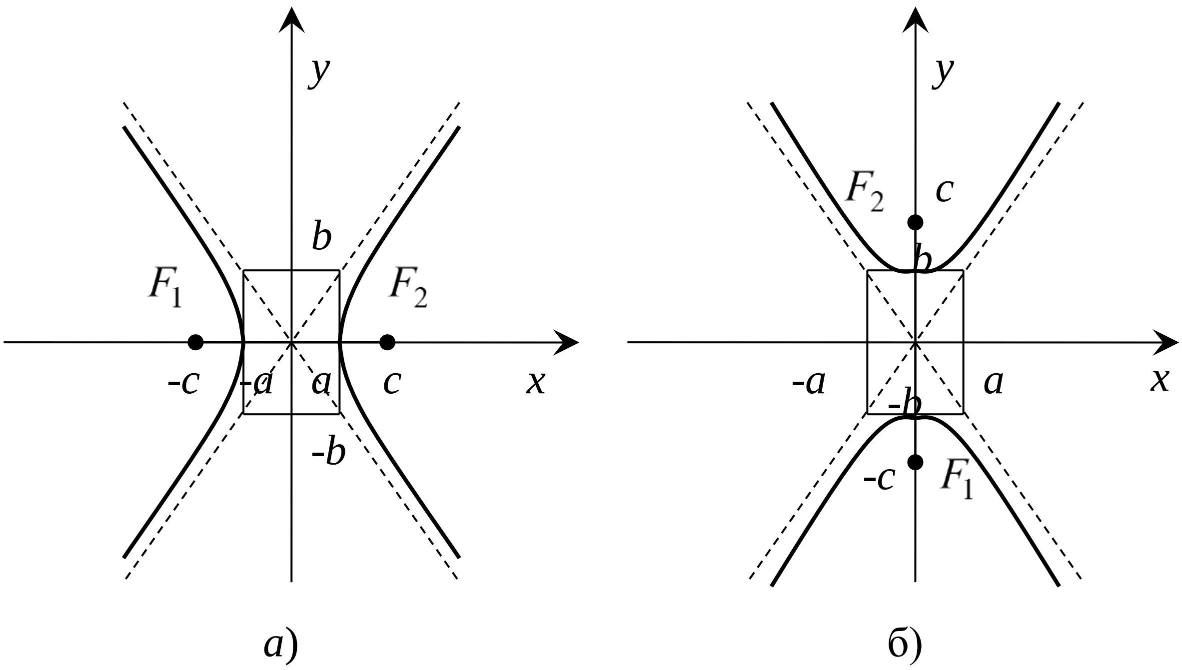



*Рисунок 2.16*

Гиперболы, определяемые уравнениями (2.29) и (2.31) называется ***сопряженными***.

***Асимптотой*** гиперболы называется прямая, проходящая через начало координат и неограниченно приближающаяся к ветвям гиперболы при $x \to \pm\infty$.

Асимптотами гиперболы являются прямые, определяемые уравнениями

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{2.33}$$

Заметим, что асимптоты гиперболы содержат диагонали основного прямоугольника гиперболы (прямоугольника со сторонами $2a$ и $2b$, с центром в начале координат).

Сопряженные гиперболы имеют общие асимптоты.

***Эксцентриситетом гиперболы*** называется отношение расстояния между фокусами к действительной оси.

Если фокусы гиперболы расположены на оси $Ox$, то эксцентриситет гиперболы определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{2.34}$$

Если фокусы гиперболы на оси $Oy$, то по формуле

$$\varepsilon = \frac{c}{b}. \tag{2.35}$$

Эксцентриситет гиперболы $\varepsilon > 1$. Чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут ее основной прямоугольник вдоль действительной оси.

### 2.4.4 Парабола

***Параболой*** называется геометрическое место точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директрисы).

Расстояние от фокуса $F$ до директрисы называется параметром параболы и обозначается $p$ ($p$>0).

***Каноническое уравнение параболы*** с фокусом в точке $F(\frac{p}{2};\ 0)$ и директрисой $x = -\frac{p}{2}$ (*рисунок 2.17, а*) имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{2.36}$$

Парабола симметрична относительно оси $Ox$, проходит через точки с координатами $\left(\frac{p}{2}; \pm p\right)$, её вершина находится в начале координат $O(0;\ 0)$.

***Каноническое уравнение параболы*** с фокусом в точке $F(-\frac{p}{2};\ 0)$ и директрисой $x = \frac{p}{2}$ (*рисунок 2.17, б*) имеет вид

$$y^2 = -2px. \tag{2.37}$$

Вершина параболы в начале координат $O(0;\,0)$. Парабола симметрична относительно оси $Ox$ и проходит через точки с координатами $\left(-\frac{p}{2};\,\pm p\right)$.

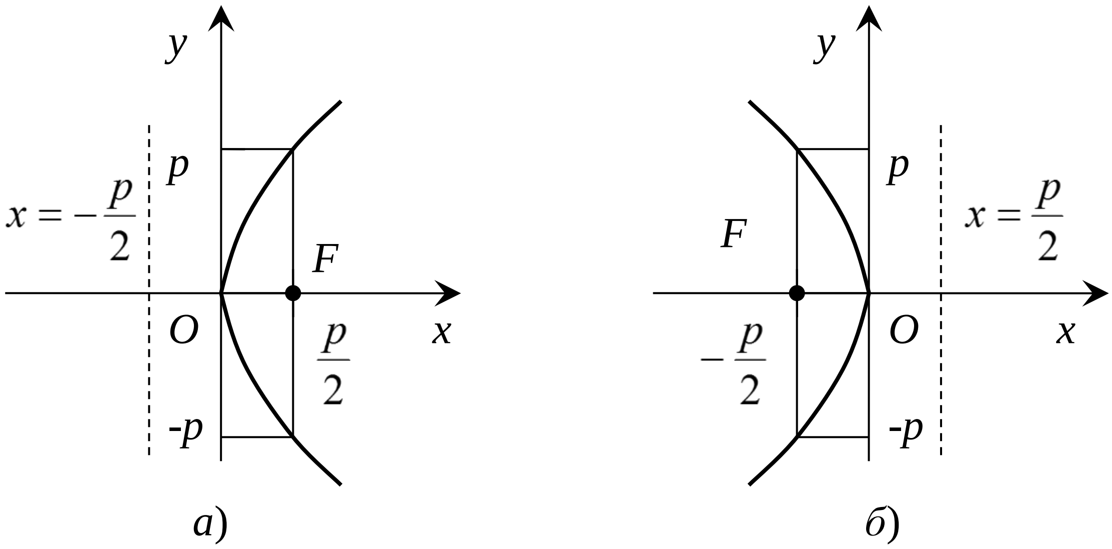



*Рисунок 2.17*

***Каноническое уравнение параболы*** с фокусом в точке $F(0;\,\frac{p}{2})$ и директрисой $y=-\frac{p}{2}$ (*рисунок 2.18, а*) имеет вид

$$x^2 = 2py. \tag{2.38}$$

Парабола симметрична относительно оси $Oy$, проходит через точки с координатами $\left(\pm p;\,\frac{p}{2}\right)$, её вершина – в начале координат $O(0;\,0)$.

***Каноническое уравнение параболы*** с фокусом в точке $F(0;\,-\frac{p}{2})$ и директрисой $y=\frac{p}{2}$ (*рисунок 2.18, б*) имеет вид

$$x^2 = -2py. \tag{2.39}$$

Вершина параболы находится в начале координат. Парабола симметрична относительно оси $Oy$, проходит через точки с координатами $\left(\pm p; -\dfrac{p}{2}\right)$.

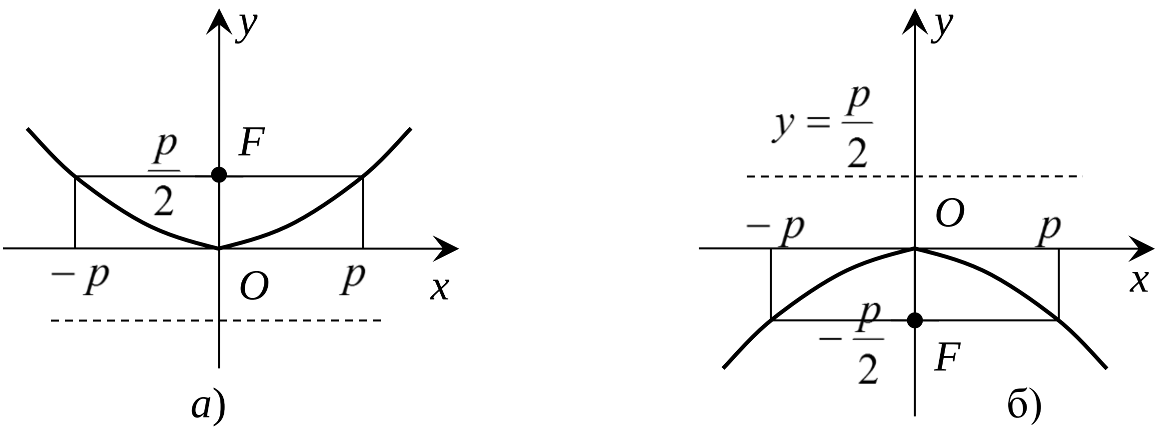



*Рисунок 2.18*

### 2.4.5 Кривые второго порядка с осями симметрии, параллельными координатным осям

Если в общем уравнении кривой второго порядка (2.22) коэффициент при произведении переменных равен нулю $(B = 0)$, то оно определяет кривую второго порядка с осями симметрии, параллельными осям координат:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \qquad (2.40)$$

Если коэффициенты $A$ и $C$ имеют одинаковые знаки ( $A \cdot C > 0$ ), то уравнение (2.40) является уравнением эллипса.

Если коэффициенты $A$ и $C$ имеют противоположные знаки ( $A \cdot C < 0$ ), то уравнение (2.40) определяет гиперболу.

Если один из коэффициентов $A$ или $C$ равен нулю ( $A \cdot C = 0$ ), то уравнение (2.40) является уравнением параболы.

**Пример 2.17.** Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением, и построить её.

$16x^2 + 25y^2 + 96x + 250y + 369 = 0$.

**Решение.**

Сравнивая уравнение с общим видом уравнения второго порядка (2.40), имеем: $A=16$, $B=0$, $C=25$.

Уравнение определяет эллипс с осями симметрии, параллельными осям координат, так как $A\cdot C=16\cdot 25=400>0$ и $B=0$.

Преобразуем уравнение (выделим полные квадраты):

$$16\left(x^2-6x\right)+25\left(y^2+10y\right)+369=0,$$

$$16\left(x^2-6x+9-9\right)+25\left(y^2+10y+25-25\right)+369=0,$$

$$16\left(x^2-6x+9\right)-144+25\left(y^2+10y+25\right)-625+369=0,$$

$$16(x-3)^2+25(y+5)^2=400,$$

$$\frac{(x-3)^2}{25}+\frac{(y+5)^2}{16}=1.$$

Перейдем к новой системе координат $O'x'y'$ с помощью параллельного переноса:

$$\begin{cases} x'=x-3; \\ y'=y+5. \end{cases}$$

Начало новой системы координат находится в точке $O'(3;-5)$, а её оси $O'x'$ и $O'y'$ параллельны осям системы координат $Oxy$. Уравнение линии в новой системе координат

$$\frac{(x')^2}{25}+\frac{(y')^2}{16}=1.$$

Получили каноническое уравнение эллипса (2.24), причем $a=5$, $b=4$. Так как $a>b$, то оно определяет эллипс с фокусами на оси $O'x'$. Вершины эллипса – $(\pm 5;\ 0)$, $(0;\ \pm 4)$.

В системе координат $O'x'y'$ построим прямоугольник со сторонами $2a=10$ и $2b=8$ с центром в начале системы координат $O'$. Отметим вершины эллипса – точки $(\pm 5;\ 0)$, $(0;\ \pm 4)$ и построим эллипс (*рисунок 2.19*).

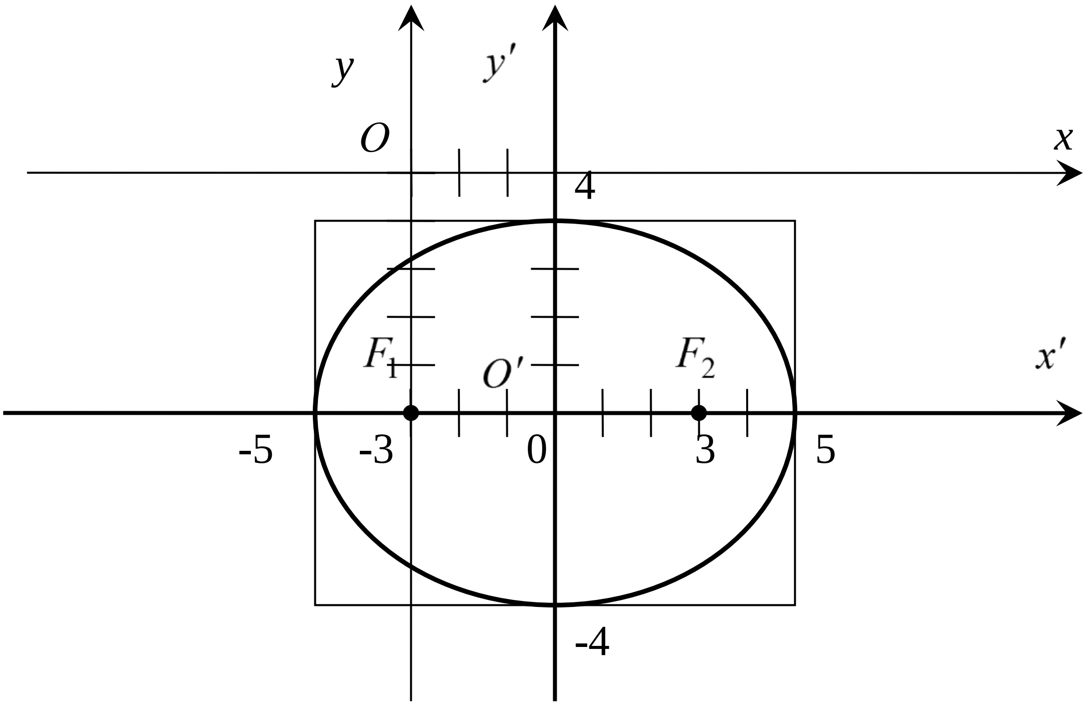



*Рисунок 2.19*

Определим координаты фокусов эллипса. По формуле (2.26)
$b^2 = a^2 - c^2$.
Отсюда
$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$,
$c = 3$.
Таким образом, в новой системе координат $O'x'y'$ фокусы эллипса $F_1(-3;\ 0)$ и $F_2(3;\ 0)$.

**Пример 2.18.** Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением, и построить её.

$$9x^2 - 16y^2 - 36x + 128y - 364 = 0.$$

**Решение.**
В уравнении линии $A = 9$, $B = 0$, $C = -16$. Так как $A \cdot C < 0$, то уравнение определяет гиперболу.
Преобразуем уравнение:

$$9(x^2 - 4x) - 16(y^2 - 8y) - 364 = 0,$$

$$9(x^2 - 4x + 4 - 4) - 16(y^2 - 8y + 16 - 16) - 364 = 0,$$

$$9(x^2-4x+4)-36-16(y^2-8y+16)+256-364=0,$$

$$9(x-2)^2-16(y-4)^2=144,$$

$$\frac{(x-2)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{9}=1.$$

Перейдем к новой системе координат $O'x'y'$ с помощью параллельного переноса:

$$\begin{cases} x'=x-2; \\ y'=y-4. \end{cases}$$

Начало новой системы координат находится в точке $O'(2;\ 4)$, а её оси $O'x'$ и $O'y'$ параллельны осям старой системы координат $Oxy$. Уравнение линии в новой системе координат

$$\frac{(x')^2}{16}-\frac{(y')^2}{9}=1.$$

Получили каноническое уравнение гиперболы (2.29) с фокусами, расположенными на оси $O'x'$, причем действительная полуось $a=4$, мнимая полуось $b=3$. Вершины гиперболы – точки с координатами $(\pm 4;\ 0)$.

Определим координаты фокусов гиперболы. По формуле (2.30)

$b^2=c^2-a^2$.

Отсюда

$c^2=a^2+b^2=16+9=25,$

$c=5$.

Таким образом, $F_1(-5;\ 0)$ и $F_2(5;\ 0)$ – фокусы гиперболы в новой системе координат $O'x'y'$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

Получим $y=\pm\dfrac{3}{4}x$.

В новой системе координат $O'x'y'$ построим прямоугольник со сторонами $2a=8$ и $2b=6$, с центром в начале системы координат $O'$. Отметим вершины – точки $(\pm 4;\, 0)$. Проведем диагонали прямоугольника и продолжим их вне прямоугольника, получим асимптоты гиперболы. В новой системе координат $O'x'y'$ построим гиперболу (*рисунок 2.20*).

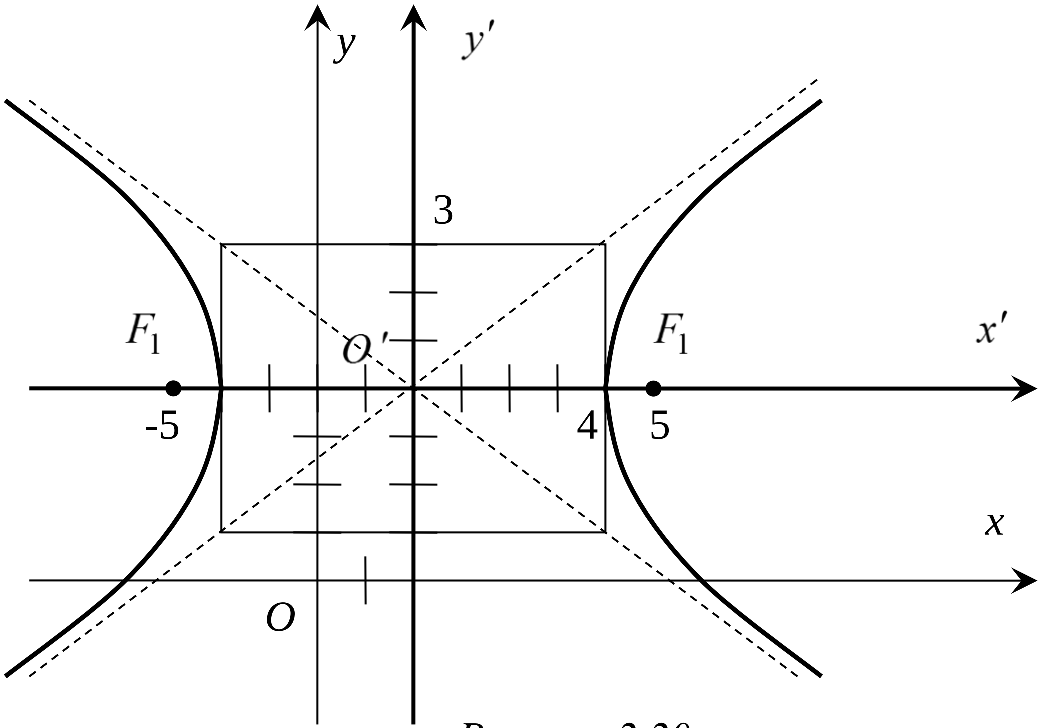



*Рисунок 2.20*

**Пример 2.19.** Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением, и построить её.

$$x^2 + 10x - 2y + 11 = 0.$$

**Решение.**

В уравнении линии $A = 1,\ B = 0,\ C = 0$.

Уравнение определяет параболу, так как $A \cdot C = 0$.

Преобразуем уравнение (выделим полный квадрат):

$$x^2 + 10x + 25 - 2y + 11 - 25 = 0,$$

$$(x+5)^2 = 2y + 14,$$

$$(x+5)^2 = 2(y+7).$$

Зададим параллельный перенос: $\begin{cases} x' = x + 5, \\ y' = y + 7. \end{cases}$

Начало новой системы координат $O'x'y'$ – в точке $O'(-5;\,-7)$, а её оси $O'x'$ и $O'y'$ параллельны осям старой системы координат $Oxy$.

Уравнение линии в новой системе координат

$(x')^2 = 2y'$.

Получилось каноническое уравнение параболы (2.40), симметричной относительно оси $O'y'$ с параметром $p = 1$.

Построим новую систему координат с началом в точке $O'(-5;\,-7)$ и осями $Ox'$ и $Oy'$, параллельными осям $Ox$ и $Oy$, соответственно.

В новой системе координат $Ox'y'$ построим параболу, определяемую уравнением $(x')^2 = 2y'$: вершина параболы находится в начале координат $O'$, парабола проходит через точки с координатами $\left(\pm p;\ \dfrac{p}{2}\right)$, т. е. через точки $\left(\pm 1;\ \dfrac{1}{2}\right)$ (*рисунок 2.21*).

Фокус параболы $F$ в новой системе координат $O'x'y'$ имеет координаты $\left(\dfrac{p}{2};\ 0\right)$, т. е. $F\left(\dfrac{1}{2};\ 0\right)$.

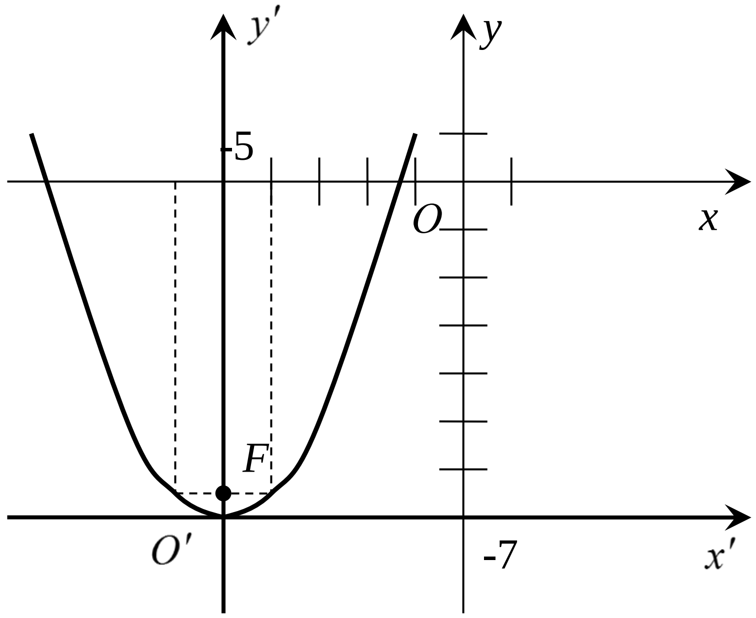



*Рисунок 2.21*

**Пример 2.20.** Установить вид кривой второго порядка, заданной уравнением:

$4x^2 - y^2 + 8x - 8y - 12 = 0$.

**Решение.**

Сравнивая уравнение с общим видом уравнения второго порядка (2.40), имеем: $A = 4$, $B = 0$, $C = -1$. Линия, определяемая уравнением, относится к гиперболическому типу, так как $A \cdot C = 4 \cdot (-1) < 0$.

Преобразуем уравнение:

$$4(x^2 + 2x + 1) - (y^2 + 8y + 16) - 4 + 16 - 12 = 0,$$

$$4(x+1)^2 - (y+4)^2 = 0,$$

$$(2(x+1) + (y+4)) \cdot (2(x+1) - (y+4)) = 0,$$

$$(2x + y + 6)(2x - y - 2) = 0.$$

Полученное уравнение определяет две пересекающиеся прямые:

$2x + y + 6 = 0$ и $2x - y - 2 = 0$.

## Вопросы

1. Какой вид имеет уравнение окружности?

2. Каково каноническое уравнение эллипса с фокусами на оси $Ox$?

3. Каково каноническое уравнение эллипса с фокусами на оси $Oy$?

4. Каково каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси $Ox$?

5. Каково каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси $Oy$?

6. Каковы канонические уравнения парабол, симметричных относительно оси $Ox$?

7. Каковы канонические уравнения парабол, симметричных относительно оси $Oy$?

8. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты в общем уравнении кривой второго порядка (2.40), чтобы оно определяло окружность? эллипс? гиперболу? параболу?

