

Министерство образования Российской Федерации
Томский политехнический университет

А. П. Зайцев

ОСНОВЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Томск 2000

УДК 62-52

Зайцев А.П. Основы теории автоматического управления: Учебное пособие. Томск: Изд. ТПУ, 2000. – 152 с.

В учебном пособии в краткой форме изложены теоретические вопросы по автоматическому управлению техническими системами. Содержит сведения по основным разделам ТАУ: основные понятия теории автоматического управления; математическое описание звеньев и систем; типовые динамические звенья; стационарные режимы, устойчивость и качество САУ; структурно-параметрический синтез САУ; нелинейные, импульсные и цифровые САУ.

Учебное пособие подготовлено на кафедре электропривода и автоматизации промышленных установок ТПУ в соответствии с рабочей программой по ТАУ.

Печатается по постановлению Редакционно-издательского Совета
Томского политехнического университета.

Рецензенты:

Обрусник В. П. – доктор технических наук, профессор кафедры промышленной электроники ТУСУРа.

Бейнарович В. А. – доктор технических наук, профессор кафедры комплексной информационной безопасности ЭВС ТУСУРа.

Темплан 2000

© Томский политехнический университет, 2000

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1.1. Автоматическое управление

Замену действий человека в рабочих операциях технологических процессов называют *механизацией*. Для правильного выполнения рабочих операций последними необходимо управлять (обеспечивать порядок выполнения действий, выделение ресурсов и т.д.). Эти функции выполняют *операции управления*. Совокупность управляющих операций образует *процесс управления*.

Замену действий человека в операциях управления называют *автоматизацией*, а технические устройства, выполняющие эту функцию, - *автоматическими устройствами*. Совокупность технических средств – машин, орудий труда, средств механизации, выполняющих технологический процесс, - является *объектом управления*. Совокупность средств управления и объекта образует *систему управления*. Систему, в которой все рабочие и управляющие операции выполняют автоматические устройства без участия человека, называют *автоматической системой*. Систему, в которой автоматизирована только часть операций, называют *автоматизированной системой*.

Любой технический процесс характеризуется совокупностью физических величин, называемых *координатами*, а иногда *параметрами* процесса. Термин «параметр» в этом смысле не следует применять, так как им обычно обозначают константы в математическом описании отдельных звеньев системы.

Алгоритм функционирования устройства (системы) – это совокупность предписанных действий, приводящих к правильному выполнению технического процесса в этом устройстве.

Совокупность предписаний, определяющих характер воздействий извне на объект управления с целью осуществления его алгоритма функционирования, называют *алгоритмом управления*. Процесс реализации воздействий, соответствующих алгоритму управления, называют *управлением*. В большинстве случаев управление не может полностью компенсировать влияние внешних возмущений на систему в каждый момент времени, поэтому алгоритм функционирования управляемой системы выполняется лишь приближенно.

Рассмотрим схему взаимодействия объекта управления (ОУ), управляющего устройства (УУ) и внешней среды (рис. 1.1). Физическая величина $x(t)$, которая характеризует состояние объекта и которую целенаправленно изменяют или поддерживают постоянной в процессе управления, называют *управляемой величиной* (или *управляемой координатой*, *управляемой переменной*).

Управляемой величиной может служить физическая величина, которая либо измеряется на выходе объекта, либо вычисляется косвенно. Управляемыми величинами первого типа могут быть, например, температура, давле-

ние, напряжение, скорость и т.д. Примерами величин второго типа служат коэффициент полезного действия энергетической установки, соотношение двух величин.

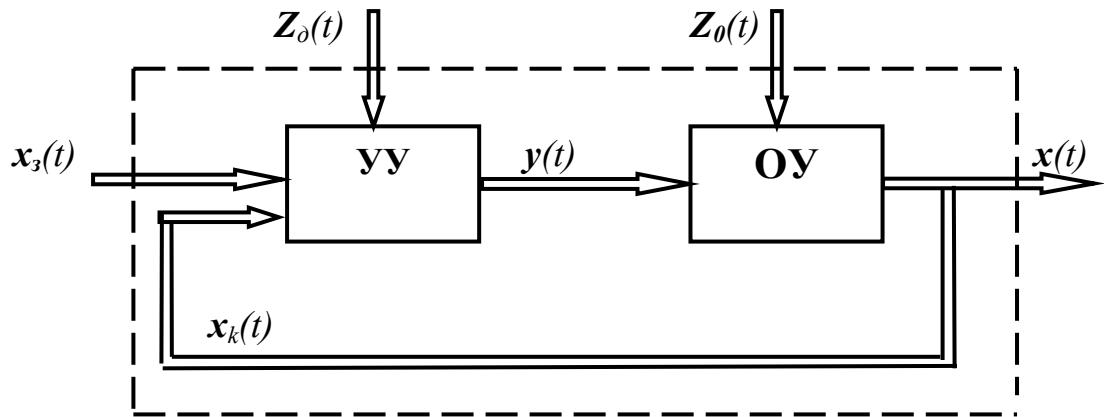


Рис. 1.1. Обобщенная структура автоматической системы управления

Если состояние управляемого объекта управления определяется несколькими величинами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, то принято говорить об n -мерном векторе состояния объекта $x(t)$. Объект в этом случае называют *многомерным*.

Управляемая величина является выходной величиной объекта и зависит от двух *входных воздействий*: *возмущающего* $Z(t)$ и *управляющего* $y(t)$. В общем случае эти воздействия могут быть также векторными величинами. Под действием возмущающих воздействий на систему управляемая величина отклоняется от заданного значения, и управляющее устройство должно выработать такое управляющее воздействие $y(t)$, которое компенсировало бы влияние возмущений.

Кроме основного возмущения $Z_0(t)$, действующего на объект, на работу системы может влиять дополнительное возмущение $Z_d(t)$, приложенное к управляющему устройству УУ. Обычно такие возмущения возникают от нестабильности напряжения источников питания УУ, а также при изменении температурного режима и т.д.

Как показано на рис. 1.1, в самом общем случае на вход УУ, помимо *управляющего воздействия* $x_3(t)$, поступает также информация о текущем состоянии объекта в виде *контрольного воздействия* $x_k(t)$, а в отдельных случаях – и информация о возмущающих воздействиях. УУ обрабатывает получаемую информацию по определенному заложенному в нем алгоритму. В результате на его выходе формируется управляющее воздействие.

На рис. 1.2 изображена функциональная схема одномерной системы автоматического управления (САУ), на которой показаны основные составные части управляющего устройства (УУ): *чувствительные устройства* (ЧУ), *вычислительное устройство* (ВУ) и *исполнительное устройство* (ИУ).

Чувствительные устройства (измерительные устройства) служат для измерения переменных $x(t)$, $x_3(t)$, $Z(t)$.

Вычислительное устройство реализует алгоритм работы управляющего устройства, соответствующим образом обрабатывая поступающую от чувствительных устройств входную информацию. В простейшем случае оно осуществляет простые математические операции, а в более сложных случаях ВУ может представлять собой управляющую ЭВМ и даже комплекс таких машин.

Исполнительные устройства предназначены для непосредственного управления объектом, т.е. изменения его состояния в соответствии с сигналом, выдаваемым вычислительным устройством.

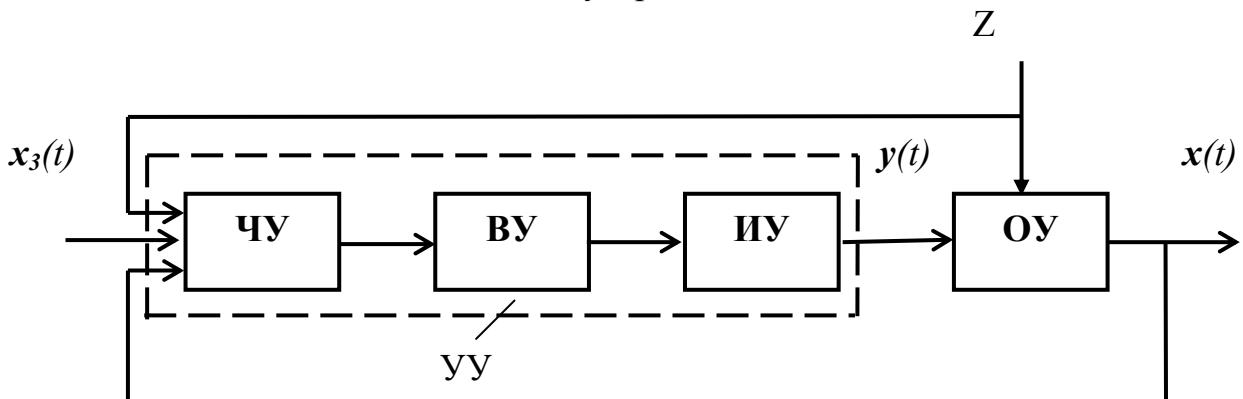


Рис. 1.2. Функциональная схема системы автоматического управления

Помимо перечисленных выше частей в состав УУ могут входить различные специальные согласующие устройства.