## Задания

**1.** Составить уравнение окружности в каждом из следующих случаев:

а) центр окружности совпадает с точкой $C(2;\,-3)$ и её радиус $R=7$;

б) окружность проходит через начало координат и её центр совпадает с точкой $C(6;\,-8)$;

в) окружность проходит через точку $A(2;\,6)$ и её центр совпадает с точкой $C(-1;\,2)$.

Ответ: а) $(x-2)^2+(y+3)^2=49$; б) $(x-6)^2+(y+8)^2=100$;

в) $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

**2.** Какие из приведенных уравнений определяют окружности? Найти центр $C$ и радиус $R$ каждой из них.

а) $x^2+y^2-2x+4y-20=0$;

б) $x^2+y^2-2x+4y+14=0$;

в) $x^2+y^2+4x-2y+5=0$.

Ответ: а) $C(1;\,-2)$, $R=5$;

б) уравнение не определяет ни кривую, ни точку на плоскости (мнимая окружность);

в) уравнение определяет единственную точку $(-2;\,1)$.

**3.** Построить эллипс, заданный уравнением, найти его фокусы и эксцентриситет:

а) $x^2+4y^2=16$;

б) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

**4.** Написать каноническое уравнение эллипса, зная, что

а) расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось $b=3$;

б) большая полуось $a=6$, а эксцентриситет $e=0{,}5$;

в) его малая ось равна 6, фокусы $F_1(0;\ 4)$ и $F_2(0;\ -4)$.

Ответ: а) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$; б) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$; в) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$.

**5.** Составить уравнение эллипса, зная, что

а) его большая ось $2a=26$, а его фокусы $F_1(-10;\ 0)$ и $F_2(14;\ 0)$;

б) его малая ось $2b=2$ и фокусы $F_1(-1;\ -1)$ и $F_2(1;\ -1)$;

в) его фокусы $F_1(-8;\ 3)$ и $F_2(4;\ 3)$ и эксцентриситет $e=\frac{3}{4}$.

Ответ: а) $\frac{(x-2)^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$; б) $\frac{x^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$;

в) $\frac{(x+2)^2}{64}+\frac{(y-3)^2}{28}=1$.

**6.** Построить гиперболу, заданную уравнением, найти фокусы, эксцентриситет и асимптоты:

а) $x^2-4y^2=16$;

б) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{9}=1$.

**7.** Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, зная, что

а) её оси $2a=10$, $2b=8$;

б) расстояние между фокусами равно 10 и ось $2b=8$;

в) расстояние между фокусами равно 10 и эксцентриситет $e=\frac{3}{2}$;

г) уравнения асимптот $y=\pm\frac{4}{3}x$ и расстояние между фокусами равно 20.

Ответ: а) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; в) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$;

г) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{64}=1.$

**8.** Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси $Oy$ симметрично относительно начала координат, зная, что

а) её полуоси $a=6$, $b=18$;

б) расстояние между фокусами равно 10 и эксцентриситет $e=\dfrac{5}{3}$;

в) уравнения асимптот $y=\pm\dfrac{12}{5}x$ и расстояние между вершинами равно 48.

Ответ: а) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{324}=-1$; б) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=-1$; в) $\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{576}=-1$.

**9.** Построить параболу, заданную уравнением, найти её параметр, фокус и директрису:

а) $y^2=6x$;

б) $x^2=5y$;

в) $y^2=-4x$;

г) $x^2=-y$.

Ответ: а) $p=3$, $F(1{,}5;\ 0)$, $x=-1{,}5$;

б) $p=2{,}5$, $F(0;\ 1{,}25)$, $y=-1{,}25$;

в) $p=2$, $F(-2;\ 0)$, $x=2$;

г) $p=0{,}5$, $F(0;\ -0{,}25)$, $y=0{,}25$.

**10.** Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что

а) парабола расположена симметрично относительно оси $Ox$ и проходит через точку $B(-1;\ 3)$;

б) парабола расположена симметрично относительно оси $Oy$ и проходит через точку $D(4;\ -8)$.

Ответ: а) $y^2=-9x$; б) $x^2=-2y$.

**11.** Составить уравнение параболы, если дан фокус $F(-7;\ 0)$ и уравнение директрисы $x-7=0$.

Ответ: $y^2=-28x$.

**12.** Построить кривую, заданную уравнением:

а) $x^2+4x+4y^2=0$;

б) $x^2+6x+y+7=0$;

в) $x^2-8x-4y^2=0$;

г) $y^2-6y-x^2+2x=0$;

д) $y^2+8y-2x+22=0$;

е) $2x^2-8x+y^2-6y+1=0$.

## 2.5 Полярная система координат

### 2.5.1 Полярные координаты точки

***Полярная система координат*** задается точкой *O*, называемой полюсом, лучом *Op*, называемым полярной осью, и единицей масштаба (*рисунок 2.22*).

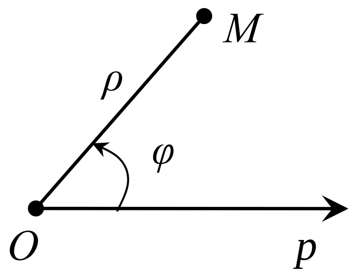



*Рисунок 2.22*

Положение точки *M* на плоскости определяется полярными координатами: полярным радиусом $\rho$ и полярным углом $\varphi$.

Полярным углом $\varphi$ называется угол, образованный полярной осью *Op* и отрезком *OM*. Положительным направлением отсчета полярного угла считается направление против часовой стрелки, отрицательным – по часовой стрелке.

Полярный радиус $\rho$ равен расстоянию от точки $O$ до точки $M$: $\rho = OM$. Отрицательные значения $\rho$ откладываются на соответствующем луче в противоположную сторону от полюса $O$.

## Связь между прямоугольными и полярными координатами точки

Совместим полюс $O$ с началом координат системы $Ox$, а полярную ось – с положительным направлением оси $Ox$.

Пусть $(x;\ y)$ – прямоугольные координаты точки $M$, $(\rho;\ \varphi)$ – её полярные координаты (*рисунок 2.23*).

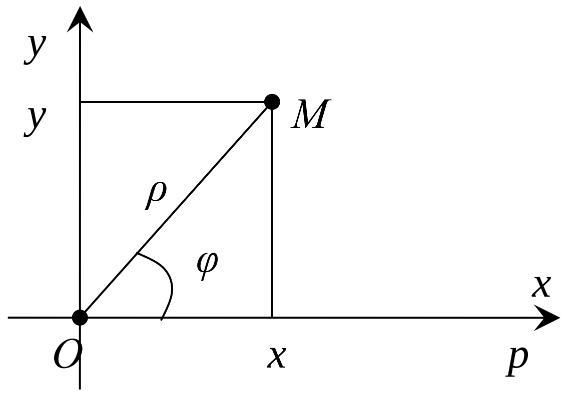



*Рисунок 2.23*

Прямоугольные координаты точки $(x;\ y)$ выражаются через полярные координаты $(\rho;\ \varphi)$ следующим образом:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos\varphi, \\ y = \rho \cdot \sin\varphi. \end{cases} \qquad (2.41)$$

Полярные координаты точки $(\rho;\ \varphi)$ можно выразить через её прямоугольные координаты $(x; y)$:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases} \qquad (2.42)$$

Определяя величину $\varphi$, следует установить (по знакам $x$ и $y$) четверть, в которой лежит искомый угол.

Если $\varphi$ в 1-ой или 4-ой четвертях, то

$$\varphi = arctg\frac{y}{x}; \qquad (2.43)$$

если $\varphi$ во 2-ой четверти, то

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} + \pi; \qquad (2.44)$$

если $\varphi$ в 3-ой четверти, то

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} - \pi. \qquad (2.45)$$

**Пример 2.21.** В прямоугольной системе координат точка $M$ имеет координаты $(-1;\ \sqrt{3})$. Найти полярные координаты точки.

**Решение.**

По формулам (2.42) находим $\rho$ *и* $tg\varphi$:

$\rho = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$, $tg\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$.

Так как точка $M$ лежит во 2-ой четверти, то по формуле (2.44)

$\varphi = arctg(-\sqrt{3}) + \pi = -arctg\sqrt{3} + \pi = -\dfrac{\pi}{3} + \pi = \dfrac{2\pi}{3}$.

В полярной системе координат $M\left(2;\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$.

### 2.5.2 Уравнение линии в полярной системе координат

Уравнение $F(\rho;\ \varphi) = 0$ называется ***уравнением линии в полярной системе координат***, если координаты любой точки, лежащей на линии, и только они, удовлетворяют этому уравнению.

На *рисунках 2.24* и *2.25* приведены некоторые кривые и указаны их уравнения.

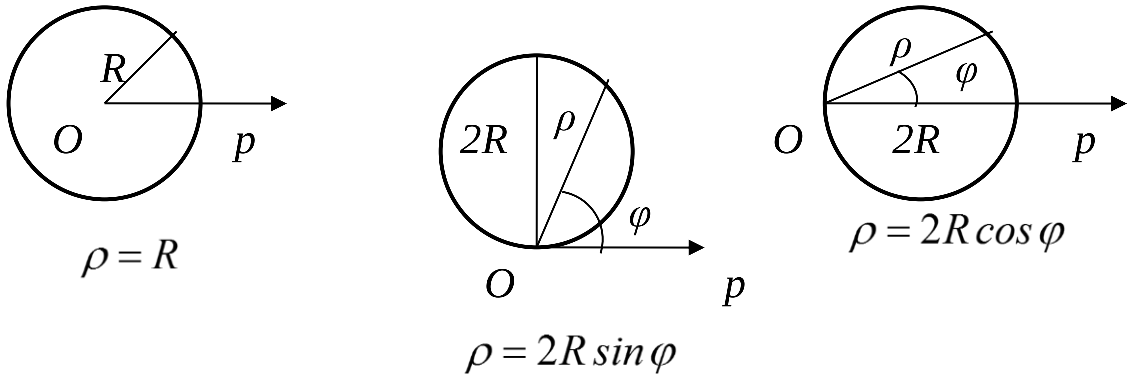



*Рисунок 2.24 – Окружность радиуса R*

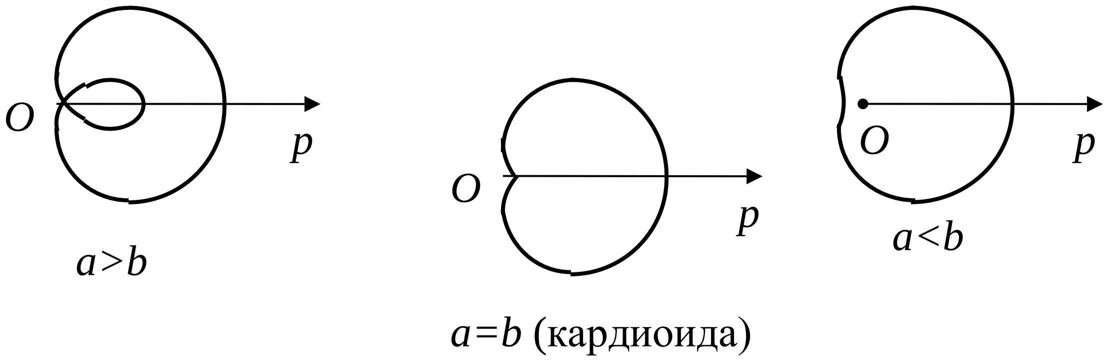



*Рисунок 2.25 – Улитка Паскаля*

**Пример 2.22.** Построить в полярной системе координат линию

$$\rho = 3\cos 2\varphi .$$

**Решение.**

Составим расчетную таблицу. Придавая $\varphi$ произвольные значения, $-\pi < \varphi \le \pi$, определяем значения $\rho = 3\cos 2\varphi$. Сначала найдем значения полярного радиуса при $0° \le \varphi \le 180°$ (*таблица 2.3*).

*Таблица 2.3 – Значения функции $\rho = 3\cos 2\varphi$ при $0° \le \varphi \le 180°$*

| $\varphi$ | 0° | 15° | 30° | 45° | 75° | 90° | 105° | 120° | 135° | 150° | 165° | 180° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\varphi$ | 0° | 30° | 60° | 90° | 150° | 180° | 210° | 240° | 270° | 300° | 330° | 360° |
| $cos2\varphi$ | 1 | 0,87 | 0,5 | 0 | −0,5 | −0,87 | −1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 0,87 | 1 |
| $\rho=$ $=3cos2\varphi$ | 3 | 2,6 | 1,5 | 0 | −1,5 | −2,6 | −3 | −1,5 | 0 | 1,5 | 2,6 | 3 |

Учитывая четность функции $y = \cos x$, найдем значения полярного радиуса $\rho$ при $-180° < \varphi < 0°$ (*таблица 2.4*).

*Таблица 2.4 – Значения функции $\rho = 3\cos 2\varphi$ при $-180° < \varphi < 0°$*

| $\varphi$ | −15° | −30° | −45° | −75° | −90° | −105° | −120° | −135° | −150° | −165° |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2\varphi$ | −30 | −60 | −90 | −150 | −180 | −210 | −240 | −270 | −300 | −330 |
| $cos2\varphi$ | 0,87 | 0,5 | 0 | −0,5 | −0,87 | −1 | −0,5 | 0 | 0,5 | 0,87 |
| $\rho=$ $=3cos2\varphi$ | 2,6 | 1,5 | 0 | −1,5 | −2,6 | −3 | −1,5 | 0 | 1,5 | 2,6 |

Построим кривую (*рисунок 2.26*). Полученная кривая называется четырехлепестковой розой.

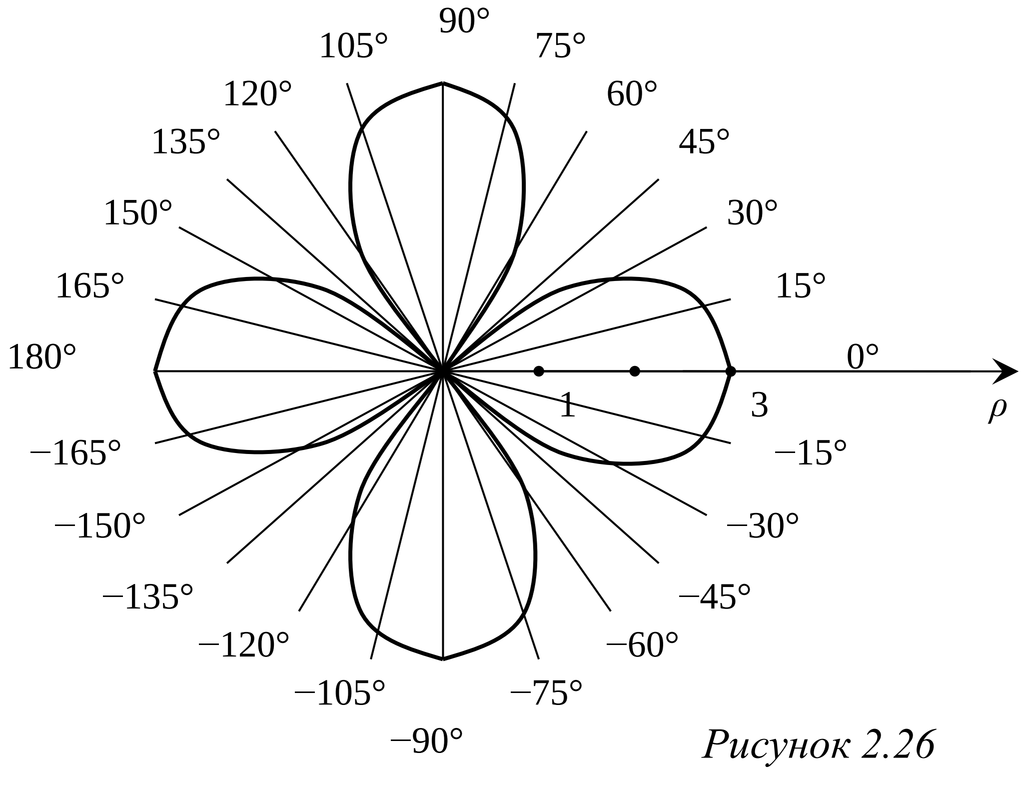



*Рисунок 2.26*

## Вопросы

1. Как задается полярная система координат?
2. Что называется полярными координатами точки?
3. Как перейти от полярных координат точки к прямоугольным?
4. Как перейти от прямоугольных координат точки к полярным?
5. Какой вид имеет уравнение линии в полярной системе координат?
6. Какой вид имеет уравнение окружности в полярной системе координат?
7. Какой вид имеет уравнение кардиоиды?

## Задания

**1.** В полярной системе координат $(\rho;\ \varphi)$ построить точки $A(3;\ 0)$, $B\left(2;\ \frac{\pi}{4}\right)$, $A\left(3;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $A(2;\ \pi)$, $A\left(3;\ \frac{3\pi}{2}\right)$.

**2.** Построить точки $A\left(-2;\ \frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(3;\ -\frac{\pi}{2}\right)$, $C(-4;\ -\pi)$, $D\left(-3;\ \frac{2\pi}{3}\right)$ в полярной системе координат.

**3.** Построить линию $\rho = 2 + 2cos\varphi$.

**4.** Построить кривые:

а) $\rho = 3 - 2\,cos\,\varphi$;

б) $\rho = 2 + cos\,3\varphi$;

в) $\rho = 1 - sin\,3\varphi$.

**5.** Преобразовать к полярным координатам уравнения линий:

а) $x^2 - y^2 = a^2$;

б) $x^2 + y^2 = a^2$;

в) $x^2 + y^2 = ax$;

г) $y = x$;

д) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Ответ: а) $\rho^2 = \dfrac{a^2}{cos\,2\varphi}$;

б) $\rho = a$;

в) $\rho = a\,cos\,\varphi$;

г) $tg\varphi = 1$;

д) $\rho^2 = a^2\,cos\,2\varphi$.

**6.** Преобразовать к декартовым (прямоугольным) координатам уравнения линий и построить линии:

а) $\rho\,cos\,\varphi = a$;

б) $\rho = 2a\,sin\,\varphi$;

в) $\rho^2\,sin\,2\varphi = 2a^2$;

г) $\rho = a(1 + cos\,\varphi)$.

Ответ: а) $x = a$;

б) $x^2 + y^2 = 2ay$;

в) $xy = a^2$;

г) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.

# 3 ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

## 3.1 Векторы

### 3.1.1 Основные понятия. Линейные операции над векторами

***Вектором*** называется направленный отрезок $AB$ с начальной точкой $A$ и конечной точкой $B$. Обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

***Длиной (или модулем) вектора*** $\overrightarrow{AB}$ называется число $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, равное длине отрезка $AB$.

***Нулевым вектором*** называется вектор, длина которого равна нулю. Направление нулевого вектора не определено.

Вектор, длина которого равна единице, называется ***единичным.***

Векторы называются ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Векторы называются ***равными***, если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют равные длины.

Векторы называются ***компланарными***, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейными операциями над векторами называют операции сложения, вычитания векторов и умножение вектора на число.

***Произведением вектора*** $\vec{a}$ ***на число*** $\lambda$ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, имеющий длину $\left|\vec{b}\right| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно ему, если $\lambda < 0$. На *рисунке 3.1* показаны векторы, полученные умножением вектора $\vec{a}$ на (–1) и на 2.

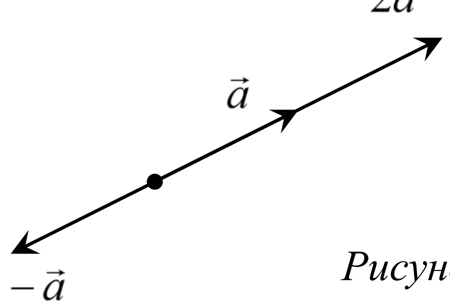
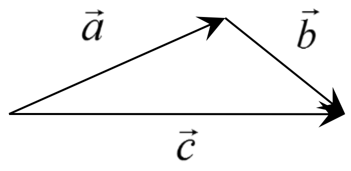
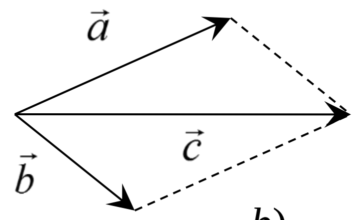



*Рисунок 3.1*

***Суммой двух векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, определяемый по правилу треугольника или параллелограмма (*рисунок 3.2*, *a*) и *b*)).




*a*)




*b*)

*Рисунок 3.2*

***Суммой нескольких векторов*** $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ..., $\vec{d}$ называется вектор $\vec{f} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + ... + \vec{d}$, который замыкает ломаную, состоящую из данных векторов (правило многоугольника) (*рисунок 3.3*).

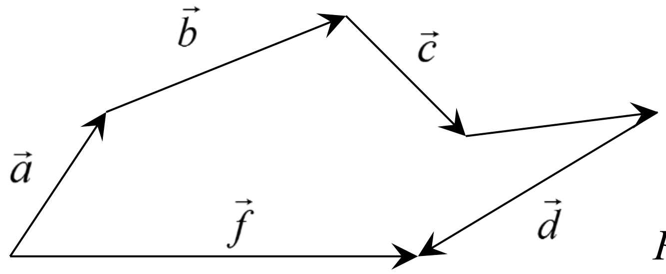



*Рисунок 3.3*

***Разностью двух векторов*** $\vec{a}$ ***и*** $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (*рисунок 3.4*).

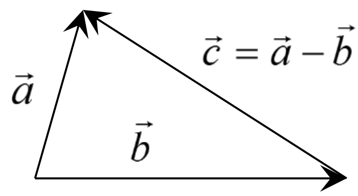



*Рисунок 3.4*

Заметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а другая – разностью (*рисунок 3.5*).

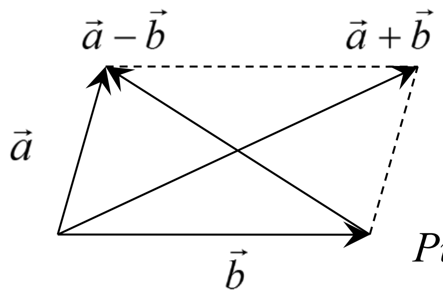



*Рисунок 3.5*

**Пример 3.1.** По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{b}-\dfrac{\vec{a}}{2}$.

**Решение.**

Отложим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ из общего начала (*рисунок 3.6*). Далее построим вектор $2\vec{a}$, он будет сонаправлен с вектором $\vec{a}$, но его длина в 2 раза больше, чем длина вектора $\vec{a}$. Вектор $-\vec{b}$ противоположно направлен по отношению к вектору $\vec{b}$, и его длина равна длине вектора $\vec{b}$. Далее по правилу параллелограмма построим сумму векторов $2\vec{a}$ и $-\vec{b}$, т. е. вектор $2\vec{a}-\vec{b}$, который является диагональю параллелограмма.

Аналогично построим вектор $\vec{b}-\dfrac{\vec{a}}{2}$, являющийся диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}$ и $-\dfrac{\vec{a}}{2}$.

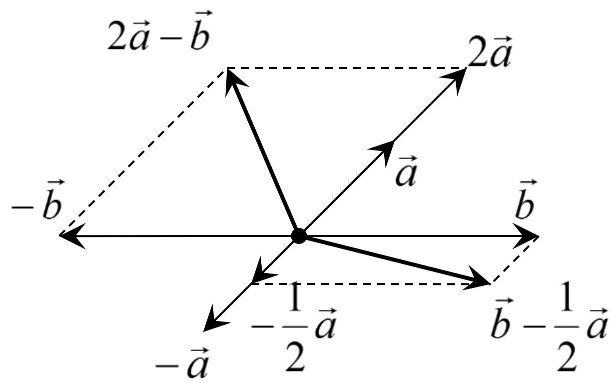



*Рисунок 3.6*

**Пример 3.2.** Доказать, что если *M* – середина отрезка *AB* и *O* – произвольная точка пространства, то выполняется равенство

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right).$$

**Решение.**

Достроим треугольник $AOB$ до параллелограмма $AOBC$ (*рисунок 3.7*).

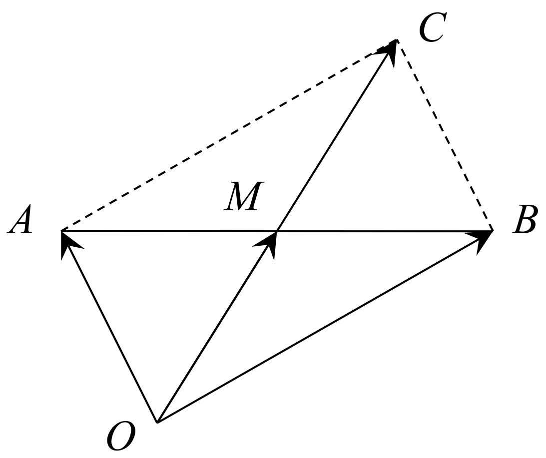



*Рисунок 3.7*

По правилу параллелограмма сложения векторов:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}.$$

Так как точка $M$ – середина $OC$, то $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$

.

**Пример 3.3.** Доказать, что если $M$ – точка пересечения медиан треугольника $ABC$, $O$ – произвольная точка пространства, то справедливо равенство

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

**Решение.**

Пусть $CC_1$ – медиана треугольника $ABC$ (*рисунок 3.8*).

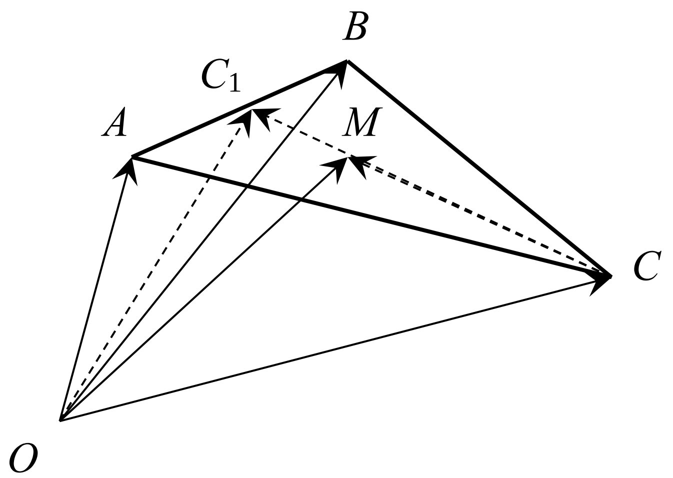



*Рисунок 3.8*

Из $\Delta OCM$ по правилу треугольника сложения векторов:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM}.$$

Так как точка пересечения медиан делит медиану в отношении 2:1, считая от вершины, то $\overrightarrow{CM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$.

Тогда $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1}$.

Из $\Delta OCC_1$ по правилу треугольников сложения векторов:

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OC_1}.$$

Отсюда $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC}$.

Получим

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1}.$$

Так как $C_1$ – середина $AB$, то $\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ **(пр. 3.2)**.

Таким образом,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OC_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

### 3.1.2 Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Длина вектора. Направляющие косинусы вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме

***Проекцией точки M на ось l*** называется основание $M_1$ перпендикуляра $MM_1$, опущенного из точки на ось (*рисунок 3.9*).

Точка $M_1$ есть точка пересечения оси $l$ и плоскости, проходящей через точку $M$ перпендикулярно оси.

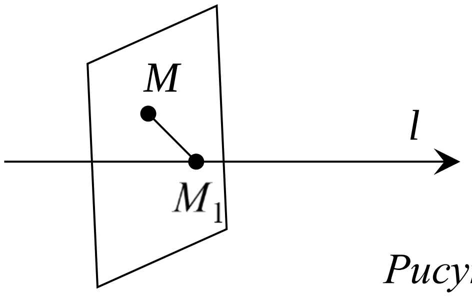



*Рисунок 3.9*

Пусть $\overrightarrow{AB}$ произвольный ненулевой вектор. $A_1$ и $B_1$ – проекции начала и конца вектора на ось $l$ (*рисунок 3.10*).

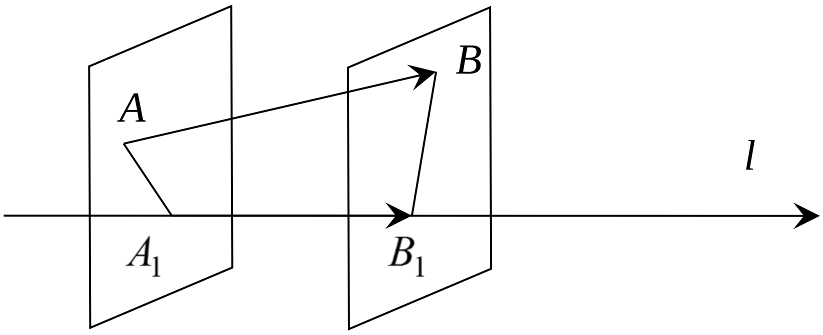



*Рисунок 3.10*

***Проекцией*** вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось $l$ называется положительное число $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось $l$ сонаправлены, и отрицательное число $-\left|\overrightarrow{AB}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось $l$ противоположно направлены, т. е.

$$np_l\,\overrightarrow{AB}=\begin{cases}\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \ \textit{если}\ \ \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow l,\\ -\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|, \ \textit{если}\ \ \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\downarrow l.\end{cases}$$

Если $A_1$ и $B_1$ совпадают, то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна нулю. Проекция нулевого вектора равна нулю.

## Свойства проекции вектора на ось

1. Проекция вектора $\vec{a}$ на ось $l$ равна произведению модуля вектора на косинус угла $\varphi$ наклона вектора $\vec{a}$ к оси $l$:

$$np_l\vec{a} = |\vec{a}| \cdot cos\,\varphi. \qquad (3.1)$$


*а*) *б*)

*Рисунок 3.11*

Если вектор образует с осью острый угол, то проекция вектора на ось положительна, так как косинус острого угла положителен (*рисунок 3.11*, *а*). Если вектор образует с осью тупой угол, то его проекция на ось отрицательна, так как косинус тупого угла отрицателен (*рисунок 3.11*, *б*).

Проекция вектора на ось равна нулю, если вектор перпендикулярен оси ($\varphi = 90°$), так как косинус прямого угла равен нулю.

2. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций слагаемых векторов на эту ось:

$$np_l(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b} + np_l\vec{c}\,. \qquad (3.2)$$

3. При умножении вектора на число его проекция на ось также умножается на это число:

$$np_l(\lambda\vec{a}) = \lambda \cdot np_l\vec{a}\,. \qquad (3.3)$$

Пусть задана прямоугольная декартова система координат *Oxyz* в пространстве (*рисунок 3.12*).

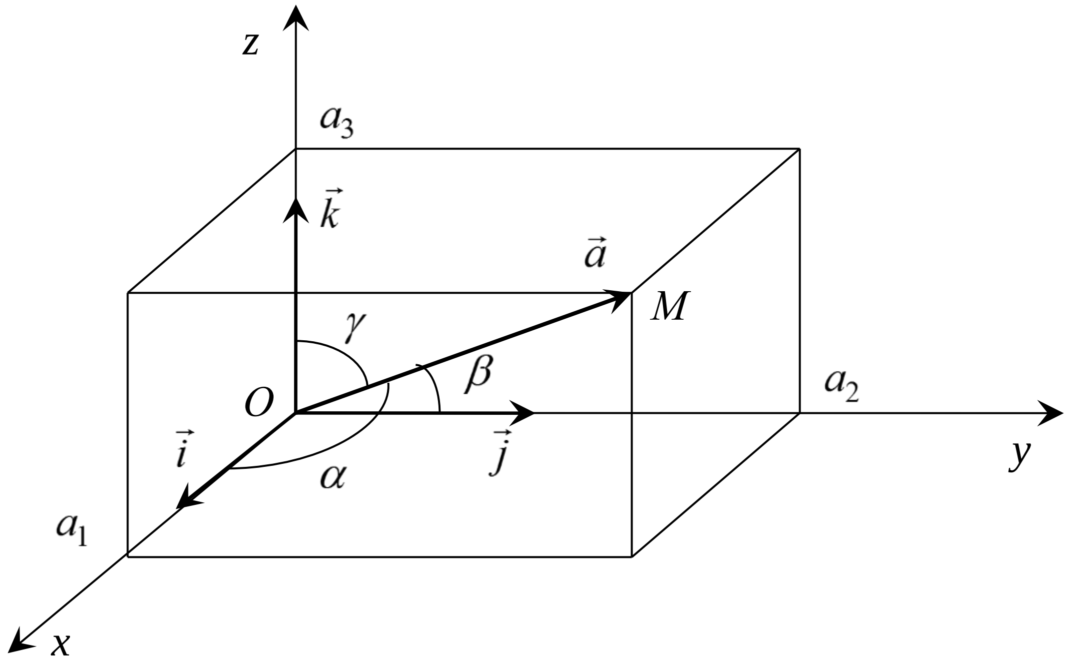



*Рисунок 3.12*

***Ортами*** координатных осей *Ox*, *Oy*, *Oz* называются единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, сонаправленные с соответствующими осями координат.

***Координатами вектора*** $\vec{a}$ называются его проекции на координатные оси

$$\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\},$$

где $a_1 = np_{Ox}\vec{a}$, $a_2 = np_{Oy}\vec{a}$, $a_3 = np_{Oz}\vec{a}$.

***Разложение вектора по ортам*** координатных осей имеет вид

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{i} + a_2 \cdot \vec{j} + a_3 \cdot \vec{k}, \tag{3.4}$$

где $a_1$, $a_2$, $a_3$ - координаты вектора $\vec{a}$.

***Радиус-вектором точки*** *M* называется вектор $\overrightarrow{OM}$, отложенный от начала координат (*рисунок 3.12*). Координаты радиус-вектора $\overrightarrow{OM} = \{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ совпадают с координатами точки $M(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Зная координаты вектора, можно определить его длину (модуль) и направление.

***Длина (модуль) вектора*** равна квадратному корню из суммы квадратов его координат, т. е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}\,. \tag{3.5}$$

Направление вектора определяется углами наклона вектора к координатным осям. Пусть углы вектора $\vec{a}$ с осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно равны $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ (*рисунок 3.12*).

***Направляющими косинусами*** ненулевого вектора $\vec{a}$ называются числа:

$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|}. \tag{3.6}$$

Сумма квадратов направляющих косинусов ненулевого вектора равна единице:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{3.7}$$

Следовательно, вектор $\vec{a}_0 = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$, координатами которого являются направляющие косинусы, является единичным вектором.

***Нормированным вектором (ортом)*** вектора $\vec{a}$ называется единичный вектор $\vec{a}_0$, который сонаправлен с вектором $\vec{a}$.

Координатами нормированного вектора $\vec{a}_0$ являются направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left\{\frac{a_1}{|\vec{a}|};\ \frac{a_2}{|\vec{a}|};\ \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right\} = \{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}. \tag{3.8}$$

При сложении (вычитании) векторов $\vec{a} = \{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ и $\vec{b} = \{b_1;\ b_2;\ b_3\}$ их соответствующие координаты складываются (вычитаются):

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1;\ a_2 \pm b_2;\ a_3 \pm b_3\}. \tag{3.9}$$

При умножении вектора $\vec{a} = \{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ на число $\lambda$ координаты вектора умножаются на это число:

$$\lambda\vec{a} = \{\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3\}. \tag{3.10}$$

Два вектора $\vec{a}=\{a_1;\ a_2;\ a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1;\ b_2;\ b_3\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\lambda. \qquad (3.11)$$

(3.11) – ***условие коллинеарности векторов***.

Если известны координаты точек начала и конца вектора $\overrightarrow{AB}$: $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то координаты вектора равны разностям соответствующих координат его начала и конца:

$$\overrightarrow{AB}=\{x_1-x_2;\ y_1-y_2;\ z_1-z_2\}. \qquad (3.12)$$

**Пример 3.4.** Даны $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – единичные векторы, составляющие с данной осью $l$ соответственно углы $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\pi$. Найти проекцию на ось $l$ вектора $3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}$.

**Решение.** По свойствам проекции вектора на ось (3.2) и (3.3):

$$np_l(3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=3np_l\vec{a}+2np_l\vec{b}+np_l\vec{c}.$$

$np_l\vec{a}=|\vec{a}|\,cos\frac{\pi}{3}=cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, так как $|\vec{a}|=1$ по условию;

$np_l\vec{b}=|\vec{b}|\,cos\frac{2\pi}{3}=cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$;

$np_l\vec{c}=|\vec{c}|\,cos\,\pi=cos\,\pi=-1.$

Получим

$$np_l(3\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})=3\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)=-\frac{1}{2}.$$

**Пример 3.5.** Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, его длину и направляющие косинусы, если $A(1;\ 4;\ 0)$, $B(4;\ -2;\ 6)$.

**Решение.**

Найдем координаты вектора как разности соответствующих координат конца и начала вектора (3.12):

$$\overrightarrow{AB}=\{4-1;\ -2-4;\ 6-0\}=\{3;\ -6;\ 6\}.$$

Длину вектора определим по формуле (3.5):

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{81} = 9\,.$$

По формулам (3.6) найдем направляющие косинусы:

$$cos\,\alpha = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad cos\,\beta = \frac{-6}{9} = -\frac{2}{3}, \quad cos\,\gamma = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

**Пример 3.6.** Найти нормированный вектор вектора

$$\vec{a} = \{1;\ -2;\ 2\}.$$

**Решение.**

Если $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}$, то по (3.8) его нормированный вектор

$$\vec{a}_0 = \left\{\frac{a_1}{|\vec{a}|};\ \frac{a_2}{|\vec{a}|};\ \frac{a_3}{|\vec{a}|}\right\}.$$

Вычислим длину вектора $\vec{a}$ по формуле (3.5):

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3\,.$$

Разделим координаты вектора $\vec{a}$ на $|\vec{a}|$. Получим

$$\vec{a}_0 = \left\{\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right\}.$$

**Пример 3.7.** Заданы векторы:

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}\,,\ \vec{b} = -3\vec{j} - 2\vec{k}\,,\ \vec{c} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\,.$$

Найти а) координаты вектора $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$;

б) разложение вектора $\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

**Решение.**

а) Используя линейные операции над векторами в координатной форме (3.9) и (3.10), вычислим координаты вектора $\vec{d}$:

$$\vec{d} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} = \{2;\ 3;\ 0\} - \frac{1}{2}\{0;\ -3;\ -2\} + \{1;\ 1;\ -1\} = \left\{3;\ \frac{11}{2};\ 0\right\}$$

.

б) $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}=\left(2\vec{i}+3\vec{j}\right)+\left(-3\vec{j}-2\vec{k}\right)-2\left(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\right)=-2\vec{j}$.

**Пример 3.8.** Разложить вектор $\vec{c}=\{5;\ -4\}$ по векторам $\vec{a}=\{1;\ 2\}$ и $\vec{b}=\{3;\ -1\}$.

**Решение.**

Представим вектор $\vec{c}$ в виде линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{c}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}.$$

В координатной форме получим

$$\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}5\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha+3\beta\\2\alpha-\beta\end{pmatrix}.$$

Перейдем к системе уравнений, приравнивая соответствующие координаты:

$$\begin{cases}\alpha+3\beta=5,\\2\alpha-\beta=-4;\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}\alpha=-1,\\\beta=2.\end{cases}$$

Таким образом, $\vec{c}=-\vec{a}+2\vec{b}$.

**Пример 3.9.** Векторы $\overrightarrow{AB}=\{2;\ 6;\ -4\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{4;\ 2;\ -2\}$ совпадают со сторонами треугольника $ABC$. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами *AM*, *BN*, *CP*.

**Решение.**

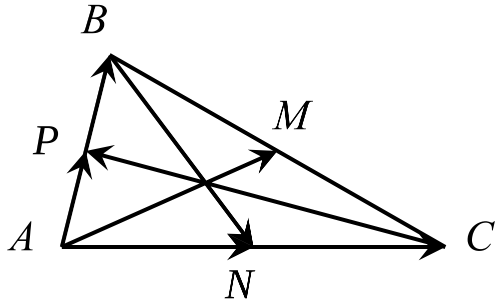



*Рисунок 3.13*

Так как *M* – середина *BC* (*рисунок 3.13*), то (**пример 3.2**)

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Получим

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\{2;\ 6;\ -4\} + \{4;\ 2;\ -2\}\right) = \frac{1}{2}\{6;\ 8;\ -6\} = \{3;\ 4;\ -3\}.$$

По правилу треугольников сложения векторов $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP}$, отсюда $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}$. Так как $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, то

$$\overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\{2;\ 6;\ -4\} - \{4;\ 2;\ -2\} = \{-3;\ 1;\ 0\}.$$

По правилу треугольников сложения векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN}$, отсюда $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB}$. Так как $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, то

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\{4;\ 2;\ -2\} - \{2;\ 6;\ -4\} = \{0;\ -5;\ 3\}.$$

**Пример 3.10.** Определить, при каких значениях $\alpha, \beta$ векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ коллинеарны.

**Решение.**

Из условия коллинеарности двух векторов (3.11) следуют равенства:

$$\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}.$$

Так как $\frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6}$ и $\frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2}$, то по правилу пропорции

$$\alpha = \frac{-2\cdot(-6)}{3} = 4,$$

$$\beta = \frac{3\cdot 2}{-6} = -1.$$

## Вопросы

1. Что такое вектор? Чем определяется вектор?
2. Что называется произведением вектора на число?

3. Что называется суммой двух векторов? Каковы способы нахождения суммы векторов?

4. Как найти сумму нескольких векторов?

5. Какой вектор называется разностью данных векторов?

6. Что такое проекция вектора на ось?

7. Каковы свойства проекций векторов на ось?

8. Что называется координатами вектора?

9. Каково разложение вектора по ортам координатных осей?

10. Как найти длину вектора, если известны его координаты?

11. Что такое направляющие косинусы? Как найти направляющие косинусы вектора, если известны его координаты?

12. Какой вектор называется нормированным вектором данного вектора? Как найти координаты нормированного вектора?

13. Как найти сумму векторов, если известны их координаты?

14. Как найти произведение вектора на число, если известны его координаты?

15. Как найти координаты вектора, если известны координаты начала и конца вектора?

16. Какие векторы называются коллинеарными?

17. Каково условие коллинеарности векторов?

## Задания

**1.** По данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить векторы:

а) $3\vec{a}+2\vec{b}$;

б) $\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.

**2.** Даны векторы $\overline{OA}=\vec{a}$, $\overline{OB}=\vec{b}$. Вектор $\overline{OC}=\vec{c}$ – медиана треугольника $OAB$. Разложить вектор $\vec{a}$ по векторам $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Ответ: $\vec{a}=-\vec{b}+2\vec{c}$.

**3.** Найти координаты вектора $\vec{a}$, если $np_{Ox}\vec{a}=3$, $np_{Oy}\vec{a}=-9$ и $|\vec{a}|=12$.

Ответ: $\vec{a}=\{3;\ -9;\ 3\sqrt{6}\}$ или $\vec{a}=\{3;\ -9;\ -3\sqrt{6}\}$.

**4.** Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\{4;\ 3;\ 1\}$.

Ответ: $cos\,\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{26}}$, $cos\,\beta=\dfrac{3}{\sqrt{26}}$; $cos\,\gamma=\dfrac{1}{\sqrt{26}}$.

**5.** Дан модуль вектора $|\vec{a}|=2$ и углы $\alpha=45°$, $\beta=60°$, $\gamma=120°$, образованные вектором $\vec{a}$ с координатными осями *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно. Найти координаты вектора $\vec{a}$.

Ответ: $\{\sqrt{2};\ 1;\ -1\}$.

**6.** Найти вектор $\vec{a}$, образующий с ортом $\vec{j}$ угол 45°, с ортом $\vec{k}$ – угол 120°, если $|\vec{a}|=4\sqrt{2}$.

Ответ: $\vec{a}=\{2\sqrt{2};\ 4;\ -2\sqrt{2}\}$ или $\vec{a}=\{-2\sqrt{2};\ 4;\ -2\sqrt{2}\}$.

**7.** Найти соответствующий нормированный вектор к данному вектору:

а) $\vec{a}=\{6;\ -2;\ -3\}$;

б) $\vec{b}=\{2;\ 0\}$;

в) $\vec{c}=\{1;\ -1\}$;

г) $\vec{d}=\{3;\ 4;\ -12\}$.

Ответ: а) $\vec{a}_0=\left\{\dfrac{6}{7};\ \dfrac{-2}{7};\ \dfrac{-3}{7}\right\}$;

б) $\vec{b}_0=\{1;\ 0\}$;

в) $\vec{c}_0=\left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}};\ \dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right\}$;

г) $\vec{d}_0=\left\{\dfrac{3}{13};\ \dfrac{4}{13};\ \dfrac{-12}{13}\right\}$.

**8.** Даны четыре вектора $\vec{a}=\{3;\ 0;\ -2\}$, $\vec{b}=\{1;\ 2;\ -5\}$, $\vec{c}=\{-1;\ 1;\ 1\}$, $\vec{d}=\{8;\ 4;\ 1\}$. Найти координаты вектора:

а) $\vec{l}=-5\vec{a}+\vec{b}-6\vec{c}+\vec{d}$;

б) $\vec{m}=3\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}-\vec{d}$.

Ответ: а) $\vec{l} = \{0;\ 0;\ 0\}$;

б) $\vec{m} = \{1;\ -7;\ -3\}$.

**9.** На плоскости даны два вектора $\vec{p} = \{2;\ -3\}$ и $\vec{q} = \{1;\ 2\}$. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{9;\ 4\}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$.

Ответ: $\vec{a} = 2\vec{p} + 5\vec{q}$.

**10.** Даны три вектора $\vec{p} = \{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{q} = \{-1;\ 1;\ 2\}$, $\vec{r} = \{2;\ 1;\ -3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c} = \{11;\ -6;\ -7\}$ по векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

Ответ: $\vec{c} = 2\vec{p} - 3\vec{q} + \vec{r}$.

**11.** Заданы вершины $A(1;\ 0;\ -1)$, $B(2;\ 2;\ 1)$ и $C(-6;\ 4;\ 3)$ треугольника $ABC$. Найти точку пересечения медиан.

*Указание.* Воспользуйтесь **примером 3.3.**

Ответ: $(-1;\ 2;\ 1)$.

**12.** Проверить, что точки $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(-1;\ 1;\ -3)$ и $D(3;\ -5;\ 3)$ служат вершинами трапеции.

**13.** Даны координаты трех вершин параллелограмма $ABCD$: $A(1;\ -1;\ -3)$, $B(2;\ 1;\ -2)$, $C(-5;\ 2;\ -6)$. Найти координаты вершины $D$.

Ответ: $(-6;\ 0;\ -7)$.

## 3.2 Скалярное произведение векторов

***Скалярным произведением*** двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин векторов на косинус угла $\varphi$ между ними (*рисунок 3.14*):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \qquad (3.13)$$

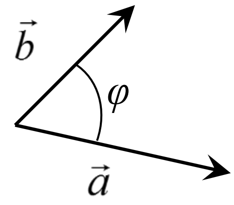



*Рисунок 3.14*

**Свойства скалярного произведения векторов**

1. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.
2. $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$.
3. $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
4. $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$.
5. Два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$$

Из определения скалярного произведения и его свойств следуют соотношения между ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,$$
$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0.$$

Если $\vec{a}=\{a_1,\,a_2,\,a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1,\,b_2,\,b_3\}$, то ***скалярное произведение векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно сумме произведений соответствующих координат

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3. \qquad (3.14)$$

Используя скалярное произведение, можно определять перпендикулярность векторов, находить угол между векторами, проекцию вектора на другой вектор, работу постоянной силы при прямолинейном перемещении.

1. Два ненулевых вектора $\vec{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т. е.

$$a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3=0. \qquad (3.15)$$

(3.15) – ***условие перпендикулярности векторов***.

2. ***Угол*** $\varphi$ ***между векторами*** $\vec{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ определяется из следующей формулы:

$$cos\,\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\cdot\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}. \qquad (3.16)$$

3. ***Проекция вектора*** $\vec{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$ ***на вектор*** $\vec{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$ находится по формуле

$$пр_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\frac{a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3}{\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}. \qquad (3.17)$$

4. ***Работа A постоянной силы*** $\vec{F}$ при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения $\vec{S}$:

$$A=\vec{F}\cdot\vec{S}. \qquad (3.18)$$

**Пример 3.11.** Найти угол между векторами $\vec{a}=\{1;\ 2;\ 3\}$ и $\vec{b}=\{6;\ 4;\ -2\}$.

**Решение.**

По формуле (3.16) найдем косинус угла между векторами:

$$cos\,\varphi=\frac{1\cdot 6+2\cdot 4+3\cdot(-2)}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}\cdot\sqrt{6^2+4^2+(-2)^2}}=\frac{8}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{56}}=\frac{8}{14\cdot 2}=\frac{2}{7}.$$

Тогда $\varphi=arccos\dfrac{2}{7}$.