1.2. Фундаментальные принципы управления

В основе построения САУ лежат общие фундаментальные принципы управления, определяющие, каким образом согласуются алгоритмы функционирования и управления с фактическим функционированием или причинами, вызывающими отклонение функционирования от заданного. В технике известны и применяются три фундаментальных принципа: разомкнутого управления, компенсации и обратной связи.

Принцип разомкнутого управления состоит в том, что алгоритм управления вырабатывается только на основе заданного алгоритма функционирования и не контролируется по другим факторам – возмущениям или выходным координатам процесса (рис. 1.3, а). Задание $x_3(t)$ алгоритма функционирования может вырабатываться как специальным техническим устройством – задатчиком программы, так и выполняться заранее при проектировании системы и затем непосредственно использоваться при конструировании УУ. В последнем случае задатчик программы отсутствует. В обоих случаях схема имеет вид разомкнутой цепи, в которой основное воздействие передается от

входа к выходу, как показано стрелками. Несмотря на очевидные недостатки (низкая точность управления при изменении возмущающих воздействий и отсутствие контроля выходной координаты) этот принцип используют очень широко.

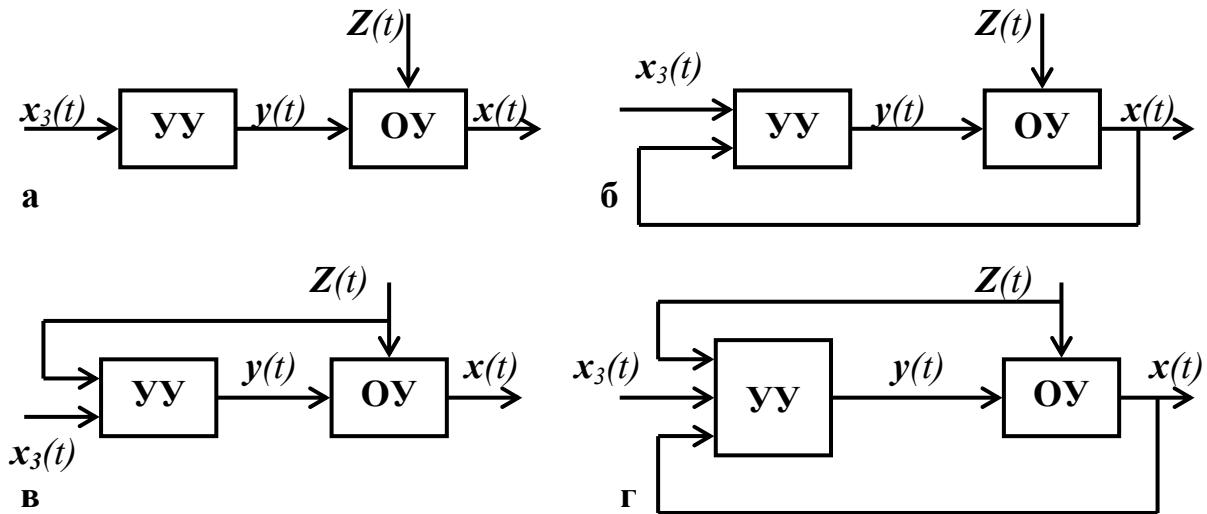


Рис. 1.3. Функциональные структуры систем управления с цепями воздействий: разомкнутой - а, в, замкнутой - б и комбинированной - г

Принцип компенсации (управление по возмущению). Если возмущающие воздействия настолько велики, что разомкнутая цепь не обеспечивает требуемой точности выполнения алгоритма функционирования, то для повышения точности вводят корректиры в алгоритм управления, которые компенсировали бы влияние измеряемого возмущения (рис. 1.3,в).

Принципиальная схема системы стабилизации напряжения электромашинного усилителя (ЭМУ) путем компенсации возмущения приведена на рис. 1.4. Задающее воздействие u_e подается на задающую обмотку возбуждения OY_1 и определяет величину выходного напряжения ЭМУ. Возмущающим воздействием является ток нагрузки i ЭМУ, при увеличении которого (за счет уменьшения сопротивления нагрузки R_n) снижается выходное напряжение U из-за падения напряжения на сопротивлении продольной цепи якоря ЭМУ: $U=E-iR_a$, где R_a – полное сопротивление цепи якоря, E – ЭДС ЭМУ. При увеличении тока якоря увеличивается пропорционально ему падение напряжения на дополнительном сопротивлении R , предназначенном для измерения возмущения. Это напряжение поступает на управляющую обмотку возбуждения OY_2 и увеличивает поток возбуждения Φ_2 . Суммарный поток $\Phi=\Phi_1+\Phi_2$ возрастает, и величина напряжения на выходе ЭМУ восстанавливается.

Если возмущающее воздействие не может быть непосредственно измерено, то его определяют косвенным путем, что приводит к снижению точности управления. Если же возмущающее воздействие измеряется, то можно до-

биться его полной компенсации с нулевой ошибкой отклонения выходной координаты в статическом режиме.

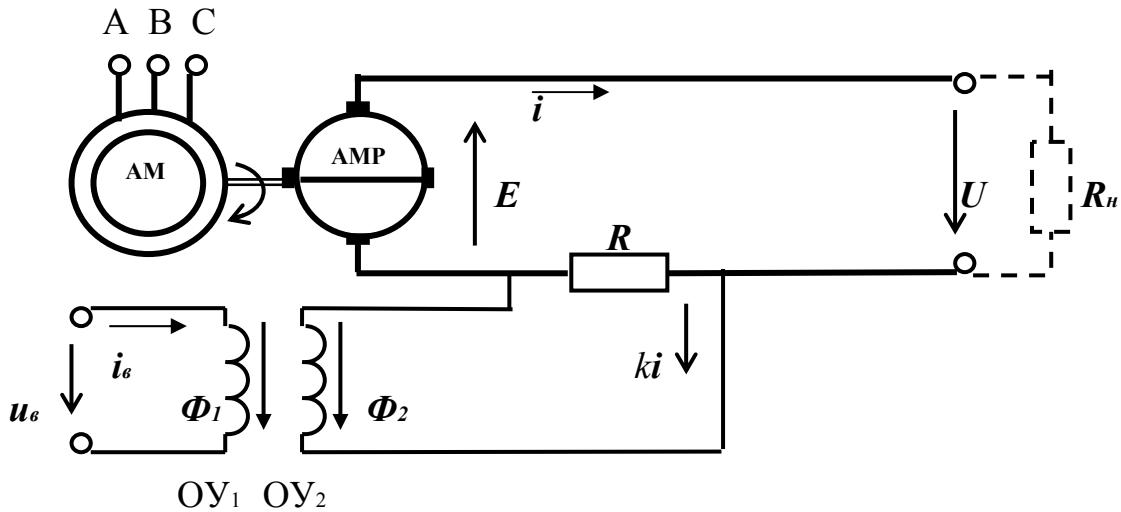


Рис. 1.4. Система стабилизации напряжения ЭМУ

Принцип обратной связи. Регулирование по отклонению. Систему можно построить и так, чтобы точность выполнения алгоритма обеспечивалась и без измерения возмущения. На рис. 1.3,в показана структура САУ, в которой корректиды в алгоритм управления вносятся по фактическому значению выходной координаты. На вход управляющего устройства поступают как внешнее (задающее) воздействие, так и внутреннее (контрольное). Внутреннее воздействие образует цепь отрицательной обратной связи по выходной координате и делает систему замкнутой.

Управляющее воздействие $y(t)$ в замкнутой системе формируется в большинстве случаев в зависимости от величины и знака отклонения истинного значения выходной (управляемой) координаты от ее заданного значения:

$$y(t) = A_y [\varepsilon(t)], \quad (1.1)$$

где $\varepsilon(t) = x_3(t) - x(t)$ – сигнал ошибки (называемый также сигналом рассогласования). Замкнутые системы называют часто «САУ по отклонению».

В замкнутой системе контролируется непосредственно выходная координата, и тем самым при формировании управляющих воздействий учитывается действие всех возмущений, влияющих на выходную координату. В этом заключается преимущество замкнутых систем. В то же время сам принцип действия замкнутых систем (принцип управления по отклонению) допускает нежелательные изменения выходной координаты: вначале возмущение должно появиться на выходе, система «почувствует» отклонение и лишь потом выработает управляющее воздействие, направленное на устранение отклонения. Такая инерционность снижает эффективность управления. Не-

смотря на определенные недостатки этот принцип имеет широкое применение.

На рис. 1.5 представлена принципиальная схема системы управления частотой вращения электродвигателя постоянного тока независимого возбуждения M . Управление двигателем осуществляется от электромашинного усилителя AMP , который приводится во вращение асинхронным двигателем (AM). Частота вращения ω приводного двигателя измеряется датчиком скорости BR . Сигнал, пропорциональный частоте вращения, через усилитель (Y) поступает на одну из обмоток управления $OY2$ в качестве сигнала главной отрицательной обратной связи по частоте вращения. Обмотка управления $OY1$ является задающей и определяет заданное значение частоты вращения. Так как обмотки управления включены встречно, то они же выполняют и функцию элемента сравнения. Потенциометр R предназначен для настройки коэффициента передачи цепи обратной связи.

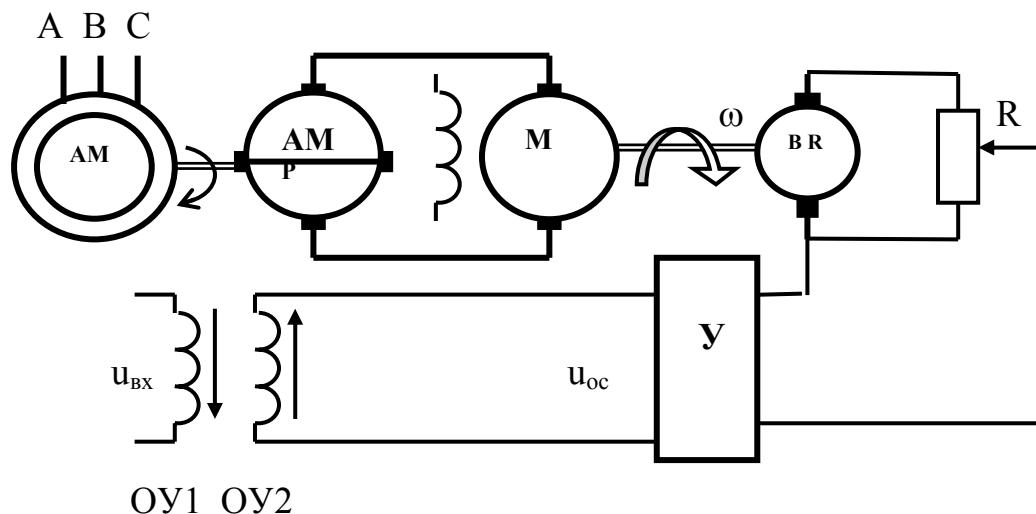


Рис. 1.5. Принципиальная схема замкнутой САУ частоты вращения

В ряде случаев эффективно применение *комбинированного управления* по возмущению и отклонению (см. рис. 1.3,г). Комбинированные регуляторы объединяют достоинства обоих принципов – быстроту реакции на изменение возмущений и точное регулирование независимо от того, какая причина вызвала отклонение.

1.3. Основные виды автоматического управления

Стабилизация. Системы поддержания постоянства управляемой величины называют также *системами стабилизации*. Желаемый закон в них имеет вид $x_3(t) = \text{const}$. Пример системы автоматической стабилизации напряжения генератора приведен на рис. 1.4.

Программное управление. При программном управлении алгоритм функционирования задан и можно применить специальное устройство,рабатывающее $x_3(t)$, датчик программы. Таким образом, все схемы, показанные на рис. 1.3, в которых задающее воздействие формируется от датчика программы, относятся к классу систем программного управления. Программное управление можно осуществить по любому из фундаментальных принципов или с помощью их комбинации.

Следящие системы. В следящих системах алгоритм функционирования заранее неизвестен. Обычно регулируемая координата в таких системах должна воспроизводить изменение некоторого внешнего фактора, следить за ним. Так, антenna радиолокатора должна следить за положением самолета. Следящая система может быть выполнена в соответствии с любым фундаментальным принципом управления и будет отличаться от соответствующей системы программного управления тем, что вместо датчика программы в ней будет иметь место устройство слежения за изменением внешнего фактора.

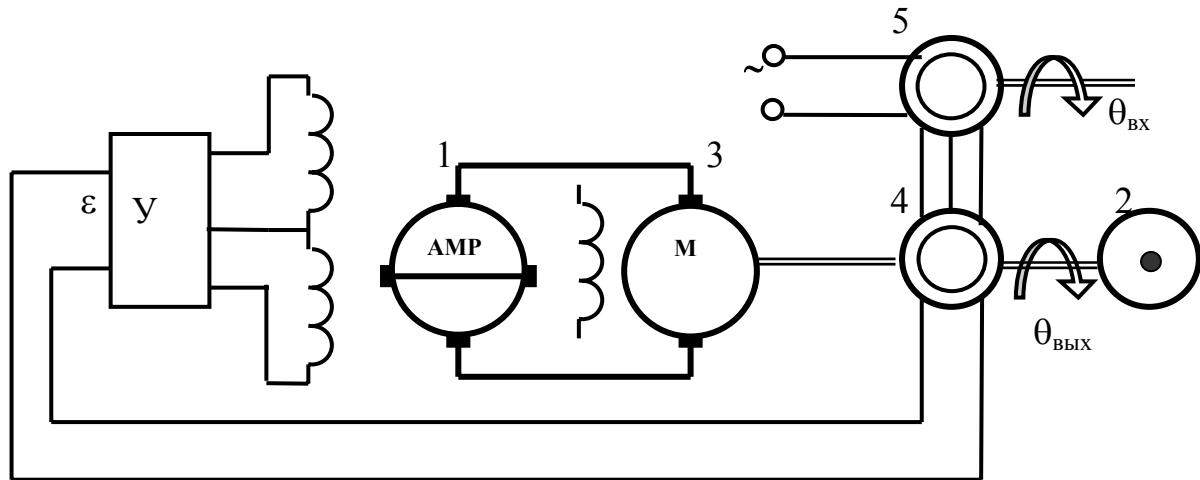


Рис. 1.6. Следящая система

В качестве примера следящей системы на рис. 1.6 приведена упрощенная схема отработки угла. Регулируемой величиной является угол поворота $\theta_{\text{вых}}$ управляемого объекта 2. Приводной двигатель 3 питается от ЭМУ 1. Входное воздействие подается на сельсин-датчик 5 в виде угла поворота $\theta_{\text{вх}}$ его ротора. Соединенные по трансформаторной схеме сельсин-датчик и сельсин-приемник 4, механически связанный с управляемым объектом, вырабатывают напряжение, пропорциональное рассогласованию $\varepsilon = \theta_{\text{вх}} - \theta_{\text{вых}}$ между входным и выходным валами следящей системы. Напряжение ошибки усиливается усилителем У и ЭМУ 1 и поступает на якорь исполнительного двигателя 3, врачающего одновременно объект 2 и ротор сельсина-приемника до тех пор, пока рассогласование не станет равным нулю.

Системы с поиском экстремума показателя качества. В ряде процессов показатель качества или эффективности процесса может быть выражен в каждый момент времени функцией текущих координат системы, и управле-

ние можно считать оптимальным, если оно обеспечивает поддержание этого показателя в точке максимума, например, настройку энергоустановки на максимальный коэффициент полезного действия. Такое управление обладает одной нежелательной особенностью: когда точка настройки под воздействием различных возмущений окажется смещенной от экстремума, неизвестно, в каком направлении следует воздействовать на регулирующий орган объекта, чтобы вернуть ее к экстремуму. Поэтому экстремальное управление начинают с поиска: сначала выполняют небольшие пробные движения в каком-то выбранном направлении, затем анализируют реакцию системы на эти пробы и после этого по результатам анализа вырабатывают управляющее воздействие в виде импульса, приближающего систему к экстремуму.