**Пример 3.12.** Найти проекцию вектора $\vec{a}=\{1;\ 1;\ 2\}$ на вектор $\vec{b}=\{1;\ -1;\ 4\}$.

**Решение.** Найдем проекцию по формуле (3.17):

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot(-1) + 2\cdot 4}{\sqrt{1^2+(-1)^2+4^2}} = \frac{8}{\sqrt{18}} = \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{6} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

**Пример 3.13.** Определить, являются ли векторы $\vec{a} = \{-6;\ -3;\ 2\}$ и $\vec{b} = \{1;\ 2;\ 6\}$ перпендикулярными.

**Решение.** Проверим выполнение условия перпендикулярности векторов (3.15):

$(-6)\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot 6 = 0$ (верно).

Значит, векторы перпендикулярны.

## Вопросы

1. Что называется скалярным произведением векторов?
2. Каковы свойства скалярного произведения?
3. Как найти скалярное произведение векторов, зная их координаты?
4. Каково условие перпендикулярности векторов?
5. Как найти угол между векторами?
6. Как найти проекцию вектора на вектор?
7. Чему равна работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения?

## Задания

**1.** Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $|\vec{c}|=4$, вычислить $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$.

Ответ: −13.

**2.** Даны векторы $\vec{a} = \{4;\ -2;\ -4\}$, $\vec{b} = \{6;\ -3;\ 2\}$, вычислить:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

б) $\sqrt{\vec{a}^2}$;

в) $\sqrt{\vec{b}^{\,2}}$;

г) $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+2\vec{b})$;

д) $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

Ответ: а) 22; б) 6; в) 7; г) −194; д) 129.

**3.** Вычислить выражение $\left|\vec{a}\right|^2-\sqrt{3}(\vec{a}\cdot\vec{b})+5\left|\vec{b}\right|^2$, если:

а) $\left|\vec{a}\right|=2$, $\left|\vec{b}\right|=1$, $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=30°$;

б) $\left|\vec{a}\right|=3$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=150°$.

Ответ: а) 6; б) 38.

**4.** Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами $\vec{a}=\{4;\,-1\}$, $\vec{b}=\{-1;\,-7\}$.

Ответ: 3.

**5.** Найти угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданными своими координатами:

а) $\vec{a}=\{1;\,-1;\,1\}$, $\vec{b}=\{5;\,1;\,1\}$;

б) $\vec{a}=\{1;\,-1;\,1\}$, $\vec{b}=\{-2;\,2;\,-2\}$.

Ответ: а) $arccos\dfrac{5}{9}$; б) 180°.

**6.** Даны два вектора $\vec{a}=\{3;\,-1\}$, $\vec{b}=\{-1;\,1\}$. Найти вектор $\vec{x}$, удовлетворяющей системе уравнений $\vec{x}\cdot\vec{a}=13$, $\vec{x}\cdot\vec{b}=-3$.

Ответ: $\{5;\,2\}$.

**7.** Даны векторы $\vec{a}=\{2;\,2;\,1\}$, $\vec{b}=\{6;\,3;\,2\}$. Найти проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$ и проекцию $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$.

Ответ: $\dfrac{20}{3}$ и $\dfrac{20}{7}$.

**8.** Даны вершины треугольника $A(1;\,2)$, $B(3;\,4)$ и $C(6;\,2)$. Определить его внутренний угол при вершине $A$.

Ответ: 45°.

**9.** Найти значение $\alpha$, при котором векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны:

а) $\vec{a} = \alpha\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + \alpha\vec{j} - 7\vec{k}$;

б) $\vec{a} = \{\alpha;\ -3;\ 2\}$ и $\vec{b} = \{1;\ 2;\ -\alpha\}$.

Ответ: а) $\alpha = 4$; б) $\alpha = -6$.

**10.** Под действием силы $\overline{F} = \{5;\ 2;\ 1\}$ точка переместилась из $C(-3;\ 0;\ 3)$ в $D(-1;\ 2;\ 1)$. Найти работу силы $\overline{F}$.

Ответ: 12.

### 3.3 Векторное произведение векторов

Три некомпланарных (не лежащих в одной плоскости) вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют ***правую тройку***, если из конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки (*рисунок 3.15, а*), и ***левую***, если по часовой (*рисунок 3.15, б*).


*Рисунок 3.15*

***Векторным произведением*** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, который удовлетворяет следующим условиям:

1) вектор $\vec{c}$ перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) вектор $\vec{c}$ имеет длину, равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е.

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi, \qquad (3.19)$$

где $\varphi$ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку (*рисунок 3.16*).

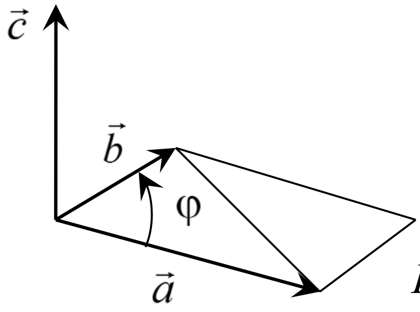



*Рисунок 3.16*

**Свойства векторного произведения векторов**

1. $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$.

2. $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$.

3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

4. Два ненулевых вектора коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е.

$$\vec{a}\ ||\ \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}.$$

Из определения векторного произведения и его свойств следуют соотношения между ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0},$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Данные соотношения легко запомнить: если направление кратчайшего поворота от первого вектора ко второму совпадает с направлением стрелки (*рисунок 3.17*), то произведение равно третьему вектору, если не совпадает – третий вектор берется со знаком «минус».

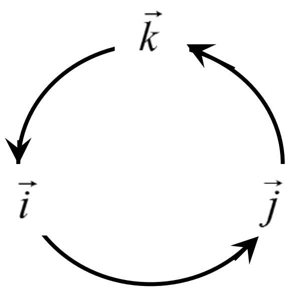



*Рисунок 3.17*

Если $\vec{a}=\{a_1,\, a_2,\, a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1,\, b_2,\, b_3\}$, то ***векторное произведение*** вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ находят по формуле

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.20)$$

Используя векторное произведение, можно определять коллинеарность векторов, находить площадь параллелограмма и треугольника, момент силы.

1. Векторы $\vec{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\vec{0}. \qquad (3.21)$$

(3.21) – ***условие коллинеарности векторов***.

2. ***Площадь параллелограмма*** $S_{п.}$ ***и площадь треугольника*** $S_{тр.}$, построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (*рисунок 3.16*):

$$S_{п.}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \qquad (3.22)$$

$$S_{тр.}=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|, \qquad (3.23)$$

где $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$ – модуль векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Пусть сила $\vec{F}=\overrightarrow{AB}$ приложена в точке $A$, $O$ – некоторая точка пространства (*рисунок 3.18*). Из физики известно, что моментом силы $\vec{F}$ относительно точки $O$ называется вектор $\vec{M}$, который проходит через точку $O$ и обладает следующими свойствами:

1) перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{F}$;

2) его модуль равен произведению модуля силы на плечо $ON$ (кратчайшее расстояние от точки $O$ до прямой $AB$):

$\left|\vec{M}\right|=\left|\vec{F}\right|\cdot ON=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot sin\,\varphi$, где $\varphi$ – угол между $\vec{F}$ и $\overrightarrow{OA}$;

3) $\vec{M}$ образует правую тройку с векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\vec{F}$.

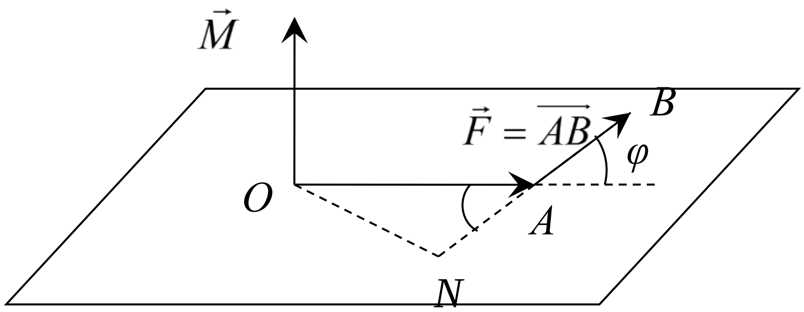



*Рисунок 3.18*

Таким образом, ***момент*** $\vec{M}$ ***силы*** $\vec{F}$ относительно точки $O$ равен векторному произведению силы на вектор $\overrightarrow{OA}$:

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}. \tag{3.24}$$

**Пример 3.14.** Найдите площадь треугольника с вершинами в точках $A(1;\,-2;\,1)$, $B(2;\,1;\,2)$, $C(-2;\,3;\,-1)$.

**Решение.** Треугольник $ABC$ можно рассматривать как треугольник, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Для определения площади треугольника $ABC$ воспользуемся формулой (3.23):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и их векторное произведение, используя формулу (3.20).

$$\overrightarrow{AB} = \{2-1;\ 1-(-2);\ 2-1\} = \{1;\ 3;\ 1\},$$

$$\overrightarrow{AC} = \{-2-1;\ 3-(-2);\ -1-1\} = \{-3;\ 5;\ -2\}.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -11\vec{i} - \vec{j} + 14\vec{k}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-11)^2 + (-1)^2 + 14^2} = \sqrt{121+1+196} = \sqrt{318},$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{318}}{2}.$$

## Вопросы

1. Что называется векторным произведением векторов?

2. Каковы свойства векторного произведения?

3. Как найти векторное произведение векторов, зная их координаты?

4. Как найти площади параллелограмма и треугольника, построенного на двух данных векторах?

5. Чему равен момент силы?

## Задания

**1.** Найди векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных своими координатами:

а) $\vec{a} = \{3;\ -1;\ 2\}$, $\vec{b} = \{2;\ -3;\ -5\}$;

б) $\vec{a} = \{2;\ -1;\ 1\}$, $\vec{b} = \{-4;\ 2;\ -2\}$.

Ответ: а) $\{11;\ 19;\ -7\}$; б) $\{0;\ 0;\ 0\}$.

**2.** На векторах $\vec{a} = \{2;\ 3;\ 1\}$ и $\vec{b} = \{-1;\ 1;\ 2\}$, отложенных от одной точки, построен треугольник. Найти:

а) площадь этого треугольника;

б) длины его высот.

Ответ: а) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$; б) $5\sqrt{\frac{3}{14}}$, $5\sqrt{\frac{3}{14}}$, $\frac{5}{\sqrt{2}}$.

**3.** Раскрыть скобки и упростить выражение:

а) $\vec{i} \times (\vec{j} + \vec{k}) - \vec{j} \times (\vec{i} + \vec{k}) + \vec{k} \times (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$;

б) $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{c} + (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{b} + (\vec{b} - \vec{c}) \times \vec{a}$;

в) $(2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{a}) + (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} + \vec{b})$;

г) $2\vec{i} \times (\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \times (\vec{i} \times \vec{k}) + 4\vec{k} \times (\vec{i} \times \vec{j})$.

Ответ: а) $-2\vec{i}+2\vec{k}$; б) $2(\vec{a}\times\vec{c})$; в) $(\vec{a}\times\vec{c})$; г) $\vec{0}$.

**4.** Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}=\{4;\,-2;\,-3\}$ и $\vec{b}=\{0;\,1;\,3\}$, образует с осью $Oy$ тупой угол. Зная, что $|\vec{x}|=26$, найти его координаты.

Ответ: $\vec{x}=\{-6;\,-24;\,8\}$.

**5.** Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a}=\{2;\,-2;\,1\}$ и $\vec{b}=\{2;\,3;\,6\}$.

Ответ: $sin\,\varphi=\dfrac{5\sqrt{17}}{21}$.

**6.** Даны вершины треугольника $A(1;\,-1;\,2)$, $B(5;\,-6;\,2)$ и $C(1;\,3;\,-1)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины $B$ на сторону $AC$.

Ответ: 5.

**7.** Сила $\vec{Q}=\{3;\,4;\,-2\}$ приложена к точке $C(2;\,-1;\,-2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно начала координат.

Ответ: $|\vec{M}|=15$; $cos\,\alpha=\dfrac{2}{3}$, $cos\,\beta=-\dfrac{2}{15}$, $cos\,\gamma=\dfrac{11}{15}$.

**8.** Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$.

Ответ: $S=\sqrt{6}$.

**9.** Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1;\,2;\,3)$, $B(2;\,1;\,4)$ и $C(0;\,-3;\,4)$.

Ответ: $S=3\sqrt{6}$.

### 3.4 Смешанное произведение векторов

***Смешанным произведением*** векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению одного из них на векторное произведение двух других, т. е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}\,. \qquad (3.25)$$

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку (*рисунок 3.19*), и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

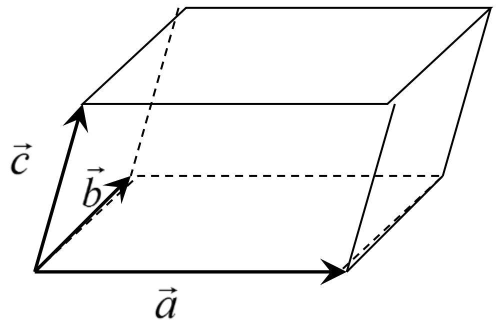



*Рисунок 3.19*

**Свойства смешанного произведения векторов**

1. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right).$$

2. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей:

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} = \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b} \text{ или } \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{b}\vec{c}\vec{a} = \vec{c}\vec{a}\vec{b}\,.$$

3. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене местами двух сомножителей:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b}\,,\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c}\,,\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}\,.$$

4. Смешанное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \iff \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – компланарны.}$$

Если $\vec{a}=\{a_1, a_2, a_3\}$ и $\vec{b}=\{b_1, b_2, b_3\}$, то ***смешанное произведение*** равно определителю третьего порядка, составленного из координат векторов, т. е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (3.26)$$

Используя смешанное произведение, можно определить взаимную ориентацию векторов в пространстве, компланарность векторов, объемы параллелепипеда и треугольной пирамиды (тетраэдра).

1. Если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют правую тройку, если $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$, то левую.

2. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0. \qquad (3.27)$$

(3.27) – ***условие компланарности*** векторов.

3. ***Объем параллелепипеда***, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен модулю смешанного произведения векторов:

$$V_{п.}=\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (3.28)$$

4. ***Объем треугольной пирамиды***, построенной на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ равен

$$V_{тр.п.}=\frac{1}{6}\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \qquad (3.29)$$

**Пример 3.15.** Вершинами пирамиды являются точки $A(2;3;4)$, $B(0;1;-1)$, $C(3;4;2)$, $D(2;0;-2)$. Найдите объем пирамиды *ABCD*.

**Решение.** Пирамиду *ABCD* можно рассматривать как треугольную пирамиду построенную на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$ (*рисунок 3.20*). Тогда по формуле (3.29)

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right|.$$

Определим координаты векторов:

$\overrightarrow{AB} = \{0-2;\ 1-3;\ -1-4\} = \{-2;\ -2;\ -5\}$,

$\overrightarrow{AC} = \{3-2;\ 4-3;\ 2-4\} = \{1;\ 1;\ -2\}$,

$\overrightarrow{AD} = \{2-2;\ 0-3;\ -2-4\} = \{0;\ -3;\ -6\}$.

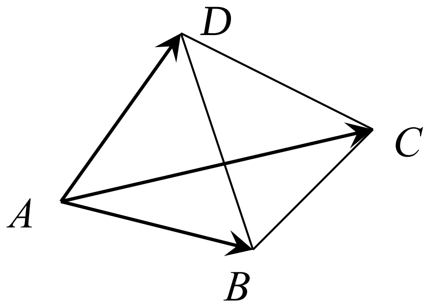



*Рисунок 3.20*

Найдем смешанное произведение векторов, используя формулу (3.26), и объем пирамиды:

$$\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -2 & -2 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = 12 + 15 + 12 - 12 = 27,$$

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot 27 = 4{,}5.$$

## Вопросы

1. Что называется смешанным произведением векторов?
2. Каковы свойства смешанного произведения векторов?
3. Как найти смешанное произведение векторов, зная их координаты?
4. Какие векторы называются компланарными?
5. Каково условие компланарности?
6. Как найти объемы параллелепипеда и пирамиды, построенных на трех данных векторах?

## Задания

**1.** Установить, компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, если:
а) $\vec{a} = \{2;\ 3;\ -1\}$, $\vec{b} = \{1;\ -1;\ 3\}$, $\vec{c} = \{1;\ 9;\ -11\}$;
б) $\vec{a} = \{3;\ -2;\ 1\}$, $\vec{b} = \{2;\ 1;\ 2\}$, $\vec{c} = \{3;\ -1;\ -2\}$.

Ответ: а) да; б) нет.

**2.** Даны вершины тетраэдра $A(2;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 1;\ -2)$, $C(6;\ 3;\ 7)$ и $D(-5;\ -4;\ 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины *D*.

Ответ: 11.

**3.** Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 3)$. Найти координаты четвертой вершины *D*, если известно, что она лежит на оси *Oy*.

Ответ: $D(0;\ 8;\ 0)$ или $D(0;\ -7;\ 0)$.

**4.** Доказать, что четыре точки $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$, $C(-1;\ 2;\ 1)$ и $D(2;\ 1;\ 3)$ лежат в одной плоскости.

**5.** Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ образуют правую тройку, взаимно перпендикулярны и $|\vec{a}_1| = 4$, $|\vec{a}_2| = 2$, $|\vec{a}_3| = 3$. Вычислить $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$.

Ответ: 24.

**6.** Заданы векторы $\vec{a}_1 = \{1;\ -1;\ 3\}$, $\vec{a}_2 = \{-2;\ 2;\ 1\}$, $\vec{a}_3 = \{3;\ -2;\ 5\}$. Вычислить $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3$. Какова ориентация троек:
а) $(\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3)$;
б) $(\vec{a}_2\vec{a}_1\vec{a}_3)$;
в) $(\vec{a}_1\vec{a}_3\vec{a}_2)$?

Ответ: $\vec{a}_1\vec{a}_2\vec{a}_3 = -7$; а) левая; б) правая; в) правая.

**7.** Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках $A(2;\ -3;\ 5)$, $B(0;\ 2;\ 1)$, $C(-2;\ -2;\ 3)$ и $D(3;\ 2;\ 4)$.

Ответ: 6.

**8.** Доказать тождество $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} + \vec{c})(\vec{c} + \vec{a}) = 2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

# 4 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

## 4.1 Прямоугольная система координат в пространстве. Основные задачи аналитической геометрии. Уравнения поверхности и линии в пространстве

***Прямоугольная система координат Oxyz в пространстве*** определяется заданием трех пересекающихся в одной точке *O* взаимно перпендикулярных осей *Ox*, *Oy*, *Oz*, и масштабной единицы измерения (*рисунок 4.1*). Точка *O* называется началом координат, *Ox* – осью абсцисс, *Oy* – осью ординат, *Oz* – осью аппликат.

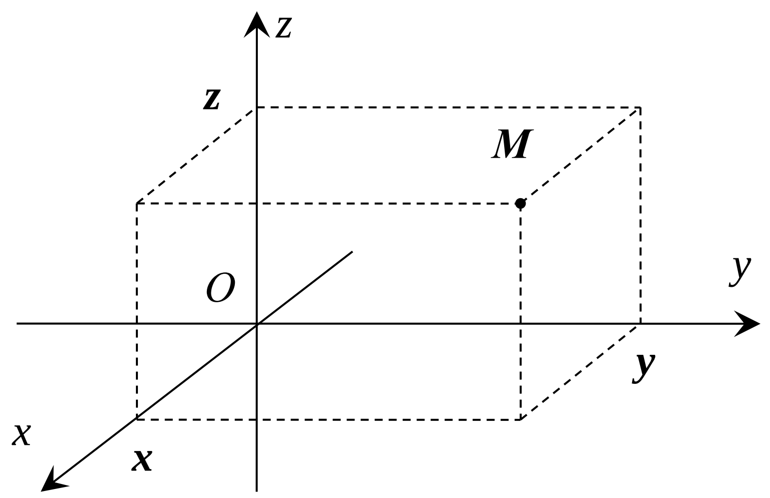



*Рисунок 4.1*

***Координатами точки*** *M* в системе координат *Oxyz* называются числа *x*, *y* и *z*, являющиеся координатами проекций точки на оси координат: ***M*(*x*; *y*; *z*)**. Число ***x*** называется ***абсциссой*** точки *M*, число ***y*** – ***ординатой*** точки *M*, **z** – ***аппликатой*** точки *M*.

В прямоугольной системе координат каждой точке *M* пространства соответствует единственная упорядоченная тройка чисел (*x*; *y*; *z*), и обратно, каждой упорядоченной тройке чисел (*x*; *y*; *z*) соответствует, и притом одна, точка *M* в пространстве.

Плоскости *Oxy*, *Oyz*, *Oxz* называются ***координатными плоскостями***. Они делят пространство на восемь частей, называемых октантами.

Основными задачами аналитической геометрии в пространстве являются вычисление расстояния между точками и нахождение координат точки, делящей отрезок в данном отношении.

***Расстояние d между двумя точками*** $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ вычисляется по формуле

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \qquad (4.1)$$

***Координаты точки М, делящей отрезок*** $M_1M_2$ ***в отношении λ*** определяются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}\,. \qquad (4.2)$$

В частности, ***координаты середины отрезка*** определяются из (4.2) при $\lambda = 1$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}\,. \qquad (4.3)$$

Поверхность в пространстве задается как множество точек, обладающих только им присущим геометрическим свойством. Введение прямоугольной системы координат *Oxyz* позволяет определить поверхность в пространстве в виде уравнения, связывающего координаты точек поверхности.

***Уравнением поверхности*** в прямоугольной системе координат *Oxyz* называется уравнение с тремя переменными вида

$$F(x; y; z) = 0, \qquad (4.4)$$

которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на поверхности.

Переменные *x*, *y*, *z* в уравнении поверхности называются текущими координатами точек поверхности.

Уравнение поверхности позволяет изучение геометрических свойств поверхности заменить исследованием его уравнения. Так, для того, чтобы узнать, лежит ли точка на поверхности, достаточно подставить координаты точки в уравнение поверхности: если координаты точки удовлетворяют уравнению поверхности, то точка лежит на поверхности, если не удовлетворяют – не лежит.

Линию в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей или как множество точек, принадлежащих двум поверхностям (*рисунок 4.2*).

Если $F_1(x;\ y;\ z)=0$ и $F_2(x;\ y;\ z)=0$ – уравнения двух поверхностей, определяющих линию $L$, то координаты точек этой линии удовлетворяют системе уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} F_1(x;\ y;\ z)=0, \\ F_2(x;\ y;\ z)=0. \end{cases} \tag{4.5}$$

Уравнения (4.5) называются ***уравнениями линии в пространстве***.

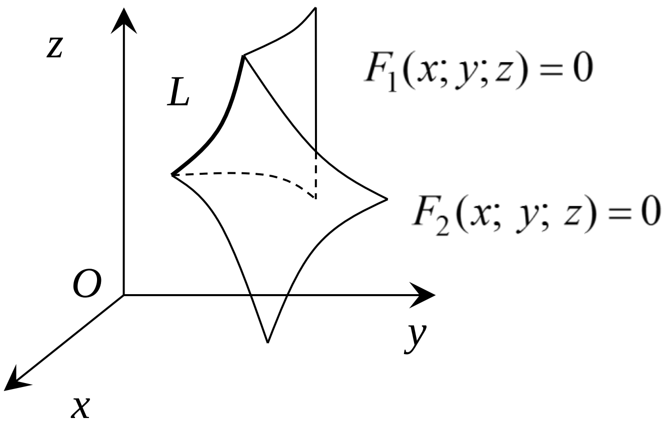



*Рисунок 4.2*

Линию в пространстве можно рассматривать как траекторию движения точки (*рисунок 4.3*).