Оптимальное управление. Оптимальное управление применяется как в технических системах для повышения эффективности производственных процессов, так и в системах организационного управления.

В управлении динамическими техническими системами оптимизация чаще всего существенна именно для переходных процессов, в которых показатель эффективности зависит не только от текущих значений координат (как в экстремальном управлении), но и от характера изменения в прошлом, настоящем и будущем, и выражается некоторым функционалом от координат, их производных и, может быть, времени.

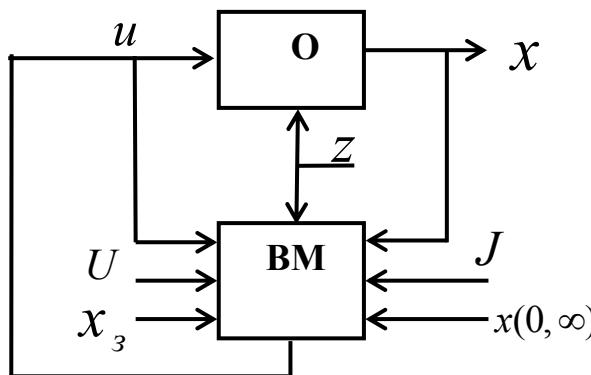


Рис. 1.7. Оптимальное управление

На вход вычислительного устройства ВМ поступает информация о текущих значениях координат x с выхода объекта O , об управлении u с его входа, о внешних воздействиях z на объект, а также задание извне различных условий: значение критерия оптимальности J , граничных условий $x(0)$, $x(\infty)$ и т.д. Вычислительное устройство по заложенной в него программе вычисляет оптимальное управление u . Оптимальные системы могут быть как разомкнутыми, так и замкнутыми

Адаптивные системы. Системы, автоматически изменяющие значение своих параметров или структуру при непредвиденных изменениях внешних условий на основании анализа состояния или поведения системы так, чтобы

Нахождение оптимального управления в подобных системах требует решения достаточно сложной математической задачи методами вариационного исчисления или математического программирования. Таким образом, органической составляющей частью системы оптимального управления становится вычислительное устройство. Принцип поясняется на рис. 1.7.

сохранялось заданное качество ее работы, называют *адаптивными системами*. Адаптивные системы с изменением значений параметров иногда называют *самонастраивающимися*, а системы с изменением структуры – *самоорганизующимися*.

Обычно адаптивная система содержит в качестве «ядра» схему, реализующую один из фундаментальных принципов управления, а *контуру адаптации* пристраивают к ней как вторичный, осуществляющий коррекцию параметров. Контуру адаптации, обычно состоящий из устройства измерения (ИУ), вычисления (ВУ) и управления (УУ), может быть разомкнут (рис. 1.8), если на его вход подается только входное воздействие, или замкнут (связь показана пунктиром), если он реагирует также и на выходную координату системы. Основной контур составляют объект O и регулятор P .

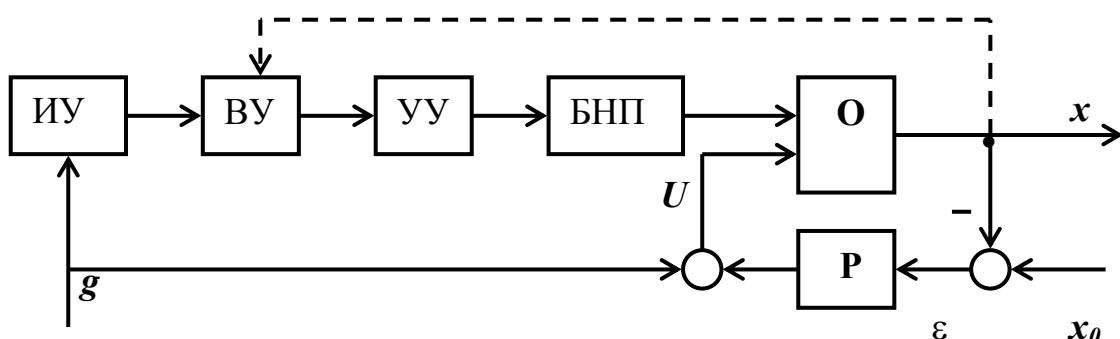


Рис. 1.8. Адаптивная САУ

Контур самонастройки воздействует на блок настройки параметров БНП, который может быть включен не только последовательно, как показано на рисунке, но и любым другим способом, например, в цепь обратной связи. Вычисление воздействий для коррекции параметров осуществляет ВУ в соответствии с программой.

Классификация САУ по другим признакам имеет более общий характер и слабо связана с фундаментальными принципами управления.

В зависимости от принадлежности источника энергии, при помощи которого создается управляющее воздействие, САУ могут быть прямого и непрямого действия. В *системах прямого действия* используется энергия управляемого объекта. В *системах непрямого действия* управляющее воздействие создается за счет энергии дополнительного источника.

По виду сигналов, действующих в системах, последние разделяют на *непрерывные* и *дискретные*. Дискретные системы, в свою очередь, разделяются на импульсные, релейные и цифровые.

САУ, у которых управляемая величина в установившемся режиме зависит от величины возмущающего воздействия, называются *статическими*, а САУ, у которых управляемая величина не зависит от возмущения, называются *активическими*.

По виду дифференциальных уравнений, описывающих элементы систем, последние разделяют на линейные и нелинейные. В *линейной системе* все элементы описываются линейными алгебраическими и дифференциальными уравнениями. Если хотя бы один элемент системы имеет нелинейную зависимость выходной величины от входной, то вся система является *нелинейной*.

1.4. Основные законы регулирования

Законом регулирования называют математическую зависимость, в соответствии с которой управляющее воздействие на объект вырабатывалось бы безынерционным управляющим устройством.

Многие из законов регулирования, реализуемых различными регуляторами релейного, импульсного действия, экстремальными и т.п., рассматриваются далее. Здесь ограничимся рассмотрением наиболее распространенных законов, реализуемых регуляторами по отклонению непрерывного действия. В этих простейших законах управляющее воздействие линейно зависит от отклонения, его интеграла и первой производной по времени.

Пропорциональный закон (обозначаемый П): $y = k_p \varepsilon$.

Регулятор, осуществляющий этот закон, называют пропорциональным. Постоянную k_p называют *коэффициентом передачи регулятора*, обратную величину – *статизмом регулятора*. С возрастанием статизма регулятора возрастает и статизм регулирования.

Интегральный закон (И):

$$y = \frac{1}{T} \int_0^t \varepsilon dt .$$

Постоянная T имеет размерность времени и ее называют *постоянной времени интегрирования*. Интегральный регулятор – астатический и именно с его помощью осуществляется астатическое регулирование.

Пропорционально-интегральный закон (ПИ):

$$y = k_p (\varepsilon + \frac{1}{T} \int_0^t \varepsilon dt).$$

Иногда его называют пропорциональным законом с интегральной коррекцией. Регулятор ПИ также обеспечивает астатическое регулирование. В этом можно убедиться, представив уравнение в дифференциальной форме как $dy/dt = k_p(d\varepsilon/dt + \varepsilon/T)$. В состоянии равновесия при постоянных воздействиях должно быть $dy/dt = 0; d\varepsilon/dt = 0; \varepsilon/T = 0$, откуда равновесие может иметь место лишь при $\varepsilon = 0$ (при нулевой ошибке регулирования).

Пропорционально- интегрально- дифференциальный закон (ПИД):

$$y = k_p (\varepsilon + \frac{1}{T_u} \int_0^t \varepsilon dt + T_d \frac{d\varepsilon}{dt}).$$

Постоянные T_u и T_d , соответственно, называют *постоянными времени интегрирования и дифференцирования*. Регулятор ПИД также обеспечивает астатическое регулирование. Производную $d\varepsilon / dt$ вводят в закон регулирования для повышения качества процесса регулирования.

В заключение дадим общую характеристику процессов, протекающих в системах автоматического управления. Как и в любой динамической системе, процессы в автоматической системе делятся на установившиеся и переходные.

При рассмотрении процессов в САУ важное значение имеют понятия «устойчивость системы», «качество процесса управления» и «точность управления».

Устойчивость – это свойство возвращаться в установившееся состояние после того, как она была выведена из этого состояния каким-либо возмущением. Такую устойчивость называют асимптотической или устойчивостью в точке. Замкнутые САУ весьма склонны к потере устойчивости, что чаще всего проявляется в возникновении расходящихся колебаний. В этом случае система становится неработоспособной.

В нелинейных системах большое значение имеет устойчивость в некоторой области, характеризующаяся возвратом в заданную область при уменьшении внешнего воздействия до нуля.

Качество процесса управления характеризуется тем, насколько процесс управления близок к желаемому.

ГЛАВА 2

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Линейные дифференциальные уравнения

Наиболее общей и наиболее полной формой математического описания автоматических систем и их элементов является дифференциальное уравнение вида

$$a_0 d^n y(t)/dt^n + a_1 d^{n-1} y(t)/dt^{n-1} + \dots + a_n y(t) = \\ b_0 d^m x(t)/dt^m + b_1 d^{m-1} x(t)/dt^{m-1} + \dots + b_m x(t), \quad (2.1)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ – входная и выходная величины элемента или системы; a_i, b_i – коэффициенты уравнения.

Уравнение (2.1) устанавливает связь между входной и выходной величиной как в переходных, так и в установившихся режимах.

Коэффициенты дифференциального уравнения называются *параметрами*. Они зависят от различных физических констант, характеризующих скорость протекания процессов в элементах. Такими константами являются, например, массы движущихся частей, индуктивности и емкости электрических цепей, теплоемкости нагреваемых элементов.

Иногда параметры некоторых элементов систем изменяются во времени. Такую систему называют *нестационарной* или *системой с переменными параметрами*. Системой с переменными параметрами является, например, автоматическая система управления приводом поворота мощного экскаватора, если в процессе его поворота одновременно происходит выдвижения рукояти с ковшом.

В большинстве практических случаев коэффициенты уравнения существенно не изменяются и системы являются *системами с постоянными параметрами*. В дальнейшем будут рассматриваться только такие системы.

Для автоматических систем управления, описываемых линейным уравнением, справедлив принцип наложения или суперпозиции, согласно которому *изменение выходной величины $y(t)$, возникающее при действии на систему нескольких входных сигналов $x_i(t)$, равно сумме изменений $y_i(t)$ величины $y(t)$, вызываемых каждым сигналом в отдельности*.

Это свойство линейных систем имеет большое практическое значение, так как благодаря ему значительно облегчаются все расчеты.

Рассмотрим типовые формы записи линейного дифференциального уравнения (2.1), используемые в различных задачах теории автоматического управления.

Все физические переменные, входящие в уравнение, могут быть выражены в *относительных единицах*. Для этого каждое слагаемое делят на постоянную величину, имеющую размерность той переменной, которая входит в это слагаемое. Постоянные величины называют *базовыми*. В качестве базовых величин обычно принимают номинальные или установившиеся значения переменных u и x .

Удобной формой записи линейных дифференциальных уравнений является *символическая* или *операторная*. Переход к операторной форме осуществляют введением сокращенного условного обозначения операции дифференцирования: $d \dots / dt = p$. Соответственно, k -ю производную переменной y обозначают

$$d^k y(t) / dt^k = p^k y(t), \quad (2.2)$$

тогда уравнение (2.1) в символической форме будет иметь вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x(t). \quad (2.3)$$

Многочлены от p степени n и m , находящиеся в левой и правой частях уравнения (2.3), называются *дифференциальными операторами*. Каждый такой оператор устанавливает соответствие между функцией времени и определенной совокупностью производных этой функции. Многочлен

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n = D(p) \quad (2.4)$$

называют *собственным оператором*, а многочлен

$$b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m = K(p) \quad (2.5)$$

называют *входным оператором* или *оператором воздействия*.

Название «собственный оператор» обусловлено тем, что многочлен $D(p)$ характеризует собственное (свободное) движение элемента, т.е. движение при отсутствии внешних воздействий. Оператор $D(p)$ называют также *характеристическим*.

У всех реальных элементов и систем порядок наивысшей производной во входном операторе не может быть больше порядка наивысшей производной в собственном операторе, т.е. всегда $m \leq n$. Если это условие не выполняется, то уравнение соответствует физически нереализуемой системе.

Уравнения элементов невысокого порядка ($n < 3$) в теории автоматического управления принято записывать в так называемой стандартной форме. При *стандартной форме* записи уравнение преобразовывают таким образом, чтобы коэффициент при выходной величине был равен единице. При этом

коэффициент перед входной величиной в правой части уравнения становится равным передаточному коэффициенту, а коэффициенты при производных выходной величины будут иметь размерность времени в степени, равной порядку соответствующей производной. Например, уравнение второго порядка

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) y(t) = (b_0 p + b_1) x(t) \quad (2.6)$$

путем деления всех членов на коэффициент a_2 может быть приведено к стандартной форме

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) y(t) = k(Tp + 1) x(t), \quad (2.7)$$

где $k = b_1/a_2$; $T = b_0/b_1$; $T_1 = a_1/a_2$; $T_2^2 = a_0/a_2$.

Коэффициенты T , T_1 , T_2 принято называть *постоянными времени*, характеризующими динамические свойства элемента.

Пример 1

Составить дифференциальное уравнение электрической цепи (рис.2.1).

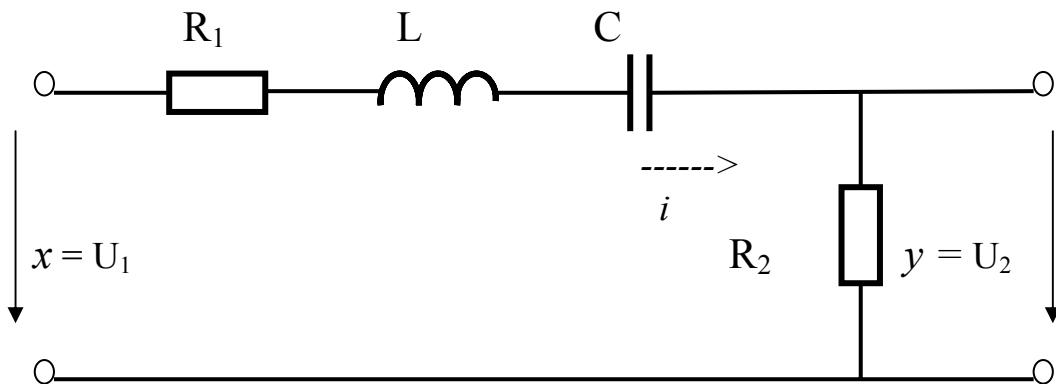


Рис.2.1. Схема одноконтурной электрической цепи

Решение. Входной величиной для цепи является напряжение U_1 , а выходной величиной – напряжение U_2 . В динамических режимах по одноконтурной цепи протекает ток i . Выходное напряжение равно падению напряжения на сопротивлении R_2 . На основании второго закона Кирхгофа при нулевых начальных условиях составим уравнение:

$$iR_1 + (1/C) \cdot \int i dt + Ldi/dt + iR_2 = U_1. \quad (1)$$

Выходное напряжение

$$U_2 = iR_2, \quad (2)$$

откуда определим значение тока

$$i = U_2 / R_2. \quad (3)$$

Подставим (3) в (1):

$$(R_1/R_2) \cdot U_2 + (1/C) \int (U_2/R_2) \cdot dt + (L/R_2) \cdot dU_2/dt + U_2 = U_1. \quad (4)$$

Уравнение (4) является интегро-дифференциальным и его необходимо привести к дифференциальной форме. После дифференцирования (4) получим:

$$(R_1/R_2 + 1) \cdot dU_2/dt + (1/R_2 C) U_2 + (L/R_2) \cdot d^2 U_2/dt^2 = dU_1/dt. \quad (5)$$

Уравнение (5) приводится к стандартной форме:

$$T_2^2 d^2 U_2/dt^2 + T_1 dU_2/dt + U_2 = T_3 dU_1/dt, \quad (6)$$

где $T_2^2 = LC$; $T_1 = C(R_1 + R_2)$; $T_3 = R_2 C$.