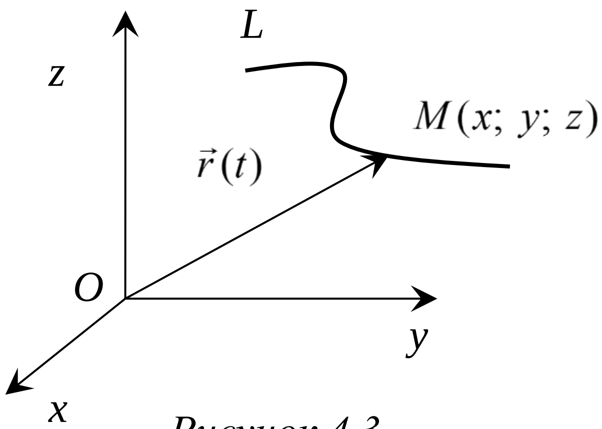



*Рисунок 4.3*

В этом случае линию задают ***векторным уравнением***:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (4.6)$$

или ***параметрическими уравнениями*** проекций вектора (4.6) на оси координат:

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \qquad (4.7)$$

**Пример 4.1.** Найти длину отрезка $AB$, если $A(12; -3)$, $B(4; 2; 1)$.

**Решение.**

Длину отрезка $AB$ найдем как расстояние между двумя точками $A$ и $B$ по формуле (4.1):

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (2-2)^2 + (1-(-3))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

**Пример 4.2.** Найти координаты середины отрезка $AB$, если $A(1; 2; -3)$, $B(4; 2; 1)$.

**Решение.**

По формулам (4.3) получим

$$x = \frac{1+4}{2} = 2{,}5; \quad y = \frac{2+2}{2} = 2, \quad z = \frac{-3+1}{2} = -1.$$

$M(2{,}5; 2; -1)$ – середина отрезка $AB$.

**Пример 4.3.** Найти уравнение сферы радиуса $R$ с центром в точке $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

**Решение.**

Сфера радиуса $R$ с центром в точке $C$ есть множество точек пространства $M(x;\ y;\ z)$, находящихся от точки $C(x_0;\ y_0;\ z_0)$ на расстоянии $R$, т. е. $OM = R$.

По формуле (4.1) найдем расстояние $OM$:

$$OM = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}.$$

Тогда

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2.$$

Получили уравнение сферы радиуса $R$ с центром в точке $C$.

## Вопросы

1. Как найти расстояние между двумя точками в пространстве?
2. Каковы координаты точки, делящей отрезок в данном отношении $\lambda$?
3. Как найти координаты середины отрезка?
4. Что называют уравнением поверхности в пространстве?
5. Каким образом определить, принадлежит ли точка поверхности или нет?
6. Что называют уравнениями линии в пространстве?
7. Каково векторное уравнение линии в пространстве?
8. Каковы параметрические уравнения линии?

## 4.2 Плоскость в пространстве

Пусть задана в пространстве прямоугольная система координат $Oxyz$, и имеется плоскость $\pi$.

Вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$, перпендикулярный плоскости $\pi$, называется ***нормальным вектором*** плоскости $\pi$.

***Уравнение плоскости с известным нормальным вектором*** $\vec{n} = \{A; B; C\}$, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, (*рисунок 4.4*), имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (4.8)$$

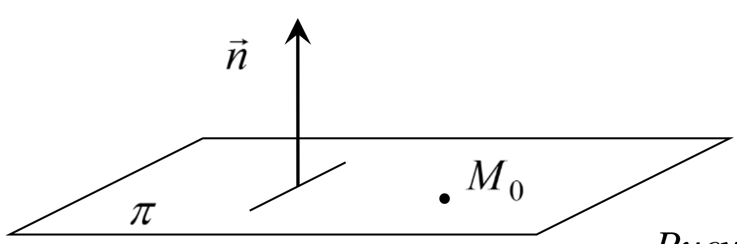



*Рисунок 4.4*

Любая плоскость в заданной системе координат $Oxyz$ определяется уравнением первой степени с тремя неизвестными $x$, $y$, $z$:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \qquad (4.9)$$

(4.9) – ***общее уравнение плоскости*** в пространстве.

### Частные случаи общего уравнения плоскости

1. Если $D = 0$, то уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат.

2. Если $C = 0$, то плоскость $Ax + By + D = 0$ параллельна оси $Oz$.

3. Если $B = 0$, то плоскость $Ax + Cz + D = 0$ параллельна оси $Oy$.

4. Если $A = 0$, то плоскость $By + Cz + D = 0$ параллельна оси $Ox$.

5. Если $A = B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости $Oxy$.

6. Если $A = C = 0$, то уравнение $By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости $Oxz$.

7. Если $B = C = 0$, то уравнение $Ax + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости $Oyz$.

Если известны точки пересечения плоскости с осями координат $A(a;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ b;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ c)$, то уравнение плоскости (*рисунок 4.5*) имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \qquad (4.10)$$

(4.10) – ***уравнение плоскости «в отрезках»***. Его обычно используют при построении плоскости.

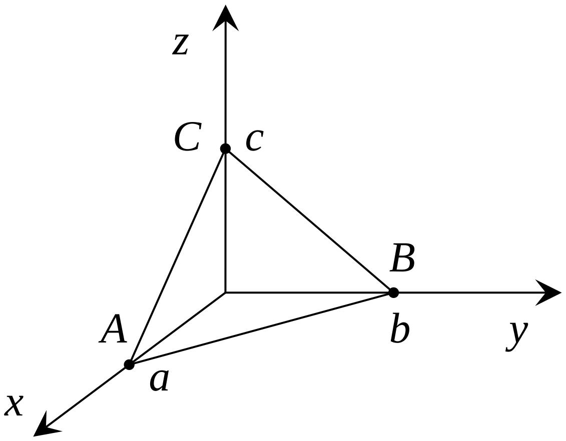



*Рисунок 4.5*

***Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки*** $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ имеет вид

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4.11)$$

Под углом между плоскостями понимается один из двугранных углов, образованных этими плоскостями (*рисунок 4.6*).

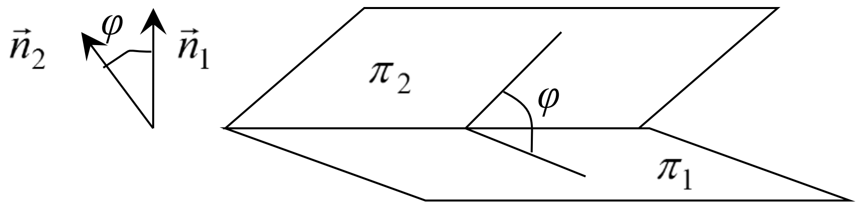



*Рисунок 4.6*

***Угол между плоскостями*** равен углу $\varphi$ между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ и определяется по формуле

$$cos\,\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2 + C_1{}^2} \cdot \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2 + C_2{}^2}}. \qquad (4.12)$$

Для нахождения острого угла между плоскостями следует взять модуль числителя правой части формулы (4.12).

Две плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ параллельны (*рисунок 4.7*) тогда и только тогда, когда коллинеарны их нормальные векторы $\vec{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$. По условию коллинеарности векторов (3.11):

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \qquad (4.13)$$

(4.13) – ***условие параллельности*** двух плоскостей.

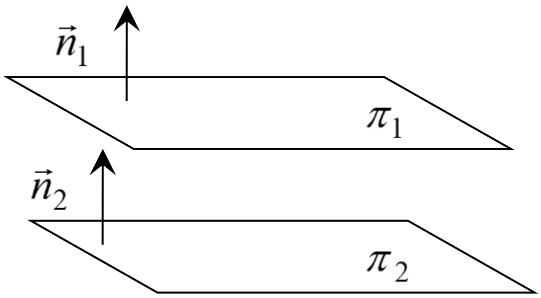



*Рисунок 4.7*

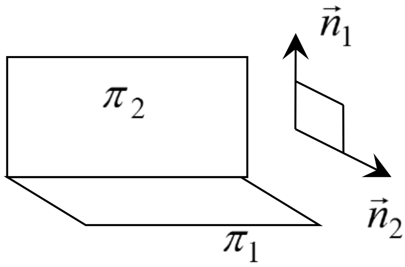



*Рисунок 4.8*

Две плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ перпендикулярны (*рисунок 4.8*) тогда и только тогда, когда перпендикулярны их нормальные векторы $\vec{n}_1 = \{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\vec{n}_2 = \{A_2;\ B_2;\ C_2\}$. По условию перпендикулярности векторов (3.15):

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (4.14)$$

(4.14) – ***условие перпендикулярности*** двух плоскостей.

Расстоянием от точки до плоскости называется длина перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость (*рисунок 4.9*).

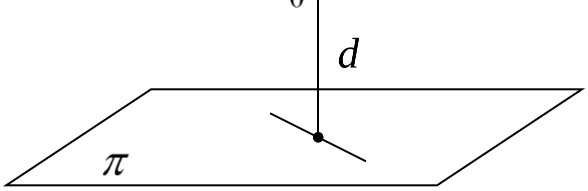



*Рисунок 4.9*

***Расстояние от точки*** $M_0(x_0;y_0;z_0)$ ***до плоскости*** $\pi$***,*** заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$, вычисляется по формуле

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (4.15)$$

**Пример 4.4.** Составить уравнение плоскости с нормальным вектором $\vec{n}=\{1;\ 3;\ -2\}$, проходящей через точку $M(3;\ -1;\ 0)$.

**Решение.**

Воспользуемся уравнением плоскости с известным нормальным вектором и проходящей через данную точку (4.8).

Получим

$$(x-3)+3(y+1)-2(z-0)=0,$$

$$x+3y-2z=0.$$

**Пример 4.5.** Найти уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(1;\ -2;\ 0)$, $M_2(3;\ 4;\ 1)$, $M_3(-4;\ 1;\ 5)$.

**Решение.**

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через три данные точки (4.11). Получим

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-0 \\ 3-1 & 4+2 & 1-0 \\ -4-1 & 1+2 & 5-0 \end{vmatrix}=0,$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}-(y+2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

$$27(x-1)-15(y+2)+36z=0,$$

$$9x-5y+12z-19=0.$$

**Пример 4.6.** Найти угол между плоскостями

$\pi_1: 3x+2y+z+2=0$ и $\pi_2: x-y+2z-1=0$.

**Решение.**

Нормальный вектор плоскости $\pi_1$ – вектор $\vec{n}_1=\{3;\ 2;\ 1\}$, нормальный вектор плоскости $\pi_2$ – вектор $\vec{n}_2=\{1;\ -1;\ 2\}$.

Для определения угла между плоскостями используем формулу (4.12). Получим

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 1+2\cdot(-1)+1\cdot 2}{\sqrt{3^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{3}{\sqrt{84}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}=\frac{\sqrt{21}}{14},$$

$$\alpha=\arccos\frac{\sqrt{21}}{14}\approx 1{,}24(\text{рад}).$$

**Пример 4.7.** Найти расстояние от точки $M_0(5;1;3)$ до плоскости $\pi$, заданной уравнением $2x+y-z+3=0$.

**Решение.**

Воспользуемся формулой (4.15).

Из уравнения плоскости координаты нормального вектора: $A=2$, $B=1$, $C=-1$. По условию координаты точки: $x_0=5$, $y_0=1$, $z_0=3$.

Получим

$$d=\frac{|2\cdot 5+1\cdot 1-1\cdot 3+3|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{11}{\sqrt{6}}=\frac{11\sqrt{6}}{6}\approx 4{,}5.$$

**Пример 4.8.** Найти уравнение плоскости $\pi_2$, проходящей через точку $M(-1;2;4)$ и параллельной плоскости $\pi_1: 2x-3y+z-1=0$.

**Решение.**

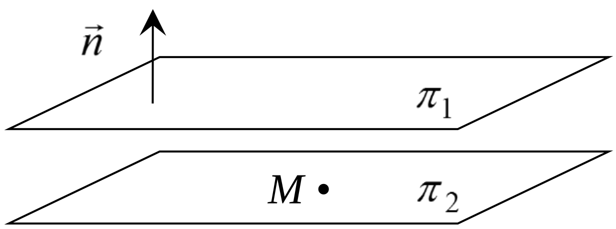



*Рисунок 4.10*

Так как плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ параллельны, то нормальный вектор $\vec{n}=\{2;-3;1\}$ плоскости $\pi_1$ перпендикулярен плоскости $\pi_2$, следовательно, является нормальным вектором плоскости $\pi_2$ (*рисунок 4.10*). Воспользуемся уравнением плоскости (4.8), проходящей через данную точку $M(-1;2;4)$ с известным нормальным вектором $\vec{n}$. Получим

$$2\cdot(x+1)-3\cdot(y-2)+1\cdot(z-4)=0,$$

$2x - 3y + z + 4 = 0$.

## Вопросы

1. Какой вектор называется нормальным вектором плоскости?

2. Напишите уравнение плоскости:

а) проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором;

б) общее;

в) «в отрезках»;

г) проходящей через три данные точки.

3. Каковы частные случаи общего уравнения плоскости?

4. Как найти угол между двумя плоскостями?

5. Каковы условия параллельности и перпендикулярности плоскостей?

6. Как найти расстояние от точки до плоскости?

## Задания

**1.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(2;\,1;\,-1)$ и имеет нормальный вектор $\vec{n} = \{1;\,-2;\,3\}$.

Ответ: $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

**2.** Даны две точки $M_1(3;\,-1;\,2)$ и $M_2(4;\,-2;\,-1)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1$, перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Ответ: $x - y - 3z + 2 = 0$.

**3.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1$ и $M_2$ параллельно вектору $\vec{a}$, если:

а) $M_1(1;\,2;\,0)$, $M_2(2;\,1;\,1)$, $\vec{a} = \{3;\,0;\,1\}$;

б) $M_1(1;\,1;\,1)$, $M_2(2;\,3;\,-1)$, $\vec{a} = \{0;\,-1;\,2\}$.

Ответ: а) $-x + 2y + 3z - 3 = 0$; б) $2x - 2y - z + 1 = 0$.

**4.** Написать уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1$, $M_2$ и $M_3$, если

а) $M_1(1;\ 2;\ 0)$, $M_2(2;\ 1;\ 1)$, $M_3(3;\ 0;\ 1)$;

б) $M_1(1;\ 1;\ 1)$, $M_2(0;\ -1;\ 2)$, $M_3(2;\ 3;\ -1)$.

Ответ: а) $x+y-3=0$; б) $2x-y-1=0$.

**5.** Установить, какие из следующих пар уравнений определяют параллельные плоскости:

а) $2x-3y-5z-7=0$ и $2x-3y-5z+3=0$;

б) $4x+2y-4z+5=0$ и $2x+y+2z-1=0$;

в) $x-3z+2=0$ и $2x-6z-7=0$.

Ответ: а), в).

**6.** Установить, какие из следующих пар уравнений определяют перпендикулярные плоскости:

а) $3x-y-2z-7=0$ и $x+9y-3z+2=0$;

б) $2x+3y-z-3=0$ и $x-y-z+5=0$;

в) $2x-5y+z=0$ и $x+2z-3=0$.

Ответ: а) , б).

**7.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_1(3;\ -2;\ -7)$ параллельно плоскости $2x-3z+5=0$.

Ответ: $2x-3z-27=0$.

**8.** Составить уравнение плоскости, которая проходит через две точки $M_1(1;\ -1;\ -2)$ и $M_2(3;\ 1;\ 1)$ перпендикулярно к плоскости $x-2y+3z-5=0$.

Ответ: $4x-y-2z-9=0$.

**9.** Преобразовать следующие уравнения плоскостей к уравнениям в отрезках:

а) $2x-3y+5z-15=0$;

б) $2x+3y+6=0$;

в) $2x+15=0$.

Ответ: а) $\frac{x}{7{,}5}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{3}=1$; б) $\frac{x}{-3}+\frac{y}{-2}=1$; в) $\frac{x}{-7{,}5}=1$.

**10.** Найти двугранные углы, образованные пересечением следующих пар плоскостей:

а) $x-y\sqrt{2}+z-1=0$ и $x+y\sqrt{2}-z+3=0$;

б) $3y-z=0$ и $2y+z=0$;

в) $6x+3y-2z=0$ и $x+2y+6z-12=0$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{2}$.

**11.** Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

а) $x-2y-2z-12=0$ и $x-2y-2z-6=0$;

б) $2x-3y+6z-14=0$ и $4x-6y+12z-21=0$;

в) $2x-y+2z+9=0$ и $4x-2y+4z-21=0$.

Ответ: а) 2; б) 0,5; в) 6,5.

## 4.3 Прямая в пространстве

Пусть задана в пространстве прямоугольная система координат *Oxyz*, и имеется прямая *l*.

***Общими уравнениями прямой*** в пространстве называется система уравнений двух непараллельных плоскостей, пересечением которых является прямая *l* (*рисунок 4.11*):

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \tag{4.16}$$

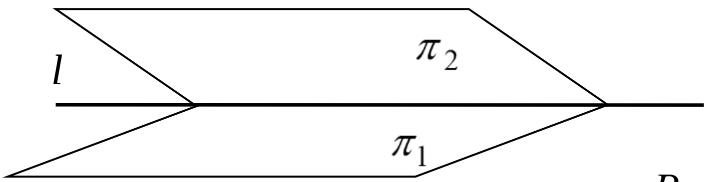



*Рисунок 4.11*

Вектор $\vec{l}$ называется ***направляющим вектором*** прямой *l*, если он параллелен прямой или лежит на ней.

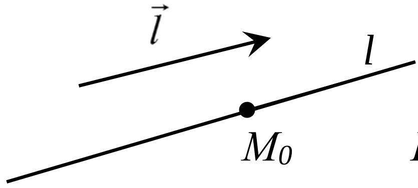



*Рисунок 4.12*

Уравнения прямой с заданным направляющим вектором $\vec{l} = \{m; n; p\}$, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (*рисунок 4.12*) имеют вид

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \qquad (4.17)$$

(4.17) – ***канонические уравнения прямой***.

Если ввести параметр $t = \dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$,

то от уравнений (4.17) можно перейти к системе уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt. \end{cases} \qquad (4.18)$$

(4.18) – ***параметрические уравнения прямой***.

***Уравнения прямой l, проходящей через две данные точки*** $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (4.19)$$

Если две прямые пересекаются, то ***угол*** $\varphi$ ***между прямыми*** равен углу между их направляющими векторами $\vec{l}_1 = \{m_1;\ n_1;\ p_1\}$и $\vec{l}_2 = \{m_2;\ n_2;\ p_2\}$ и вычисляется по формуле

$$cos\,\varphi = \frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{\left|\vec{l}_1\right| \cdot \left|\vec{l}_2\right|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^{\ 2} + n_1^{\ 2} + p_1^{\ 2}} \cdot \sqrt{m_2^{\ 2} + n_2^{\ 2} + p_2^{\ 2}}}. \qquad (4.20)$$

Для нахождения острого угла между прямыми, числитель правой части формулы (4.20) следует взять по модулю.

**Пример 4.9.** Найти уравнения прямой, проходящей через точку $M(3;\,-4;\,1)$ и параллельной вектору $\vec{l}=\{-4;\,2;\,5\}$.

**Решение.**

Вектор $\vec{l}=\{-4;\,2;\,5\}$ является направляющим вектором прямой. Воспользуемся каноническими уравнениями прямой (4.17) и получим:

$$\frac{x-3}{-4}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-1}{5}.$$

**Пример 4.10.** Найти уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(4;\,3;\,2)$ и $M_2(-1;\,-2;\,3)$.

**Решение.**

Воспользуемся уравнениями прямой (4.19). Получим

$$\frac{x-4}{-1-4}=\frac{y-3}{-2-3}=\frac{z-2}{3-2},$$

$$\frac{x-4}{-5}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z-2}{1}.$$

**Пример 4.11.** Составить канонические уравнения прямой, заданной общими уравнениями:

$$\begin{cases}5x+y+z=0,\\ 2x+3y-2z+5=0.\end{cases}$$

**Решение.**

Для того, чтобы составить канонические уравнения прямой, необходимо знать координаты точки, лежащей на прямой, и направляющий вектор прямой.

*1 способ.*

Найдем координаты двух точек, лежащих на прямой.

Определим точки пересечения прямой с координатными плоскостями как решения систем уравнений прямой и плоскостей.

Точка пересечения с плоскостью $Oyz$ $(x=0)$:

$$\begin{cases}5x+y+z=0,\\ 2x+3y-2z+5=0,\\ x=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z=0, \\ 3y-2z=-5, \\ x=0. \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ y=-z, \\ -3z-2z=-5; \end{cases} \quad \begin{cases} x=0, \\ y=-1, \\ z=1. \end{cases}$$

$M_1(0;\ -1;\ 1)$.

Точка пересечения с плоскостью $Oxz$ $(y=0)$:

$$\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-2z+5=0, \\ y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x+z=0, \\ 2x-2z+5=0, \\ y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} z=-5x, \\ 2x-2(-5x)+5=0, \\ y=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-\dfrac{5}{12}, \\ y=0, \\ z=\dfrac{25}{12}. \end{cases}$$

$$M_2\left(-\frac{5}{12};\ 0;\ \frac{25}{12}\right).$$

Направляющим вектором прямой является вектор $\overrightarrow{M_1M_2}=\left\{-\dfrac{5}{12}-0;\ 0-(-1);\ \dfrac{25}{12}-1\right\}=\left\{-\dfrac{5}{12};\ 1;\ \dfrac{13}{12}\right\}$.

Запишем уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(0;\ -1;\ 1)$, с направляющим вектором $\overrightarrow{M_1M_2}=\left\{-\dfrac{5}{12};\ 1;\ \dfrac{13}{12}\right\}$, используя (4.17):

$$\frac{x-0}{-\frac{5}{12}}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-1}{\frac{13}{12}},$$

$$\frac{x}{-5}=\frac{y+1}{12}=\frac{z-1}{13}.$$

*2 способ.*

Направляющий вектор прямой $l$ перпендикулярен нормальным векторам плоскостей, определяющих прямую (*рисунок 4.13*). Поэтому направляющий вектор $\vec{l}$ можно найти как векторное произведение нормальных векторов плоскостей $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ .

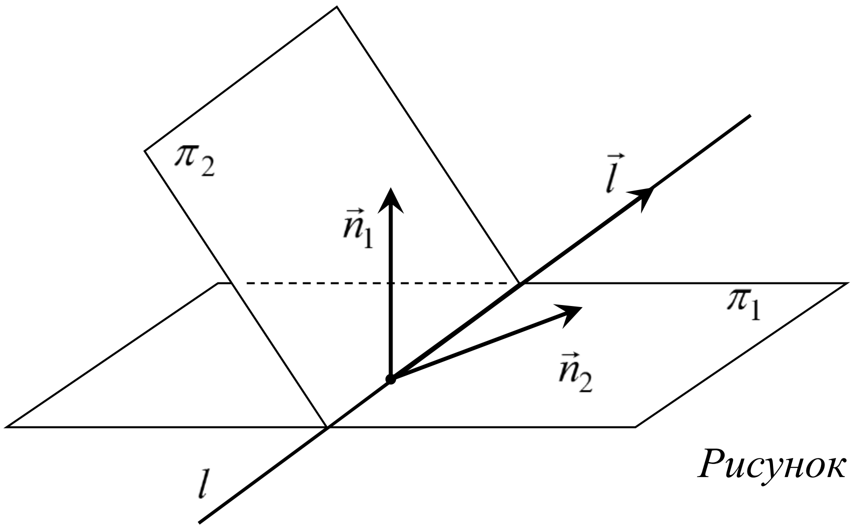



*Рисунок 4.13*

$$\vec{l} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -5\vec{i} + 12\vec{j} + 13\vec{k}.$$

Найдем точку пересечения с одной из координатных плоскостей. $M_1(0; -1; 1)$ – точка пересечения с плоскостью $Oyz$ (см. *1 способ*).