В операторной форме уравнение (6) представляется как

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) U_2 = T_3 p U_1. \quad (7)$$

2.2. Временные характеристики

Дифференциальное уравнение является самой общей формой описания элемента и не дает наглядного представления о передаточных свойствах элемента. Наглядное представление об этих свойствах дает функция $y(t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения. Но одно и то же дифференциальное уравнение может иметь множество решений, зависящих от начальных условий и вида внешнего воздействия $x(t)$. Поэтому принято динамические свойства элементов и систем характеризовать решением, соответствующим нулевым начальным условиям и одному из типовых воздействий. В качестве типового воздействия принимают единичное ступенчатое, дельта-функцию или гармоническое воздействие.

Наиболее наглядное представление о динамических свойствах элемента дает его переходная функция (характеристика). Переходной функцией $h(t)$ называют изменение выходной величины $y(t)$ во времени, возникающее после подачи на вход единичного ступенчатого воздействия, при нулевых начальных условиях. Переходная функция может быть задана в виде графика (рис.2.2,а) или аналитически.

Переходная функция $h(t)$, как и любое решение неоднородного дифференциального уравнения, имеет две составляющие: вынужденную $h_e(t)$ и свободную $h_c(t)$. Вынужденная составляющая переходного процесса представляет собой частное решение исходного уравнения. При ступенчатом воздействии вынужденная составляющая равна установившемуся значению выходной

величины, которое для статических элементов может быть определено непосредственно из дифференциального уравнения (при нулевых производных):

$$h_b(t) = y(\infty) = b_m / a_n. \quad (2.8)$$

Свободная составляющая $h_c(t)$ может быть найдена как решение однородного дифференциального уравнения (при отсутствии одинаковых корней):

$$h_c(t) = \sum_{k=1}^n C_k e^{\lambda_k t}, \quad (2.9)$$

где λ_k – корни характеристического уравнения; C_k – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий.

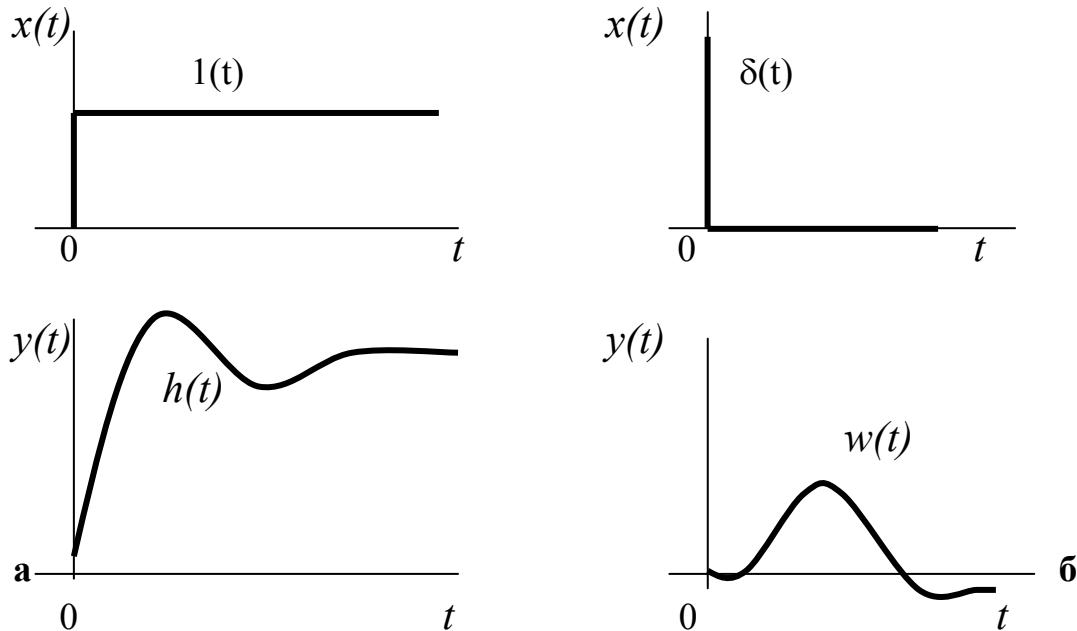


Рис. 2.2. Переходная (а) и импульсная (б) характеристики

Переходная функция определяется как сумма вынужденной и свободной составляющих.

Характеристическое уравнение, соответствующее определенному дифференциальному уравнению, представляет собой алгебраическое уравнение, степень и коэффициенты которого совпадают с порядком и коэффициентами левой части этого уравнения. Для дифференциального уравнения, записанного в форме (2.6), характеристическое уравнение имеет вид

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (2.10)$$

Структура характеристического уравнения (2.10) совпадает со структурой левой части уравнения (2.3) и со структурой собственного оператора $D(p)$ (см. (2.4)). Поэтому при записи характеристического уравнения часто вместо символа λ , обозначающего неизвестную переменную алгебраического урав-

нения, используют символ p . Но при этом p означает уже не операцию дифференцирования, а некоторое комплексное число, которое является решением (корнем) характеристического уравнения.

Для линейных элементов и систем, кроме принципа суперпозиции, справедливо еще одно общее правило: реакция $y(t)$ на неединичное воздействие $a_0 I(t)$ равна $a_0 h(t)$.

Импульсной переходной функцией $w(t)$ называют изменение выходной величины $y(t)$, возникающее после подачи на вход дельта-функции, при нулевых начальных условиях (рис. 2.2,б).

Импульсная переходная функция $w(t)$ равна производной от переходной функции $h(t)$:

$$w(t) = dh(t)/dt, \quad (2.11)$$

и наоборот, переходная функция равна интегралу от импульсной переходной функции:

$$h(t) = \int w(t) dt. \quad (2.12)$$

Переходные характеристики называют также *временными*.

Пример 2

Для электрической цепи (рис. 2.3) определить переходную функцию.

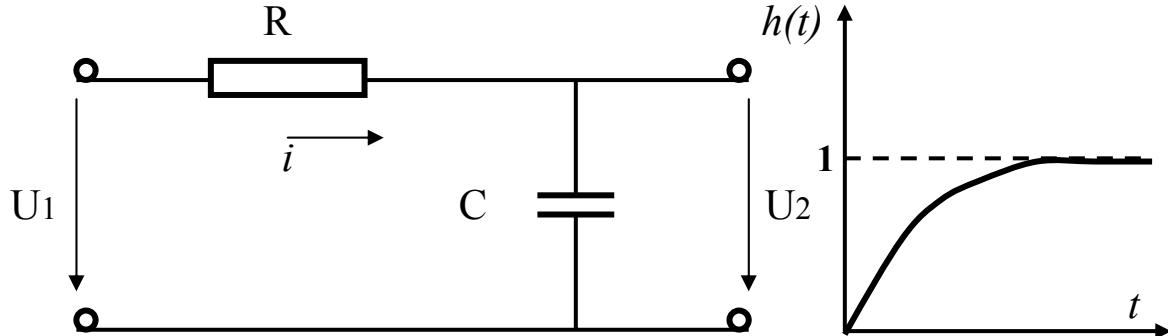


Рис. 2.3. Электрическая RC-цепь и ее переходная функция

Решение. Электрической цепи соответствуют уравнения:

$$\begin{aligned} U1 &= iR + U2, \\ i &= CdU2/dt, \end{aligned} \quad | \quad (1)$$

которые путем исключения промежуточной переменной $i(t)$ приводятся к одному дифференциальному уравнению:

$$RC dU2/dt + U2 = U1 \quad (2)$$

или в стандартной форме:

$$(Tp + 1) U2 = U1, \quad (3)$$

где $T = RC$.

Из (3) составляем характеристическое уравнение

$$T\lambda + 1 = 0 \quad (4)$$

и определяем корень $\lambda = -1/T$.

Переходная функция $h(t) = h_b(t) + h_c(t)$. При единичном воздействии $U_1=1(t)$ вынужденная составляющая также равна единице: $h_b(t)=1$. Тогда $h(t) = 1 + C e^{\lambda t} = 1 + C e^{-t/T}$. (5)

При $t=0$ $h(0)=0$, и тогда из (5) определим постоянную интегрирования $C = -1$.

Окончательно имеем

$$h(t) = 1 - e^{-t/T}. \quad (6)$$

Переходная функция показана на рис. 2.3.

2.3. Операционный метод и передаточная функция

Наиболее распространенным методом описания и анализа автоматических систем является операционный метод. В основе метода лежит *преобразование Лапласа*:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t) e^{-pt} dt, \quad (2.13)$$

которое устанавливает соответствие между функциями действительной переменной t и функциями комплексной переменной p . Функцию времени $x(t)$, входящую в интеграл Лапласа, называют *оригиналом*, а результат интегрирования – функцию $X(p)$ – *изображением* функции $x(t)$ по Лапласу.

Преобразование Лапласа выполнимо лишь для таких функций времени, которые равны нулю при $t < 0$. Это условие обеспечивается обычно умножением функции $x(t)$ на единичную ступенчатую функцию $1(t)$. С математической и физической точек зрения такой искусственный прием вполне корректен, так как функции $x(t)$ описывают процессы в автоматических системах, начинающиеся с некоторого момента времени, а этот момент времени всегда может быть принят за начало отсчета.

Наиболее важными свойствами преобразования Лапласа являются свойства, формулируемые обычно в виде правил:

при нулевых начальных условиях дифференцированию оригинала $x(t)$ по переменной t соответствует умножение изображения $X(p)$ на комплексную переменную p , а интегрированию оригинала соответствует деление $X(p)$ на p .

Именно на этих двух свойствах основан операционный метод решения дифференциальных уравнений, который заключается в следующем. Исходное дифференциальное (или интегро-дифференциальное) уравнение, записанное относительно искомой выходной функции $y(t)$, заменяют на алгебраическое уравнение относительно изображения $Y(p)$ (это называется алгебраизацией дифференциального уравнения), затем, решая алгебраическое уравнение при заданном $X(p)$, находят изображение $Y(p)$ и, наконец, по изображе-

нию $Y(p)$ определяют функцию $y(t)$. Этот обратный переход от изображений к оригиналам в большинстве практических задач может быть осуществлен при помощи таблиц, имеющихся в специальных справочниках по операционному исчислению.

Широкое распространение операционного метода в теории автоматического управления обусловлено тем, что с его помощью определяют так называемую передаточную функцию, которая является самой компактной формой описания динамических свойств элементов и систем.

Применим преобразование Лапласа к линейному дифференциальному уравнению (2.1), полагая, что до приложения внешнего воздействия система находилась в покое и все начальные условия равны нулю. Используя свойство линейности и правило дифференцирования, можно получить алгебраическое уравнение в изображениях:

$$D(p)Y(p) = K(p)X(p), \quad (2.14)$$

где

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n,$$

$$K(p) = b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m.$$

Сравнивая уравнение (2.14) с уравнением в символьической форме (2.3), можно заметить полную аналогию их структур. Различие уравнений лишь в значении символа p : в первом уравнении он обозначает операцию дифференцирования, во втором – комплексную переменную.

Введем понятие передаточной функции. *Передаточной функцией* $W(p)$ называют отношение изображения выходной величины к изображению входной величины при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}}. \quad (15)$$

Для системы, описываемой уравнением (2.1), передаточная функция равна отношению входного оператора $K(p)$ к собственному оператору $D(p)$:

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (2.16)$$

Как следует из (2.15) и (2.16), передаточная функция представляет собой некоторый динамический оператор, характеризующий прохождение сигналов через линейный элемент.

Рассмотрим основные свойства и особенности передаточных функций автоматических систем и их элементов.

Передаточная функция элемента связана с его импульсной переходной функцией преобразованием Лапласа:

$$W(p) = L\{w(t)\} = \int_0^{\infty} w(t)e^{-pt} dt. \quad (2.17)$$

Для реальных элементов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, передаточная функция представляет собой правильную рациональную дробь, у которой степень многочлена числителя меньше или равна степени многочлена знаменателя, т.е. $m < n$. Все коэффициенты передаточной функции – действительные числа, характеризующие параметры элемента.

Передаточная функция является функцией комплексной переменной $p = \alpha \pm j\beta$, которая может при некоторых значениях переменной p обращаться в нуль или бесконечность. Значение переменной p , при котором функция $W(p)$ обращается в нуль, называют *нулем*, а значение, при котором обращается в бесконечность, – *полюсом* передаточной функции. Очевидно, что нулями передаточной функции являются корни полинома $K(p)$, а полюсами – корни полинома $D(p)$. Корни полиномов числителя и знаменателя могут быть комплексными, мнимыми и вещественными числами (в том числе и нулевыми). Если эти корни известны, то передаточная функция может быть представлена в следующем виде:

$$W(p) = \frac{b_0(p - \gamma_1)(p - \gamma_2)\dots(p - \gamma_m)}{a_0(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)\dots(p - \lambda_n)}, \quad (2.18)$$

где γ_i – корни многочлена $K(p)$ (нули $W(p)$); λ_i – корни многочлена $D(p)$ (полюсы $W(p)$).

По распределению нулей и полюсов передаточной функции на комплексной плоскости с координатами α и $j\beta$ можно судить о свойствах элемента или системы.

Пример 3

Найти передаточную функцию для электрической цепи, схема которой приведена в примере 1 (рис. 2.1). Входной величиной является напряжение U_1 , а выходной – напряжение U_2 .

Передаточную функцию электрических цепей удобно получить на основе операторной схемы замещения цепи для нулевых начальных условий. Напомним, что операторное сопротивление индуктивности равно pL , емкости – $1/pC$, а активного сопротивления – R . На рис. 2.4 приведена операторная схема замещения рассматриваемой цепи.

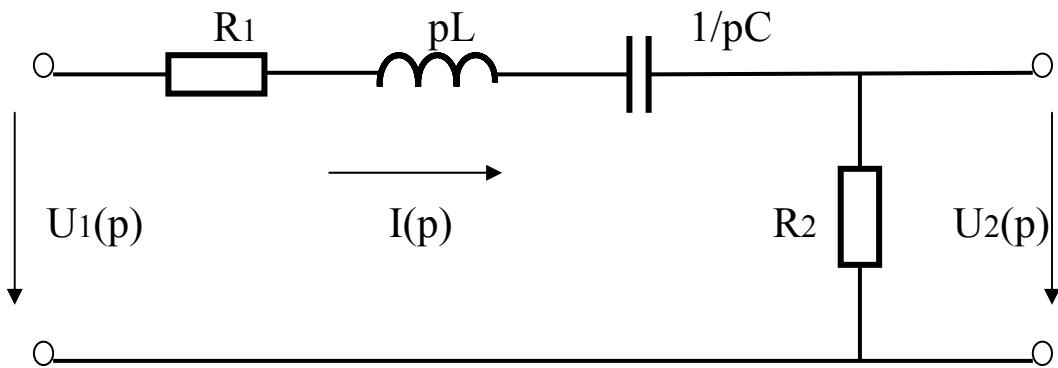


Рис. 2.4. Операторная схема замещения для определения $W(p)$

Решение. Для операторной схемы замещения относительно изображений переменных справедливы законы Кирхгофа. На основании 2-го закона Кирхгофа составим уравнение

$$(R_1 + pL + 1/pC + R_2)I(p) = U_1(p). \quad (1)$$

Изображение выходного напряжения с изображением тока связано соотношением

$$U_2(p) = I(p)R_2. \quad (2)$$

Исключив из уравнений промежуточную величину $I(p)$, после преобразований получим

$$\{LCp^2 + (R_1 + R_2)Cp + 1\}U_2(p) = R_2CpU_1(p), \quad (3)$$

откуда определим передаточную функцию как

$$W(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{pR_2C}{LCp^2 + (R_1 + R_2)Cp + 1} = \frac{T_3p}{T_2^2p^2 + T_1p + 1} \quad (4)$$

Значения постоянных времени T_1 , T_2 и T_3 приведены в примере 1.

Тот же результат может быть получен и из уравнения (7) примера 1.

Пример 4

Определить передаточные функции по управляющему и по возмущающему воздействиям для электродвигателя постоянного тока с постоянными магнитами возбуждения (рис.2.5). Двигатель Δ характеризуется сопротивлением цепи якоря R и индуктивностью L . На вход двигателя подается напряжение U (управление). При вращении двигателя с угловой частотой ω возникает ЭДС E .