Составим канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1$, с направляющим вектором $\vec{l}$ (4.17):

$$\frac{x}{-5} = \frac{y+1}{12} = \frac{z-1}{13}.$$

**Пример 4.12.** Определить косинус угла между прямыми:

$$\begin{cases} x - y - 4z - 5 = 0, \\ 2x + y - 2z - 4 = 0; \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x - 6y - 6z + 2 = 0, \\ 2x + 2y + 9z - 1 = 0. \end{cases}$$

**Решение.**

Найдем направляющие векторы данных прямых как векторные произведения нормальных векторов образующих их плоскостей:

$$\vec{l}_1 = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} = 3(2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}),$$

$$\vec{l}_2 = \vec{n}_3 \times \vec{n}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & -6 \\ 2 & 2 & 9 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= -42\vec{i} - 21\vec{j} + 14\vec{k} = -7(6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}).$$

Таким образом, направляющие векторы прямых: $\vec{l}_1 = \{2;\, -2;\, 1\}$ и $\vec{l}_2 = \{6;\, 3;\, -2\}$.

Угол между прямыми найдем как угол между их направляющими векторами по формуле (4.20):

$$\cos\varphi = \frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} = \frac{2\cdot 6 - 2\cdot 3 - 1\cdot 2}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{36+9+4}} = \frac{4}{21}.$$

## Вопросы

1. Каковы общие уравнения прямой в пространстве?

2. Какой вектор называется направляющим вектором прямой?

3. Каковы уравнения прямой в пространстве:

а) канонические;

б) параметрические;

в) проходящей через две данные точки?

4. Как найти угол между двумя прямыми в пространстве?

5. Каковы условия параллельности прямых в пространстве?

6. Каковы условия перпендикулярности прямых в пространстве?

## Задания

**1.** Даны две точки $M(1;\, 3;\, 5)$ и $K(7;\, 8;\, 9)$. Составить канонические и параметрические уравнения прямой, проходящей через данные точки $M$ и $K$.

Ответ: $\dfrac{x-7}{6}=\dfrac{y-8}{5}=\dfrac{z-9}{4}$; $\begin{cases} x=6t+7, \\ y=5t+8, \\ z=4t+9. \end{cases}$

**2.** Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M_1(2;\ 0;\ -3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{a}=\{2;\ -3;\ 5\}$;

б) прямой $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$;

в) оси $Ox$;

г) оси $Oy$;

д) оси $Oz$.

Ответ: а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{-3}=\dfrac{z+3}{5}$;

б) $\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+3}{-1}$;

в) $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{0}$;

г) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+3}{0}$;

д) $\dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z+3}{1}$.

**3.** Составить канонические уравнения прямой, проходящей через две данные точки:

а) $(1;\ -2;\ 1)$, $(3;\ 1;\ -1)$;

б) $(3;\ -1;\ 0)$, $(1;\ 0;\ -3)$.

Ответ: а) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-1}{-2}$;

б) $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{3}$.

**4**. Составить канонические уравнения прямых:

а) $\begin{cases} x-2y+3z-4=0, \\ 3x+2y-5z-4=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x+y+z=0, \\ 2x+3y-3z+6=0. \end{cases}$

Ответ: а) $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y+1}{7}=\dfrac{z}{4}$;

б) $\dfrac{x}{-6}=\dfrac{y+1}{17}=\dfrac{z-1}{13}$.

**5.** Доказать параллельность прямых:

а) $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=2t+5, \\ y=-t+2, \\ z=t-7 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+3y+z+2=0, \\ x-y-3z-2=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0; \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2y-5z-1=0, \\ x-2y+3z-9=0. \end{cases}$

**6.** Доказать перпендикулярность прямых:

а) $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{3}$ и $\begin{cases} 3x+y-5z+1=0, \\ 2x+3y-8z+3=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=2t+1, \\ y=3t-2, \\ z=-6t+1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y-3z-1=0, \\ 2x-y-9z-2=0, \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0. \end{cases}$

**7.** Найти острый угол между прямыми $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$ и $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $60^\circ$.

## 4.4 Прямая и плоскость в пространстве

Пусть задана в пространстве прямоугольная система координат *Oxyz*, имеются плоскость $\pi$ и прямая *l*.

Углом между прямой *l* и плоскостью π называется угол $\varphi$, образованный прямой и ее проекцией на плоскость (*рисунок 4.14*).

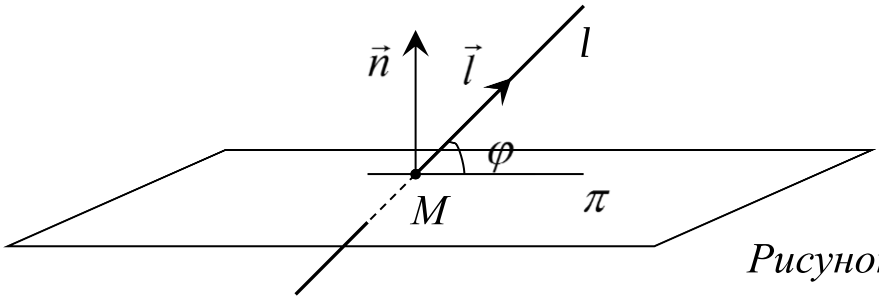



*Рисунок 4.14*

Если заданы прямая $l: \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскость $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$, то ***угол $\varphi$ между прямой l и плоскостью*** $\pi$ определяется по формуле

$$sin\,\varphi = \left|cos(\vec{l}\,,\vec{n}\,)\right| = \frac{\left|\vec{l}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{l}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|} = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \quad (4.21)$$

Чтобы найти ***координаты точки пересечения*** прямой *l* и плоскости $\pi$ (точка *M* на *рисунке 4.14*), надо перейти к параметрическим уравнениям прямой *l* и решить систему уравнений прямой *l* и плоскости $\pi$:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Для решения системы подставим *x*, *y*, *z* из первых трех уравнений в четвертое уравнение и получим уравнение с одной переменной *t*. Решив его, найдем значение параметра *t*, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости. Подставив значение *t* в первые три уравнения системы, получим координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Прямая *l* и плоскость $\pi$ параллельны тогда и только тогда, когда перпендикулярны направляющий вектор $\vec{l} = \{m; n; p\}$

прямой $l$ и нормальный вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ плоскости $\pi$ (*рисунок 4.15*). Из условия перпендикулярности векторов (3.15) следует

$$Am + Bn + Cp = 0. \qquad (4.23)$$

(4.23) – ***условие параллельности*** прямой и плоскости.

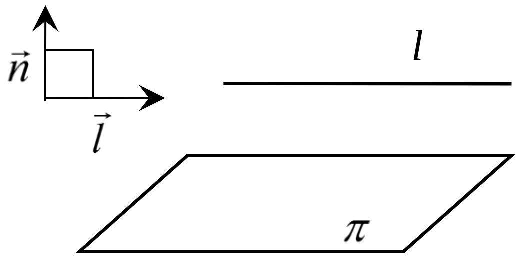



*Рисунок 4.15*

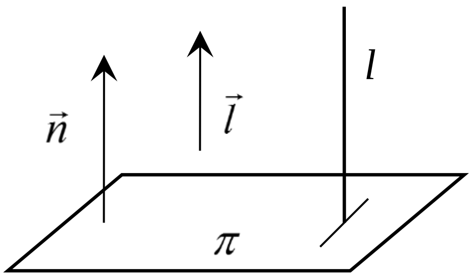



*Рисунок 4.16*

Прямая $l$ и плоскость $\pi$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда коллинеарны направляющий вектор $\vec{l} = \{m; n; p\}$ прямой $l$ и нормальный вектор $\vec{n} = \{A; B; C\}$ плоскости $\pi$ (*рисунок 4.16*). Из условия коллинеарности векторов (3.11) следует

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (4.24)$$

(4.24) – ***условие перпендикулярности*** прямой и плоскости.

**Пример 4.13.** Найти угол между прямой

$l: \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z-1}{2}$ и плоскостью $\pi: x + y + 3z + 7 = 0$.

**Решение.**

Направляющим вектором прямой $l$ является вектор $\vec{l} = \{3; -1; 2\}$, нормальный вектор плоскости $\pi$ – вектор $\vec{n} = \{1; 1; 3\}$.

Для определения угла между прямой и плоскостью воспользуемся формулой (4.21).

Получим

$$\sin\varphi = \frac{|1\cdot 3 + 1\cdot(-1) + 3\cdot 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2}\cdot\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{14}} = \frac{4\sqrt{154}}{77},$$

$$\varphi = arcsin\,\frac{4\sqrt{154}}{77} \approx 0{,}7\,(\text{рад}).$$

**Пример 4.14.** Найти уравнение плоскости $\pi$, проходящей через точку $M(3;\,-1;\,0)$ и перпендикулярной прямой $l$:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

**Решение.**

Направляющий вектор $\vec{l} = \{1;\,2;\,-2\}$ прямой $l$ перпендикулярен плоскости $\pi$, следовательно, является нормальным вектором плоскости $\pi$ (*рисунок 4.17*).

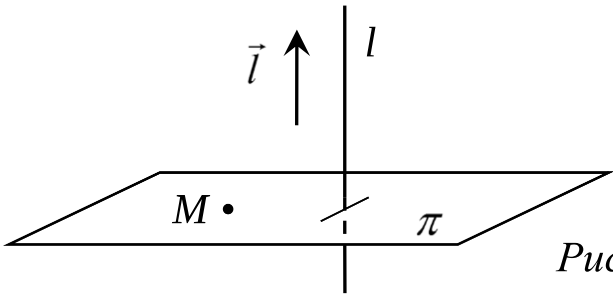



*Рисунок 4.17*

Воспользуемся уравнением плоскости, проходящей через данную точку с известным нормальным вектором (4.8). Получим

$$1\cdot(x-3) + 2\cdot(y+1) - 2\cdot(z-0) = 0,$$

$$x + 2y - 2z - 1 = 0.$$

**Пример 4.15.** Найти уравнение прямой $l$, проходящей через точку $M(-1;\,2;\,4)$ и перпендикулярной плоскости $\pi$: $2x - 3y + z - 1 = 0$.

**Решение**.

Нормальный вектор $\vec{n} = \{2;\,-3;\,1\}$ плоскости $\pi$ параллелен прямой $l$, следовательно, является направляющим вектором прямой $l$ (*рисунок 4.18*).

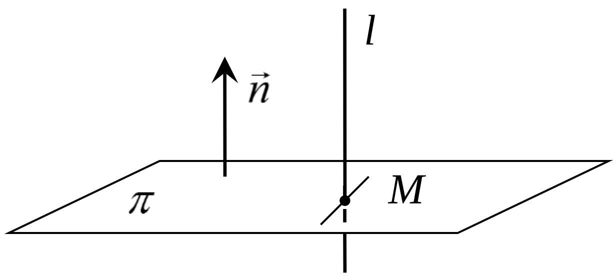



*Рисунок 4.18*

Воспользуемся каноническими уравнениями прямой (4.17). Получим

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z-4}{1}.$$

**Пример 4.16.** Найти точку пересечения прямой $l:\ \frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{2}$ и плоскости $\pi:\ x+2y+3z-19=0$.

**Решение.**

Перейдем к параметрическим уравнениям прямой и решим систему уравнений прямой и плоскости (4.22):

$$\begin{cases} x=2t, \\ y=t+1, \\ z=2t-1, \\ x+2y+3z-19=0. \end{cases}$$

Подставим в последнее уравнение системы $x$, $y$, $z$ из первых уравнений:

$$2t+2(t+1)+3(2t-1)-19=0.$$

Получим $t=2$ – значение параметра, соответствующее точке пересечения прямой и плоскости. Из первых трех уравнений системы находим координаты точки пересечения прямой и плоскости: $x=4,\ y=3,\ z=3$.

$M(4;\ 3;\ 3)$ – точка пересечения прямой и плоскости.

**Пример 4.17.** Написать уравнение плоскости, проходящей через параллельные прямые:

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2} \text{ и } \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}.$$

**Решение.**

Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n}=\{A;\ B;\ C\}$, имеет вид (4.8)

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

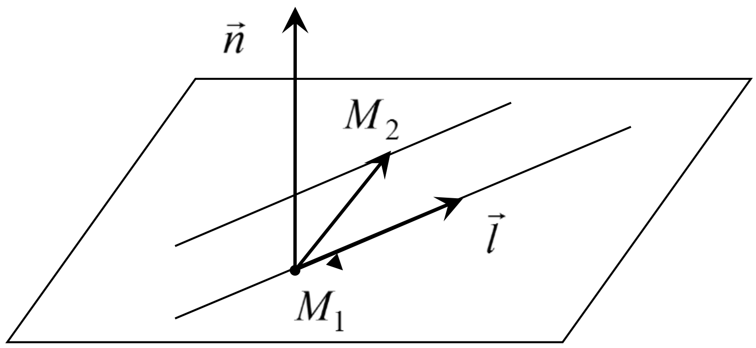



*Рисунок 4.19*

Так как прямые $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ и $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{2}$ принадлежат искомой плоскости (*рисунок 4.19*), то точки $M_1(3;\ 0;\ -1)$ и $M_2(-1;\ 1;\ 0)$, через которые проходят эти прямые, также принадлежат плоскости, т. е. в качестве $M_0$ можно взять или точку $M_1$, или точку $M_2$.

Нормальный вектор искомой плоскости можно найти как векторное произведение вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ и направляющего вектора $\vec{l}=\{2;\ 1;\ 2\}$ данных прямых, т. е.

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{l}.$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$:

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1-3;\ 1-0;\ 0-1\}=\{-4;\ 1;\ -1\}.$$

Получим

$$\vec{n} = \overline{M_1M_2} \times \vec{l} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$= 3\vec{i} + 6\vec{j} - 6\vec{k}$, т. е. $\vec{n} = \{3;\ 6;\ -6\}$.

Составим уравнение плоскости, используя (4.8):

$3(x-3) + 6(y-0) - 6(z-1) = 0,$

$x + 2y - 2z - 1 = 0.$

## Вопросы

1. Как найти точку пересечения прямой и плоскости в пространстве?
2. Как найти угол между прямой и плоскостью?
3. Каково условие параллельности прямой и плоскости в пространстве?
4. Каково условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве?

## Задания

**1.** Найти угол между прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+1}{-2}$ и плоскостью $x + y - z + 1 = 0$.

Ответ: $sin\,\varphi = \dfrac{1}{3}$.

**2.** Найти координаты точки $K$ пересечения прямой $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{4}$ с плоскостью $2x + 5y - 3z = 0$.

Ответ: $K\left(\dfrac{1}{7};\ \dfrac{5}{7};\ \dfrac{9}{7}\right)$.

**3.** Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $P(2;\ 3;\ 1)$ на плоскость $3x + y + 2z - 11 = 0$.

Ответ: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{2}$.

**4.** Найти проекцию точки $P(3;1;-1)$ на плоскость $x+2y+3z-30=0$.

Ответ: $(5;5;5)$.

**5.** Найти точку Q, симметричную точке $P(3;-4;-6)$ относительно плоскости, проходящей через $M_1(-6;1;-5)$, $M_2(7;-2;-1)$, $M_3(10;-7;1)$.

Ответ: $Q(1;-2;2)$.

**6.** Вычислить расстояние от точки $P(1;-1;-2)$ до прямой $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

Ответ: 7.

**7.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $Q(1;-2;1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases} x-2y+z-3=0, \\ x+y-z+2=0. \end{cases}$

Ответ: $x+2y+3z=0$.

**8.** Составить уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $Q(3;2;1)$ на прямую $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z+6}{1}$.

Ответ: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-1}{6}$.

**9.** Составить уравнение плоскости, проходящей через две параллельные прямые:

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-3}{-2},\ \frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-2}.$$

Ответ: $2x-20y-17z-13=0$.

**10.** Вычислить кратчайшее расстояние между двумя прямыми:

а) $\frac{x+7}{3}=\frac{y+4}{4}=\frac{z+3}{-2}$ и $\frac{x-21}{6}=\frac{y+5}{-4}=\frac{z-2}{-1}$;

б) $\begin{cases} x=2t-4, \\ y=-t+4, \\ z=-2t-1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=4t-5, \\ y=-3t+5, \\ z=-5t+5; \end{cases}$

в) $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$ и $\begin{cases} x=6t+9, \\ y=-2t, \\ z=-t+2. \end{cases}$

Ответ: а) 13; б) 3; в) 7.

# 5 ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

**Задание 1.** Вычислите определитель матрицы $A$ (*таблица 5.1*).

*Указание.* Рассмотрите решение примеров 1.4 и 1.5. Для проверки используйте примеры А.1 и Б.1 из приложений А и Б.

*Таблица 5.1 – Данные к заданию 1*

| № варианта | $A$ | № варианта | $A$ |
|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | **8** | $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 6 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **2** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ | **9** | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **3** | $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 10 \\ 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 8 & -4 & -3 \end{pmatrix}$ | **10** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **4** | $\begin{pmatrix} 5 & 9 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 \\ 4 & -5 & 8 & -6 \end{pmatrix}$ | **11** | $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 13 \\ 2 & 5 & 6 & 11 \\ 2 & -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **5** | $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 7 & 3 \\ 6 & 6 & 13 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ | **12** | $\begin{pmatrix} 9 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 6 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **6** | $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ | **13** | $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ |
| **7** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ | **14** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ |

*Окончание таблицы 5.1*

| № варианта | $A$ | № варианта | $A$ |
|---|---|---|---|
| **15** | $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 & 4 \\ 8 & 2 & 3 & 7 \\ 10 & 3 & 4 & 11 \\ 6 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ | **23** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **16** | $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 7 & 8 \\ -6 & 4 & -9 & -2 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ | **24** | $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **17** | $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \\ 4 & 7 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | **25** | $\begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 & 4 \\ -2 & 7 & 3 & 5 \\ -4 & -2 & 5 & -2 \\ -6 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **18** | $\begin{pmatrix} 5 & -6 & 10 & -7 \\ -3 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -4 & 5 \\ 6 & -8 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ | **26** | $\begin{pmatrix} -2 & 7 & 4 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & 9 \\ -3 & 7 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **19** | $\begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 & 1 \\ -1 & -7 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 12 & 7 \\ 7 & 9 & 17 & 27 \end{pmatrix}$ | **27** | $\begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 \\ -4 & 4 & 3 & 6 \\ 3 & -1 & 5 & -9 \\ -7 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix}$ |
| **20** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & -5 & -3 \\ 5 & -6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ | **28** | $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 2 \\ 6 & 4 & 7 & -8 \end{pmatrix}$ |
| **21** | $\begin{pmatrix} 3 & 12 & -6 & -1 \\ -3 & -10 & 6 & 1 \\ -2 & -5 & 4 & 3 \\ 2 & -10 & 10 & -9 \end{pmatrix}$ | **29** | $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 9 \\ 3 & -13 & -2 & 8 \\ 1 & 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **22** | $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 7 & 2 \\ 7 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$ | **30** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 7 & 10 \\ 3 & 5 & 11 & 16 \\ 2 & -7 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ |

**Задание 2.** Найдите произведение матриц $A$ и $B$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} k_1 & 2 & -1 \\ -1 & k_2 & 3 \\ -2 & 4 & k_3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Значения $k_1$, $k_2$, $k_3$ даны в *таблице 5.2*.

*Указание.* В случае затруднений обратитесь к решению примера 1.7. Для проверки используйте примеры А.2 и Б.2 из приложений А и Б.

*Таблица 5.2 – Данные к заданию 2*

| № варианта | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | № варианта | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | –5 | 7 | –3 | **16** | –2 | 7 | 3 |
| **2** | 2 | 5 | –3 | **17** | 1 | 5 | 3 |
| **3** | –2 | 3 | 1 | **18** | 2 | 3 | 4 |
| **4** | 4 | 3 | –3 | **19** | 3 | 1 | 2 |
| **5** | 2 | 3 | –2 | **20** | 2 | 5 | 3 |
| **6** | 4 | –4 | –3 | **21** | 1 | 2 | 7 |
| **7** | –1 | –2 | 3 | **22** | –3 | –4 | 4 |
| **8** | 2 | –4 | 1 | **23** | 3 | 3 | –4 |
| **9** | 3 | –5 | 2 | **24** | 5 | 4 | 2 |
| **10** | 5 | 2 | –3 | **25** | 3 | –4 | 2 |
| **11** | 1 | 3 | –1 | **26** | 3 | 2 | 5 |
| **12** | 2 | 2 | –1 | **27** | –1 | 0 | 4 |
| **13** | 3 | –4 | 5 | **28** | 0 | –1 | 2 |
| **14** | 2 | –3 | 1 | **29** | 2 | 1 | 0 |
| **15** | 3 | 4 | 3 | **30** | –3 | 2 | –1 |

**Задание 3.** Найдите матрицу, обратную к матрице $A$, и выполните проверку (*таблица 5.3*).

*Указание.* Рассмотрите решение примера 1.8. Для контроля используйте примеры А.3 и Б.3 из приложений А и Б.

*Таблица 5.3 – Данные к заданию 3*

| № варианта | $A$ | № варианта | $A$ |
|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **9** | $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **2** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ | **10** | $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ |
| **3** | $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ | **11** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ |
| **4** | $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 2 \end{pmatrix}$ | **12** | $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ |
| **5** | $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -4 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ | **13** | $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ |
| **6** | $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ | **14** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ |
| **7** | $\begin{pmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 9 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ | **15** | $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 7 \\ -3 & -2 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ |
| **8** | $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ | **16** | $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ |

*Окончание таблицы 5.3*

| № варианта | $A$ | № варианта | $A$ |
|---|---|---|---|
| **17** | $\begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ | **24** | $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **18** | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ | **25** | $\begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ -3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **19** | $\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ | **26** | $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -5 \end{pmatrix}$ |
| **20** | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ | **27** | $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -5 & -2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ |
| **21** | $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ | **28** | $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ |
| **22** | $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ | **29** | $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ |
| **23** | $\begin{pmatrix} 9 & 7 & 3 \\ 4 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ | **30** | $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ |

**Задание 4.** Решите систему уравнений по формулам Крамера (*таблица 5.4*).

*Указание.* Обратитесь к решению примера 1.10. Для проверки можно использовать примеры А.5 и Б.4 из приложений А и Б.

*Таблица 5.4 – Данные к заданию 4*

| № варианта | Система уравнений | № варианта | Система уравнений |
|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$ | **8** | $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ |
| **2** | $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$ | **9** | $\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$ |
| **3** | $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$ | **10** | $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 33, \\ 7x_1 - 5x_2 = 24, \\ 4x_1 + 11x_3 = 39. \end{cases}$ |
| **4** | $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 = -33, \\ 4x_1 + x_3 = -7. \end{cases}$ | **11** | $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = 6, \\ 5x_2 + 4x_3 = -20, \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -22. \end{cases}$ |
| **5** | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$ | **12** | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$ |
| **6** | $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 21, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 10. \end{cases}$ | **13** | $\begin{cases} 3x_1 - 2x - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$ |
| **7** | $\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$ | **14** | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$ |

*Окончание таблицы 5.4*

| № варианта | Система уравнений | № варианта | Система уравнений |
|---|---|---|---|
| **15** | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22. \end{cases}$ | **23** | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 15. \end{cases}$ |
| **16** | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$ | **24** | $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -10. \end{cases}$ |
| **17** | $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 36, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -19. \end{cases}$ | **25** | $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = -11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$ |
| **18** | $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$ | **26** | $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$ |
| **19** | $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$ | **27** | $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = -8. \end{cases}$ |
| **20** | $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$ | **28** | $\begin{cases} x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -15, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$ |
| **21** | $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$ | **29** | $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -16, \\ x_1 + 3x_3 = -6, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$ |
| **22** | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 27, \\ -x_1 + 4x_2 = -14, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -12. \end{cases}$ | **30** | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 17, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -9, \\ x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -20. \end{cases}$ |

**Задание 5.** Найдите общее решение системы линейных уравнений (*таблица 5.5*). Укажите какое-либо частное решение и одно из базисных решений.

*Указание.* Рассмотрите решение примера 1.13.

*Таблица 5.5 – Данные к заданию 5*

| № варианта | Система уравнений |
|---|---|
| **1** | $\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 6, \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 14. \end{cases}$ |
| **2** | $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 6x_4 + 6x_5 = 2, \\ 15x_1 + 30x_2 + 7x_3 + 8x_4 + 3x_5 = -13, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 9x_5 = 9, \\ 6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -1. \end{cases}$ |
| **3** | $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 6, \\ 14x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 9x_4 - x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 7, \\ 8x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$ |
| **4** | $\begin{cases} 15x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 9x_5 = 23, \\ 3x_1 + 20x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = -8, \\ 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ 9x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 12. \end{cases}$ |
| **5** | $\begin{cases} 13x_1 - 4x_2 - x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 8, \\ 11x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 7, \\ 5x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 4, \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$ |
| **6** | $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 7, \\ x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 7x_5 = -4, \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$ |

*Продолжение таблицы 5.5*

| № варианта | Система уравнений |
|---|---|
| **7** | $\begin{cases} -x_1+3x_2+3x_3+4x_4+5x_5=7, \\ 6x_1+2x_2+2x_3-x_4=-2, \\ -3x_1+x_2+x_3+2x_4+3x_5=5, \\ 11x_1+3x_2+3x_3+x_4-x_5=-5. \end{cases}$ |
| **8** | $\begin{cases} x_1+x_2-3x_3-x_5=-2, \\ x_1-x_2+2x_3-x_4=1, \\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=7, \\ 2x_1-4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=1. \end{cases}$ |
| **9** | $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4+x_5=4, \\ 3x_1+6x_2+5x_3-4x_4+3x_5=5, \\ x_1+2x_2+7x_3-4x_4+x_5=11, \\ 2x_1+4x_2+2x_3-3x_4+3x_5=6. \end{cases}$ |
| **10** | $\begin{cases} 9x_1+7x_2+5x_3+6x_4+9x_5=10, \\ 8x_1+4x_2+2x_3+3x_5=5, \\ 5x_1+3x_2+x_3+2x_4+3x_5=4, \\ 7x_1+5x_2+3x_3+4x_4+6x_5=7. \end{cases}$ |
| **11** | $\begin{cases} 6x_1+x_2-3x_3+9x_4+5x_5=0, \\ 6x_1+5x_2-3x_3+9x_4+7x_5=6, \\ 2x_1+9x_2-x_3+3x_4+3x_5=10, \\ 4x_1+7x_2-2x_3+6x_4+5x_5=8. \end{cases}$ |
| **12** | $\begin{cases} x_1-4x_2-4x_3+x_4-3x_5=-3, \\ x_1+7x_2+6x_3-2x_4+6x_5=2, \\ 9x_1+8x_2+4x_3-3x_4+9x_5=-7, \\ 7x_1+5x_2+2x_3-2x_4+6x_5=-6. \end{cases}$ |
| **13** | $\begin{cases} 5x_1+6x_2+x_3+10x_4+7x_5=3, \\ 5x_1+x_2+2x_3+5x_4+4x_5=7, \\ 4x_1+3x_2+x_3+7x_4+5x_5=4, \\ 3x_1+2x_2+x_3+4x_4+3x_5=3. \end{cases}$ |

| № варианта | Система уравнений |
|---|---|
| **14** | $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 17x_4 + 10x_5 = -7. \end{cases}$ |
| **15** | $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 1, \\ 5x_1 - 5x_2 + 12x_3 + 11x_4 - 4x_5 = -4, \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -2. \end{cases}$ |
| **16** | $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$ |
| **17** | $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$ |
| **18** | $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -2. \end{cases}$ |
| **19** | $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1, \\ 13x_1 + 8x_2 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 9, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 2. \end{cases}$ |
| **20** | $\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 6x_4 + 8x_5 = 5, \\ 10x_1 - 5x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 15x_5 = 10, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 11x_5 = 8. \end{cases}$ |

| № варианта | Система уравнений |
|---|---|
| **21** | $\begin{cases} 2x_1+3x_2+7x_3+x_4+2x_5=1, \\ x_1+2x_2+3x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4+4x_5=4, \\ 4x_1+3x_2+2x_3+3x_4+6x_5=5. \end{cases}$ |
| **22** | $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=5, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=-2, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=-2, \\ 3x_1-3x_2+4x_3-2x_4-x_5=1. \end{cases}$ |
| **23** | $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3+x_4-x_5=4, \\ 2x_1-x_2+7x_3-3x_4+5x_5=6, \\ x_1+3x_2-2x_3+5x_4-7x_5=2, \\ 3x_1+2x_2+7x_3-5x_4+8x_5=5. \end{cases}$ |
| **24** | $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+2x_5=2, \\ x_1-x_2-3x_3-4x_4-3x_5=-4, \\ 2x_1+3x_2+x_3-5x_4+2x_5=1, \\ x_1-2x_2-2x_3-3x_4-5x_5=-7. \end{cases}$ |
| **25** | $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4+2x_5=0, \\ x_1+2x_2-x_3-x_5=1, \\ x_1-x_2+2x_3-3x_4=-1, \\ x_2-x_3+x_4-2x_5=-1. \end{cases}$ |
| **26** | $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+2x_5=3, \\ x_1-x_2+2x_3+3x_4+5x_5=8, \\ 3x_1+7x_2+8x_3-11x_4-3x_5=-2, \\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4+x_5=3. \end{cases}$ |
| **27** | $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+6x_4+9x_5=2, \\ x_1-2x_2+2x_4+3x_5=-7, \\ 2x_1+x_2+4x_3+2x_4+3x_5=3, \\ 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4+6x_5=1. \end{cases}$ |

| № варианта | Система уравнений |
|---|---|
| **28** | $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_5 = -2, \\ 4x_1 - 7x_2 + 5x_3 - x_4 - 2x_5 = -1, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = -2. \end{cases}$ |
| **29** | $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 = 5, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 3, \\ 4x_1 - 4x_2 - 2x_4 - 3x_5 = -1. \end{cases}$ |
| **30** | $\begin{cases} 5x_1 - x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 4, \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = -7. \end{cases}$ |

**Задание 6.** Даны координаты вершин треугольника *ABC* (*таблица 5.6*). Найдите:

1) уравнение стороны *AB*;
2) уравнение высоты *CH* и ее длину;
3) уравнение медианы *AM* и ее длину;
4) точку *N* пересечения медианы *AM* и высоты *CH*;
5) уравнение прямой, проходящей через вершину *C* параллельно стороне *AB*;
6) внутренний угол *B* треугольника *ABC*.

*Указание.* Воспользуйтесь решением следующих примеров:

1) пример 2.9;
2) примеры 2.13, 2.14;
3) примеры 2.3, 2.9;
4) пример 2.15;
5) пример 2.12;
6) пример 2.11.

*Таблица 5.6 – Данные к заданию 6*

| № вар. | *A* | *B* | *C* | № вар. | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | (–2; 4) | (3; 1) | (10; 7) | **2** | (6; –9) | (10;–1) | (–4; 1) |

*Окончание таблицы 5.6*

| № варианта | *A* | *B* | *C* | № варианта | *A* | *B* | *C* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **3** | (–3; –2) | (14; 4) | (6; 8) | **17** | (4; 1) | (–3; –1) | (7; –3) |
| **4** | (1; 7) | (–3; –1) | (11; –3) | **18** | (–4; 2) | (6; –4) | (4; 10) |
| **5** | (1; 0) | (–1; 4) | (9; 5) | **19** | (3; –1) | (11; 3) | (–6; 2) |
| **6** | (1; –2) | (7; 1) | (3; 7) | **20** | (2; 5) | (–7; 4) | (5; –5) |
| **7** | (–2;–3) | (1;6) | (6;1) | **21** | (–1; –4) | (9; 6) | (–5; 4) |
| **8** | (–4; 2) | (–6; 6) | (6; 2) | **22** | (10; –2) | (4; –5) | (–3; 1) |
| **9** | (4; –3) | (7; 3) | (1; 10) | **23** | (–3; –1) | (–4; –5) | (8; 1) |
| **10** | (4; –4) | (8; 2) | (3; 8) | **24** | (–2; –6) | (–3; 5) | (4; 0) |
| **11** | (–3; –3) | (5; –7) | (7; 7) | **25** | (–7; –2) | (3; –8) | (–4; 6) |
| **12** | (1; –6) | (3; 4) | (–3; 3) | **26** | (0; 2) | (–7; –4) | (3; 2) |
| **13** | (–4; 2) | (8; –6) | (2; 6) | **27** | (7; 0) | (1; 4) | (–8; –4) |
| **14** | (–5; 2) | (0; –4) | (5; 7) | **28** | (1; –3) | (0; 7) | (–2; 4) |
| **15** | (4; –4) | (6; 2) | (–1; 8) | **29** | (–5; 1) | (8; –2) | (1; 4) |
| **16** | (–3; 8) | (–6; 2) | (0; –5) | **30** | (2; 5) | (–3; 1) | (0; 4) |

**Задание 7.** Постройте область решений системы неравенств (*таблица 5.7*).

*Указание.* Рассмотрите решение примера 2.16.

*Таблица 5.7 – Данные к заданию 7*

| № варианта | Система неравенств | № варианта | Система неравенств |
|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{cases} 3x-4y+15\ge 0, \\ 7x-y-40\le 0, \\ x+2y+5\ge 0. \end{cases}$ | **2** | $\begin{cases} 3x-4y+8\ge 0, \\ 7x-y-23\le 0, \\ x+2y+16\ge 0. \end{cases}$ |

*Продолжение таблицы 5.7*

| № варианта | Система неравенств | № варианта | Система неравенств |
|---|---|---|---|
| **3** | $\begin{cases} 3x+4y+7\ge 0, \\ 7x+y-42\le 0, \\ x-2y+9\ge 0. \end{cases}$ | **12** | $\begin{cases} 3x+4y-2\ge 0, \\ 7x+y-63\le 0, \\ x-2y+6\ge 0. \end{cases}$ |
| **4** | $\begin{cases} 4x-3y-16\ge 0, \\ 2x+y-18\le 0, \\ x-2y-4\le 0. \end{cases}$ | **13** | $\begin{cases} 4x-3y-25\ge 0, \\ 2x+y-15\le 0, \\ x-2y-10\le 0. \end{cases}$ |
| **5** | $\begin{cases} 3x-4y+29\ge 0, \\ 7x-y-24\le 0, \\ x+2y+3\ge 0. \end{cases}$ | **14** | $\begin{cases} 3x-4y+22\ge 0, \\ 7x-y-32\le 0, \\ x+2y+4\ge 0. \end{cases}$ |
| **6** | $\begin{cases} 3x+4y+1\ge 0, \\ 7x+y-21\le 0, \\ x-2y+17\ge 0. \end{cases}$ | **15** | $\begin{cases} 3x+4y-11\ge 0, \\ 7x+y-84\le 0, \\ x-2y-3\le 0. \end{cases}$ |
| **7** | $\begin{cases} 4x-3y-7\ge 0, \\ 2x+y-11\le 0, \\ x-2y-3\le 0. \end{cases}$ | **16** | $\begin{cases} 4x-3y-20\ge 0, \\ 2x+y-20\le 0, \\ x-2y-5\le 0. \end{cases}$ |
| **8** | $\begin{cases} 3x-4y+3\ge 0, \\ 7x-y-43\le 0, \\ x+2y+11\ge 0. \end{cases}$ | **17** | $\begin{cases} 3x-4y-10\ge 0, \\ 7x-y-65\le 0, \\ x+2y+10\ge 0. \end{cases}$ |
| **9** | $\begin{cases} 3x+4y+17\ge 0, \\ 7x+y-27\le 0, \\ x-2y+9\ge 0. \end{cases}$ | **18** | $\begin{cases} 3x+4y+8\ge 0, \\ 7x+y-96\le 0, \\ x-2y+15\ge 0. \end{cases}$ |
| **10** | $\begin{cases} 3x-4y+10\ge 0, \\ 7x-y-10\le 0, \\ x+2y+10\ge 0. \end{cases}$ | **19** | $\begin{cases} 3x-4y+9\ge 0, \\ 7x-y-54\le 0, \\ x+2y+3\ge 0. \end{cases}$ |
| **11** | $\begin{cases} 4x-3y-18\ge 0, \\ 2x+y-14\le 0, \\ x-2y-7\le 0. \end{cases}$ | **20** | $\begin{cases} 4x-3y-10\ge 0, \\ 2x+y-10\le 0, \\ x-2y-5\le 0. \end{cases}$ |

*Окончание таблицы 5.7*

| № варианта | Система неравенств | № варианта | Система неравенств |
|---|---|---|---|
| **21** | $\begin{cases} 3x+4y-12\geq 0, \\ 7x+y-78\leq 0, \\ x-2y+15\geq 0. \end{cases}$ | **26** | $\begin{cases} 3x+4y+25\geq 0, \\ 7x+y-25\leq 0, \\ x-2y+5\geq 0. \end{cases}$ |
| **22** | $\begin{cases} 4x-3y+7\geq 0, \\ 2x+y-9\leq 0, \\ x-2y+3\leq 0. \end{cases}$ | **27** | $\begin{cases} 4x+3y-8\geq 0, \\ 2x-y-14\leq 0, \\ x+7y-52\leq 0. \end{cases}$ |
| **23** | $\begin{cases} 3x-4y-4\geq 0, \\ 7x-y-76\leq 0, \\ x+2y+2\geq 0. \end{cases}$ | **28** | $\begin{cases} 3x-4y+19\geq 0, \\ 7x-y-14\leq 0, \\ x+2y+13\geq 0. \end{cases}$ |
| **24** | $\begin{cases} 3x+4y+8\geq 0, \\ 7x+y-23\leq 0, \\ x-2y+16\geq 0. \end{cases}$ | **29** | $\begin{cases} 3x+4y-3\geq 0, \\ 7x+y-57\leq 0, \\ x-2y+9\geq 0. \end{cases}$ |
| **25** | $\begin{cases} 4x-3y+11\geq 0, \\ 2x+y-7\leq 0, \\ x-2y+4\leq 0. \end{cases}$ | **30** | $\begin{cases} x+2y-3\leq 0, \\ 4x-9y-29\leq 0, \\ 7x-3y+13\geq 0. \end{cases}$ |

**Задание 8.** Составьте уравнение линии, для каждой точки которой отношение расстояний до точки $A$ и прямой $l$ равно $\varepsilon$ (*таблица 5.8*). Постройте линию.

*Указание.* Обратитесь к решению примера 2.4.

*Таблица 5.8 – Данные к заданию 8*

| № варианта | $A$ | $l$ | $\varepsilon$ | № варианта | $A$ | $l$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | (2; 0) | $x=8$ | 0,5 | **5** | (–8; 0) | $x=-2$ | 2 |
| **2** | (4; 0) | $x=1$ | 2 | **6** | (–2; 0) | $x=2$ | 1 |
| **3** | (2; 0) | $x=-2$ | 1 | **7** | (1; 0) | $x=4$ | 0,5 |
| **4** | (–3; 0) | $x=-12$ | 0,5 | **8** | (2; 0) | $x=0,5$ | 2 |

*Окончание таблицы 5.8*

| № варианта | $A$ | $l$ | $\varepsilon$ | № варианта | $A$ | $l$ | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **9** | (0; 4) | $y=-4$ | 1 | **20** | (5; 0) | $x=1{,}8$ | $1\frac{2}{3}$ |
| **10** | (–4; 0) | $x=-6{,}25$ | 0,8 | **21** | (0; 3) | $y=-3$ | 1 |
| **11** | (–5; 0) | $x=-3{,}2$ | 1,25 | **22** | (–16; 0) | $x=-25$ | 0,6 |
| **12** | (0; –4) | $y=4$ | 1 | **23** | (–10; 0) | $x=-3{,}6$ | $1\frac{2}{3}$ |
| **13** | (3; 0) | $x=8\frac{1}{3}$ | 0,6 | **24** | (0; –3) | $y=3$ | 1 |
| **14** | (10; 0) | $x=6{,}4$ | 1,25 | **25** | (18; 0) | $x=50$ | 0,6 |
| **15** | (5; 0) | $x=-5$ | 1 | **26** | (15; 0) | $x=5{,}4$ | $1\frac{2}{3}$ |
| **16** | (–8; 0) | $x=-12{,}5$ | 0,8 | **27** | (6; 0) | $x=-6$ | 1 |
| **17** | (–15; 0) | $x=-9{,}6$ | 1,25 | **28** | (–6; 0) | $x=-16\frac{2}{3}$ | 0,6 |
| **18** | (–5; 0) | $x=5$ | 1 | **29** | (–25;0) | $x=-16$ | 1,25 |
| **19** | (9; 0) | $x=25$ | 0,6 | **30** | (0; –6) | $y=6$ | 1 |

**Задание 9.** Определите вид кривой второго порядка и постройте ее (*таблица 5.9*).

*Указание.* Рассмотрите решение примеров 2.17, 2.18, 2.19.

*Таблица 5.9 – Данные к заданию 9*

| № варианта | Уравнение линии |
|---|---|
| **1** | $16x^2-9y^2-64x+54y-161=0$ |
| **2** | $y^2-16x+8y+32=0$ |
| **3** | $x^2+4y^2-6x+8y-3=0$ |
| **4** | $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$ |

*Окончание таблицы 5.9*

| № варианта | Уравнение линии |
|---|---|
| **5** | $y^2-8y-4x=0$ |
| **6** | $x^2+4y^2-4x+8y-8=0$ |
| **7** | $9x^2-16y^2+90x+32y-367=0$ |
| **8** | $x^2+6x-2y+5=0$ |
| **9** | $4x^2+9y^2-8x+54y+49=0$ |
| **10** | $16x^2-25y^2+32x+50y+391=0$ |
| **11** | $x^2+4x+2y+4=0$ |
| **12** | $16x^2+25y^2-150y-175=0$ |
| **13** | $16x^2-9y^2-64x-18y-89=0$ |
| **14** | $y^2-12x-6y+33=0$ |
| **15** | $25x^2+9y^2+100x-18y-116=0$ |
| **16** | $x^2-4y^2+4x+8y-16=0$ |
| **17** | $x^2-4x-8y-4=0$ |
| **18** | $49x^2+4y^2+98x-147=0$ |
| **19** | $9x^2-25y^2-72x-100y-181=0$ |
| **20** | $y^2+4x+6y-11=0$ |
| **21** | $9x^2+16y^2-36x+32y-92=0$ |
| **22** | $-4x^2+25y^2-40x-50y-175=0$ |
| **23** | $x^2-12x-4y+16=0$ |
| **24** | $16x^2+25y^2-96x-100y-156=0$ |
| **25** | $16x^2-25y^2-160x-100y-100=0$ |
| **26** | $x^2+8x+8y+32=0$ |
| **27** | $9x^2+4y^2-36x+40y-8=0$ |
| **28** | $-25x^2+49y^2-50x+294y-809=0$ |
| **29** | $y^2+10x-6y+29=0$ |
| **30** | $49x^2+16y^2-196x-96y-444=0$ |

**Задание 10.** Дано уравнение линии в полярной системе координат (*таблица 5.10*). Постройте линию.

*Указание.* Обратитесь к решению примера 2.22.

*Таблица 5.10 –Данные к заданию 10*

| № варианта | Уравнение линии | № варианта | Уравнение линии |
|---|---|---|---|
| **1** | $\rho = 1 - sin\,\varphi$ | **16** | $\rho = 2cos^2\varphi$ |
| **2** | $\rho = 2 + cos\,\varphi$ | **17** | $\rho = 2(1 - sin\,\varphi)$ |
| **3** | $\rho = 2cos\,\varphi$ | **18** | $\rho = 4 + 2cos\,\varphi$ |
| **4** | $\rho = sin^2\varphi$ | **19** | $\rho = 3cos\,\varphi$ |
| **5** | $\rho = 1 + cos\,\varphi$ | **20** | $\rho = 2sin^2\varphi$ |
| **6** | $\rho = 2 - sin\,\varphi$ | **12** | $\rho = 2(1 + cos\,\varphi)$ |
| **7** | $\rho = 2sin\,\varphi$ | **22** | $\rho = 3 - 2sin\,\varphi$ |
| **8** | $\rho = cos^2\varphi$ | **23** | $\rho = 3sin\,\varphi$ |
| **9** | $\rho = 1 + sin\,\varphi$ | **24** | $\rho = -2cos^2\varphi$ |
| **10** | $\rho = 2 - cos\,\varphi$ | **25** | $\rho = 2(1 + sin\,\varphi)$ |
| **11** | $\rho = -2cos\,\varphi$ | **26** | $\rho = 3 - 2cos\,\varphi$ |
| **12** | $\rho = -4sin^2\varphi$ | **27** | $\rho = -3cos\,\varphi$ |
| **13** | $\rho = 1 - cos\,\varphi$ | **28** | $\rho = -2sin^2\varphi$ |
| **14** | $\rho = 2 + sin\,\varphi$ | **29** | $\rho = 2(1 - cos\,\varphi)$ |
| **15** | $\rho = -4sin\,\varphi$ | **30** | $\rho = 3 + 2sin\,\varphi$ |

**Задание 11.** Постройте линию, заданную параметрическими уравнениями (*таблица 5.11*). Перейдите от параметрических уравнений к уравнению вида $F(x; y) = 0$.

*Указание.* Рассмотрите решение примера 2.6.

*Таблица 5.11 – Данные к заданию 11.*

| № варианта | Уравнения линии | № варианта | Уравнения линии |
|---|---|---|---|
| **1** | $\begin{cases} x = t^2, \\ y = 4t - 1 \end{cases}$ | **13** | $\begin{cases} x = 5 + t, \\ y = 5 - t \end{cases}$ |
| **2** | $\begin{cases} x = t - 3, \\ y = 3 + t \end{cases}$ | **14** | $\begin{cases} x = 3t, \\ y = (t+1)^2 \end{cases}$ |
| **3** | $\begin{cases} x = t, \\ y = t^2 + 2 \end{cases}$ | **15** | $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = \sin^2 t \end{cases}$ |
| **4** | $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t \end{cases}$ | **16** | $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = t^4 \end{cases}$ |
| **5** | $\begin{cases} x = 2^t, \\ y = t + 2 \end{cases}$ | **17** | $\begin{cases} x = 3^t, \\ y = t + 1 \end{cases}$ |
| **6** | $\begin{cases} x = \dfrac{t}{2}, \\ y = t^2 - t \end{cases}$ | **18** | $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = 2 + t^2 \end{cases}$ |
| **7** | $\begin{cases} x = t^2, \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$ | **19** | $\begin{cases} x = 2\sin t, \\ y = \cos^2 t \end{cases}$ |
| **8** | $\begin{cases} x = t^4, \\ y = 1 + t \end{cases}$ | **20** | $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = 2\cos t \end{cases}$ |
| **9** | $\begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3 + t \end{cases}$ | **21** | $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}$ |
| **10** | $\begin{cases} x = 4\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ | **22** | $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ |
| **11** | $\begin{cases} x = (1+t)^2, \\ y = 2t \end{cases}$ | **23** | $\begin{cases} x = 2\cos^2 t, \\ y = 2\sin^2 t \end{cases}$ |
| **12** | $\begin{cases} x = t^3, \\ y = -t^2 \end{cases}$ | **24** | $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}, \\ y = 2 + t \end{cases}$ |

*Окончание таблицы 5.11*

| № варианта | Уравнения линии | № варианта | Уравнения линии |
|---|---|---|---|
| **25** | $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = t + 3 \end{cases}$ | **28** | $\begin{cases} x = t - 3, \\ y = 1 + t^2 \end{cases}$ |
| **26** | $\begin{cases} x = sin^2 t, \\ y = cos\, t. \end{cases}$ | **29** | $\begin{cases} x = 5 - t, \\ y = t^3 \end{cases}$ |
| **27** | $\begin{cases} x = t^3, \\ y = 7 - t. \end{cases}$ | **30** | $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = \frac{1}{t} \end{cases}$ |

**Задание 12.** Дана пирамида с вершинами в точках *A*, *B*, *C* и *D* (*таблица 5.12*).Определите:

1) площадь грани *ABC*;
2) угол между ребрами *AB* и *AD*;
3) перпендикулярны ли ребра *DA* и *DB*;
4) проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на вектор $\overrightarrow{AC}$;
5) объем пирамиды *ABCD*;
6) уравнение грани *ABC*;
7) уравнение высоты *DH* и ее длину;
8) уравнение ребра *AC* и его длину.

*Указание.* Обратитесь к решению следующих примеров:

1) пример 3.14;
2) пример 3.11;
3) пример 3.13;
4) пример 3.12;
5) пример 3.15;
6) пример 4.5;
7) примеры 4.15, 4.7;
8) примеры 4.10, 4.1.

*Таблица 5.12 – Данные к заданию 12*

| № варианта | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|
| **1** | (1; –3; 1) | (2; 2; –3) | (–3; 3; –3) | (–2; 0; –4) |
| **2** | (1; –1; 6) | (4; 5; –2) | (–1; 3; 0) | (6; 1; 5) |
| **3** | (1; 2; 7) | (–1; –2; 3 | (4; 3; 0) | (0; 7; 7) |

*Продолжение таблицы 5.12*

| № | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|

| варианта | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **4** | (4; 0; 0) | (5; 2; 0) | (2; 5; 0) | (1; 2; 4) |
| **5** | (–4; 5; –5) | (–3; 3; –3) | (7; 7; 5) | (4; 9; 3) |
| **6** | (–2; 3; –2) | (2; –3; 2) | (2; 2; 0) | (1; 5; 5) |
| **7** | (1; 0; 8) | (–2; 4; 5) | (0; 3; 8) | (1; 2; –5) |
| **8** | (4; –3; –2) | (2; 2; 3) | (2; –2; –3) | (–1; –2; 13) |
| **9** | (5; 1; 0) | (7; 0; 1) | (2; 1; 4) | (5; 5; 3) |
| **10** | (4; 2; –1) | (3; 0; 4) | (0; 0; 4) | (5; –1; –3) |
| **11** | (0; 0; 2) | (2; 0; 5) | (1; 1; 0) | (4; 1; 2) |
| **12** | (–1; 2; 3) | (3; 0; 5) | (2; –1; 4) | (7; 3; 0) |
| **13** | (1; 2; 0) | (4; 1; 2) | (0; 0; 2) | (3; 0; 5) |
| **14** | (4; 1; 2) | (1; 1; 0) | (3; 0; 5) | (0; 0; 2) |
| **15** | (0; 2; 3) | (–1; 4; 2) | (7; 3; 7) | (2; 5; 0) |
| **16** | (1; 5; 5) | (–4; 3; –2) | (2; –3; 2) | (2; 2; 0) |
| **17** | (1; 3; 3) | (1; –1; 1) | (0; 2; 4) | (4; 2; –3) |
| **18** | (1; –1; 2) | (2; 1; 1) | (1; 1; 4) | (3; 6; 4) |
| **19** | (1; –3; 2) | (5; 1; –4) | (2; 0; 3) | (1; –5; 2) |
| **20** | (4; 2; –1) | (3; 0; 4) | (0; 0; 4) | (5; –1; 3) |
| **21** | (–1; 3; –1) | (3; –2; 3) | (3; 3; –3) | (2; 0; 4) |
| **22** | (1; –2; 4) | (6; –1; 4) | (4; 3; 8) | (3; –4; 10) |
| **23** | (2; –3; 2) | (–2; 3; –2) | (–2; –2; 0) | (–1; –5; –5) |
| **24** | (–3; 3; 3) | (6; –1; 4) | (0; 8; 7) | (–1; 1; 9) |

*Окончание таблицы 5.12*

| № | *A* | *B* | *C* | *D* |
|---|---|---|---|---|

| варианта | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **25** | (–4; –2; 1) | (–3; 0; –4) | (0; 0; –4) | (–5; 1; 3) |
| **26** | (0; 2; 0) | (–2; 5; 0) | (–2; 2; 6) | (0; 5; 8) |
| **27** | (0; 1; 1) | (–2; 4; 1) | (–2; 1; 7) | (0; 4; 9) |
| **28** | (1; 1; 1) | (–1; 4; 1) | (–1; 1; 7) | (1; 4; 9) |
| **29** | (1; 2; 0) | (–1; 5; 0) | (–1; 2; 6) | (1; 5; 8) |
| **30** | (0; 1; 0) | (–2; 4; 0) | (–2; 1; 6) | (0; 4; 8) |

## Примеры решения задач линейной алгебры с помощью программы «MathCAD»

Раскройте последовательно окна: «**Вид**» → «**Панели**» → «**Математика**» (*рисунок А.1*). На панели «**Математика**» найдите значок матрицы и раскройте панель «**Матрицы**». На ней с помощью символов указаны возможные действия: *вставка матрицы*, *вычисление определителя матрицы*, *транспонирование матрицы*, *нахождение обратной матрицы* и другие. Дополнительно на панели «**Математика**» найдите и раскройте окно «**Калькулятор**».

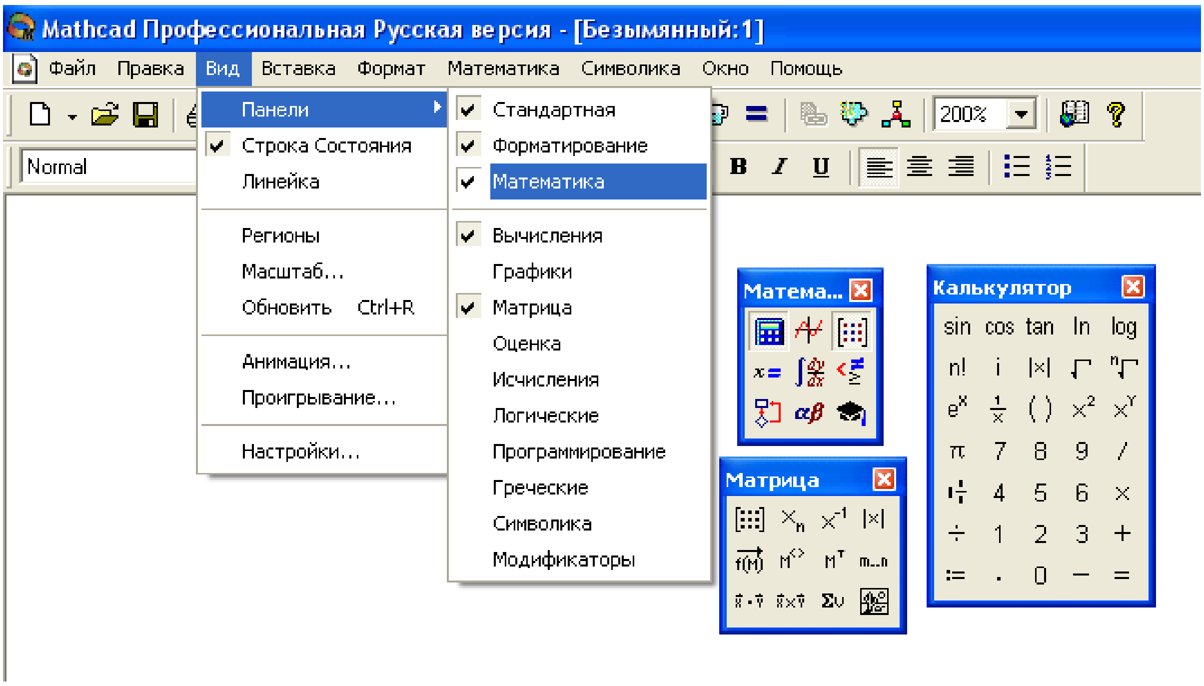



*Рисунок А.1*

**Пример А.1.** Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Введите имя матрицы – *A* и символ определения значения (символ «:=» с панели «Калькулятор»), на панели «Матрицы» откройте окно «Вставка матрицы» и задайте число строк и столбцов матрицы, затем нажмите «ОК». В результате появится шаблон матрицы. Введите значения элементов матрицы, используя либо клавиатуру, либо панель «Калькулятор» (*рисунок А.2*).

На новой строке наберите имя матрицы – *A*, затем на панели «Матрицы» найдите значок «$|\times|$», обозначающий вычисление определителя, и щелкните по нему. Затем выполните операцию вычисления, нажимая «=» на клавиатуре или на панели «Калькулятор». После знака равенства появится значение определителя матрицы *A* (*рисунок А.2*).

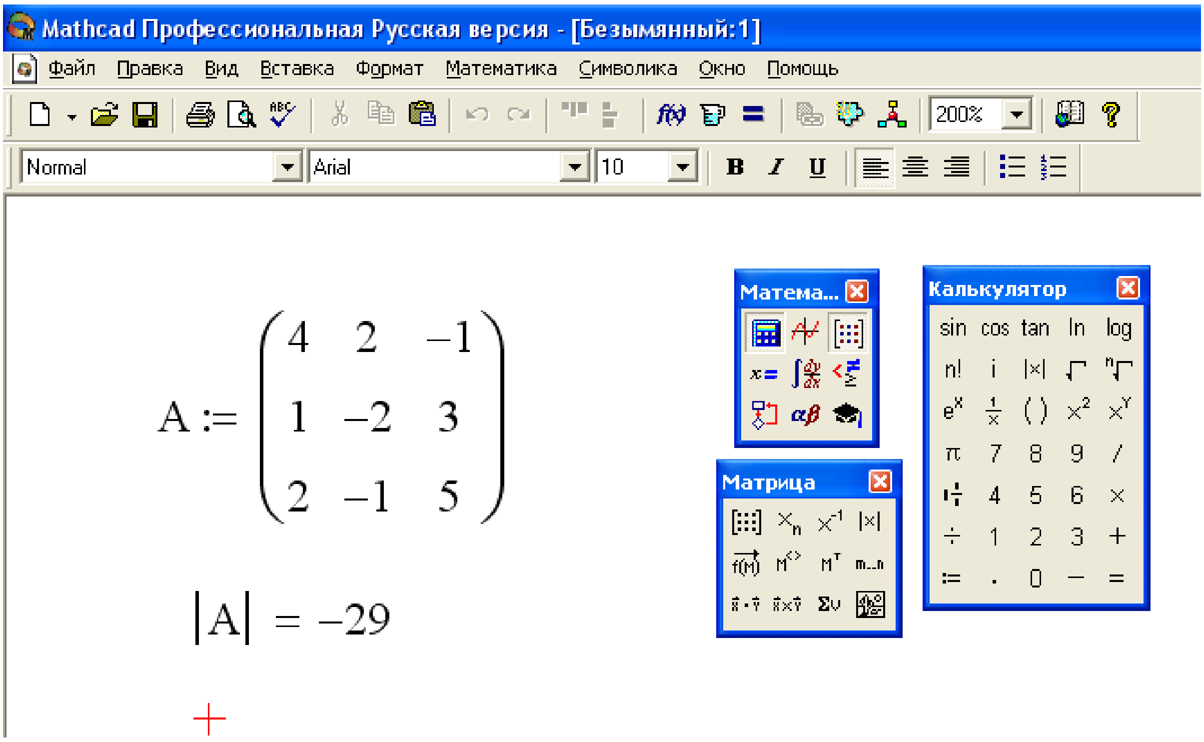



*Рисунок А.2*

**Пример А.2.** Найти произведение матриц *A* и *B*, если

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 5\\ -4 & -1\end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Введите матрицы $A$ и $B$. На новой строке наберите $A \cdot B$, используя символ умножения «×» с панели «Калькулятор», и знак «=». Появится произведение матриц $A$ и $B$.

Решение имеет вид:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$$

**Пример А.3.** Найти обратную матрицу к матрице $A$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Введите матрицу $A$. На новой строке наберите имя матрицы $A$. На панели «Матрица» найдите значок «$\times^{-1}$» и щелкните по нему, затем нажмите «=». В результате будет выведена матрица, обратная матрице $A$. Решение имеет вид:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,111 & 0,111 & -0,333 \\ -0,056 & 0,444 & -,333 \\ 0,278 & -0,222 & 0,667 \end{pmatrix}$$

Если необходимо восстановить вид присоединенной матрицы, то можно поступить следующим образом: обе части равенства $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^*$ умножим на $|A|$ и получим $A^* = |A| \cdot A^{-1}$:

$$|A| \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ -1 & 8 & -6 \\ 5 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

**Пример А.4.** Определите ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 5 & -3 & -1\end{pmatrix}.$$

**Решение.**

Введите матрицу $A$. На новой строке наберите с клавиатуры «rank(A)» и знак «=». В результате выводится ранг матрицы $A$.

Решение имеет вид:

$$A:=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 0\\ 1 & -3 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 3 & 2\\ 3 & 5 & -3 & -1\end{pmatrix}$$

$$rank(A)=3$$

**Пример А.5.** Решите систему линейных уравнений матричным методом

$$\begin{cases}4x_1+2x_3=8,\\ -x_1+3x_2+x_3=-2,\\ -2x_1+x_2+x_3=-7\ .\end{cases}$$

**Решение.**

Введите матрицу системы $A$ и матрицу-столбец свободных членов $B$. Определите матрицу-решение $X:=A^{-1}\cdot B$. На новой строке укажите имя матрицы-решения $X$ и нажмите «=».

Решение имеет вид:

$$A:=\begin{pmatrix}4 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}\quad B:=\begin{pmatrix}8\\ -2\\ -7\end{pmatrix}$$

$$X:=A^{-1}\cdot B$$

$$X=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$$

Приложение Б

## Примеры решения задач линейной алгебры с помощью приложения «Microsoft Office» – «Excel».

Общие принципы работы программы:

- данные задач (подлежащие обработке) должны быть представлены таблицей чисел одной или нескольких, в частности, таблица может состоять только из одной ячейки;
- результатом решения задачи (подзадачи) является таблица или число – таблица из одной ячейки;
- ячейки, куда предполагается вывести результат операции (значение функции) должны быть выделены, выделение осуществляется обычно мышкой при нажатой левой кнопке;
- после выделения ячеек для выведения результата необходимо вызвать одну из встроенных функций через меню: **«Вставка»** → **«Функция»**, а в предложенном диалоговом окне выбрать в поле «**Категория:**» «**Математические**» (*рисунок Б.1*);

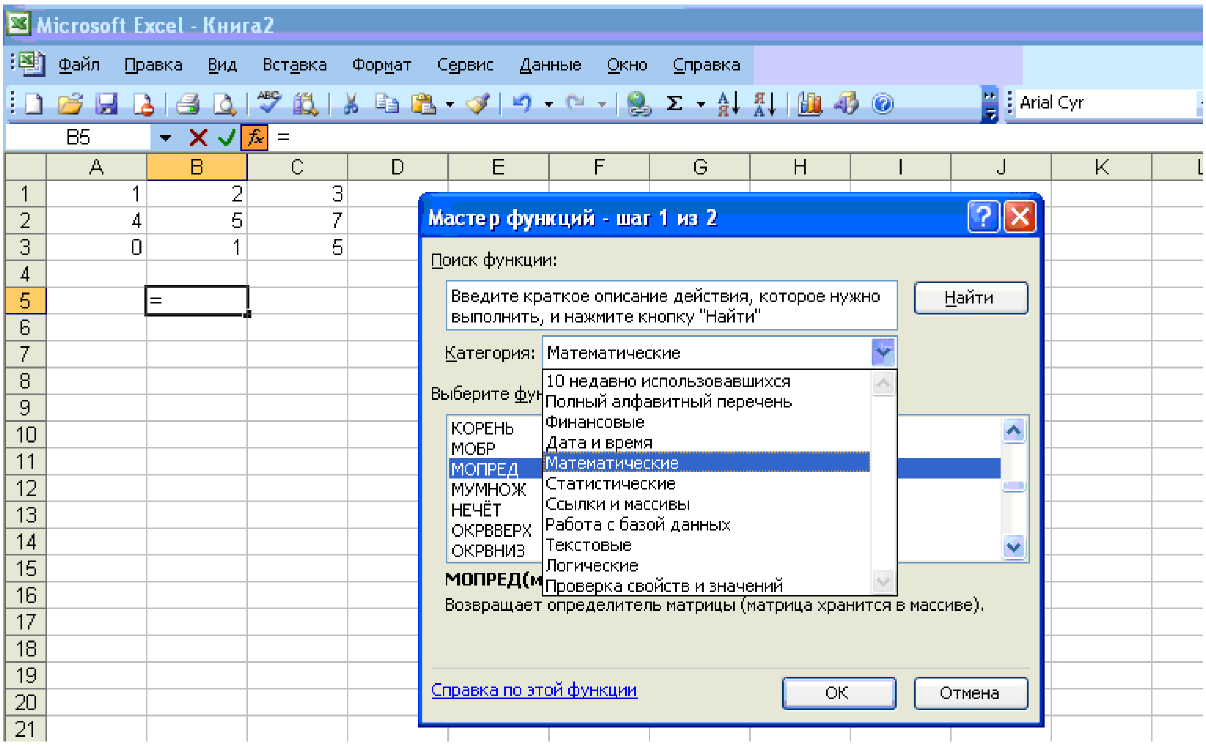



*Рисунок Б.1*

- заполнить предлагаемые поля ввода, выделив с помощью мышки нужные для исполняемой операции массивы чисел – предварительно подготовленные таблицы чисел;

- если результат операции одно число, то просто нажать ОК, если же результат – таблица, то ОК нажимают, удерживая одновременно клавиши <Ctrl> и <Shift> .

**Пример Б.1.** Найти определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

1. Заполните таблицу размерности 3×3 данными числами, по одному числу в каждой ячейке (между ячейками нет пустых ячеек). Таблицу можно расположить в любом месте рабочего листа, например в ячейках А1–С3.

| | | |
|---:|---:|---:|
| 1 | 2 | 3 |
| 4 | 5 | 7 |
| 0 | 1 | 5 |

2. Активизируйте мышкой клетку, куда будет выводиться результат, например В5.

3. Выберите в меню «Вставка» → «Функция…». Появится диалоговое окно. В нем в поле «Категория:» (по умолчанию предлагается «10 недавно использовавшихся») выберите «Математические». В поле «Выберите функцию:» выберите «МОПРЕД». Нажмите ОК.

4. В новом появившемся окне требуется указать массив чисел (указать расположение таблицы, матрицы, чей определитель вычисляется). Для этого в видимой части рабочего листа, вне выпавшего окна запроса, мышкой выделяют все ячейки расположения матрицы (щелкают левой клавишей мыши по ее левому верхнему углу, и, не отрывая левой клавиши, указатель мыши двигают в правый нижний угол). При этом вся матрица выделяется пунктирной линией, а в окне запроса появляется запись, в нашем примере, «А1:С3».

5. Нажмите ОК. В отведенной для результата ячейке, в примере «B5», появится число $''-10''$ – определитель матрицы, т. е. $|A| = -10$.

**Пример Б.2.** Найти произведение двух матриц $C \cdot D$, если

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Решение.**

1. Выделите ячейки под результат – матрицу размера 3×3, например, A10–C12.

2. Выберите в меню «Вставка» $\rightarrow$ «Функция…». Появится диалоговое окно. В нем в поле «Категория:» выберите «Математические». В поле «Выберите функцию:» выберите «МУМНОЖ». Нажмите ОК.

3. В новом появившемся окне требуется указать два массива чисел (указать расположение умножаемых матриц). В выпавшем диалоговом окне активизируйте первое поле запроса «Массив 1», затем на рабочем листе мышкой выделите ячейки матрицы *C* (в поле ввода появится, в нашем примере, «A1:C3». Аналогично активизируйте второе поле «Массив 2» и на рабочем листе выделите ячейки матрицы *D* (в поле ввода отобразится, в примере, «A6:C8»).

4. <u>ОК нажмите удерживая одновременно клавиши </u><Ctrl> и <Shift>.

По приведенным данным результатом умножения будет матрица

$$\begin{pmatrix} 10 & 14 & 12 \\ 25 & 32 & 33 \\ 0 & 13 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Пример Б.3.** Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

**Решение.**

1. Заполните таблицу 3×3 данными числами. Для примера расположите ее в ячейках A1–C3 рабочего листа.

2. Выделите мышкой клетки, куда будет выводиться результат, например A6–C8.

3. Выберите в меню «Вставка» $\rightarrow$ «Функция…». Появится диалоговое окно. В нем в поле «Категория:» выберите «Математические». В поле «Выберите функцию:» выберите «МОБР». Нажмите ОК.

4. В новом появившемся окне требуется указать массив чисел (указать расположение таблицы, матрицы, для которой вычисляется обратная). Для этого в видимой части рабочего листа, вне выпавшего окна запроса, мышкой выделяют все ячейки расположения матрицы. При этом вся матрица выделяется пунктирной линией, а в окне запроса появляется запись, в нашем примере, «A1:C3».

5. <u>ОК нажмите, удерживая одновременно клавиши</u> <Ctrl> и <Shift>.

В отведенных для результата ячейках, в примере A6–C8, появится матрица

| | | |
|---|---|---|
| -1,8 | 0,7 | 0,1 |
| 2 | -0,5 | -0,5 |
| -0,4 | 0,1 | 0,3 |

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1,8 & 0,7 & 0,1 \\ 2 & -0,5 & -0,5 \\ -0,4 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}$$

**Замечание.** Из формулы для вычисления обратной матрицы $A^{-1}$ для матрицы $A$ третьего порядка

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

следует:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot |A|.$$

Значит, можно найти ***присоединенную*** матрицу. Для этого нужно полученную в примере 2 матрицу $A^{-1}$ (в ячейках A6–C8) умножить на найденное в примере А.1 число $|A|$ (в ячейке B5).

1. Выделите ячейки под результат – матрицу размера 3×3, например, E6–G8.

2. Наберите в строке формул (поле, с названием $f_x$ , расположенное ниже основного меню, в верхней части окна) «=» и выделите мышкой таблицу, где расположена обратная матрица, (при этом в строке формул появится запись «=A6:C8») наберите «*» и выделите ячейку, где располагался определитель матрицы (в строке формул появится «=A6:C8*B5»

3. <u>ОК нажмите, удерживая одновременно клавиши </u><Ctrl> и <Shift>.

**Пример Б.4.** Решить систему матричным методом

$$\begin{cases} x \;\; + 2y + 3z = 3, \\ 4x + 5y + 7z = 8, \\ \qquad\;\; y + 5z = -2. \end{cases}$$

**Решение.**

Данной системе соответствуют матрица системы $A$; столбца свободных членов $B$; матрица переменных $X$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix};\; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix};\;\; X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Известно, что $X = A^{-1} \cdot B$.

1. Введите элементы матрицы $A$, например, в ячейки A1–C3, и матрицы B, в ячейки E1–E3.

2. Найдите $A^{-1}$, воспользовавшись примером Б.2 (матрица $A$ та же), результат, например, вывести в те же ячейки A6–C8.

3. Выделите мышкой клетки, куда будет выводиться результат, например, G1–G3.

3. Умножьте полученную $A^{-1}$ на B (см. пример Б.3): «Вставка» $\to$ «Функция…» «Категория:» «Математические» «Выберите функцию:» «МУМНОЖ».

Активизируйте поле ввода «Массив 1» и на рабочем листе мышкой выделите ячейки матрицы $A^{-1}$ (в поле ввода появится, в нашем примере, «A6:C8»). Активизируйте поле «Массив 2» и на рабочем листе выделите ячейки матрицы $B$ (в поле ввода отобразится, в примере, «E1:E3»).

**Замечание.** Если из-за диалогового окна не будет видна часть нужных для выделения матриц, диалоговое окно следует переместить.

4. OK нажмите, удерживая одновременно клавиши <Ctrl> и <Shift> .

В отведенных для результата ячейках, в примере «G1–G3», появится матрица

| |
|---|
| 2,22045E–16 |
| 3 |
| –1 |

Значит, матрица $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ячейка, содержащая «…E–16», означает 0, полученный приближенными методами.

Таким образом, $x = 0,\ \ y = 3,\ \ z = -1$ – решение системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Привалов, И.И. Аналитическая геометрия / И.И. Привалов. – Санкт-Петербург: Лань, 2004.

2. Шипачев, В.С. Высшая математика / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2002.

3. Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – М.: ОНИКС XXI век, 2005. – Ч. 1, 2.

4. Минорский, В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – М.: Наука, 2003.

## СОДЕРЖАНИЕ

Валентин Андреевич Мачнев
Наталья Александровна Кривошеева
Тамара Геннадьевна Федина
Инна Станиславовна Калинина
Мария Алексеевна Мокшанина

# ПРАКТИКУМ
# ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ
# И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие
для студентов инженерных специальностей

Компьютерная верстка Н.А. Кривошеевой
Корректор Л.А. Артамонова

Подписано в печать Формат 60×84 1/16
Бумага Усл. печ. л. 10,5
Тираж Заказ №

РИО ПГСХА
440014, г. Пенза, ул. Ботаническая, 30