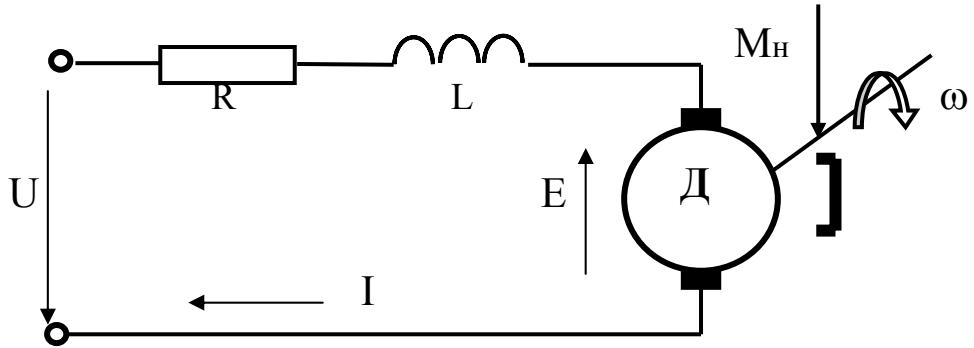


Рис. 2.5. Схема замещения двигателя

На валу электродвигателя действует момент нагрузки M_H (воздушене). Двигатель развивает момент M_d . За выходную величину примем угловую частоту вращения вала ω .

Решение. Двигателю соответствует исходная система уравнений

$$\left. \begin{aligned} U &= E + IR + LdI/dt, \\ Jd\omega/dt &= M_d - M_H, \\ M_d &= cI, \\ E &= c\omega, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где c – постоянный конструктивный коэффициент.

В операторной форме уравнения (1) записываются как

$$\left. \begin{aligned} U &= E + (R + Lp)I, \\ Jp\omega &= M_d - M_H, \\ M_d &= cI, \\ E &= c\omega. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Систему уравнений (2) можно уже рассматривать как алгебраическую систему. Для вывода передаточных функций уравнения (2) приводятся к одному уравнению путем исключения промежуточных величин, при этом все переменные заменяются на их изображения по Лапласу: $U \rightarrow U(p)$, $I \rightarrow I(p)$, $\omega \rightarrow \omega(p)$, $M_H \rightarrow M_H(p)$, $M_d \rightarrow M_d(p)$, $E \rightarrow E(p)$. При определении передаточной функции по управлению $W_y(p)$ надо полагать $M_H(p) = 0$, а при определении передаточной функции по возмущению $W_v(p)$ надо полагать $U(p) = 0$.

Выполнив указанную последовательность действий, получим:

$$W_y(p) = \frac{\omega(p)}{U(p)} = \frac{c}{JLp^2 + JRp + c^2} = \frac{K_1}{T_\alpha T_m p^2 + T_m p + 1}, \quad (3)$$

$$W_v(p) = \frac{\omega(p)}{M_H(p)} = \frac{Lp + R}{JLp^2 + JRp + c^2} = \frac{K_2(T_\alpha p + 1)}{T_\alpha T_m p^2 + T_m p + 1}, \quad (4)$$

где $T_\alpha = L/R$; $T_m = JR/c^2$; $K_1 = 1/c$; $K_2 = R/c^2$.

Если необходимо составить подробную структурную схему электропривода с сохранением промежуточных величин, то преобразование системы уравнений (2) к одному уравнению не выполняется, а каждому уравнению ставится в соответствие своя передаточная функция. Запишем систему уравнений таким образом, чтобы в каждом из уравнений в левой части находилась выходная величина, а в правой части – входные воздействия, и определим передаточные функции:

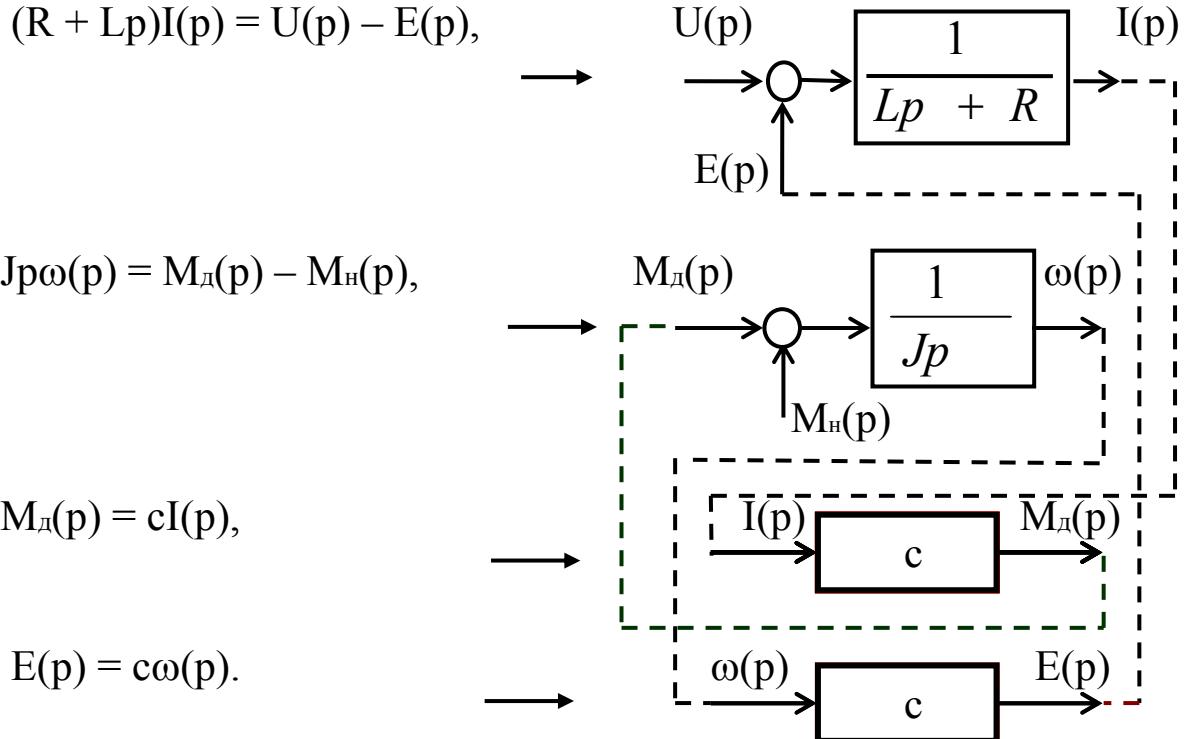


Рис. 2.6. Схема определения передаточной функции

Каждая из промежуточных переменных в систему уравнений входит дважды – один раз как входная, а второй раз как выходная. Соединив входные и выходные одноименные величины (пунктирные линии), получим подробную структурную схему двигателя. В упорядоченном виде она представлена на рис. 2.7.

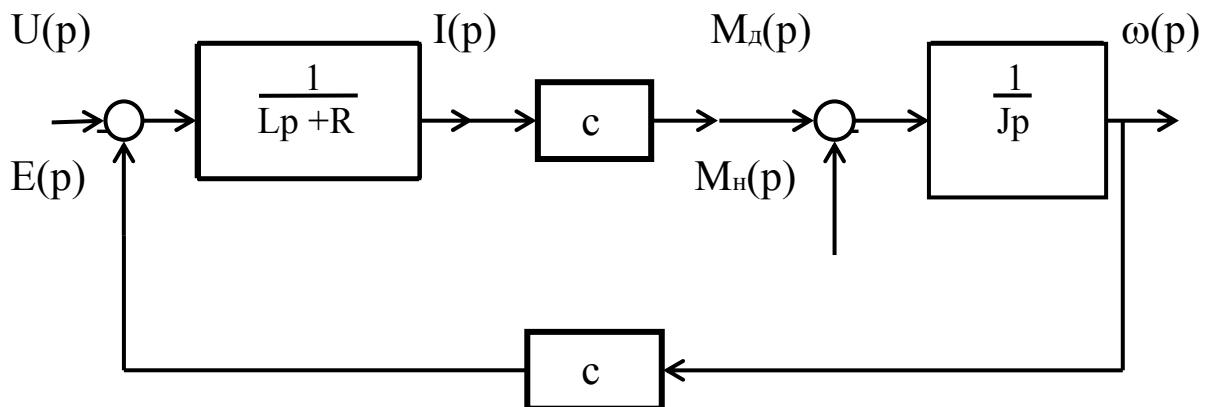


Рис. 2.7. Структурная схема двигателя

2.4. Частотные характеристики

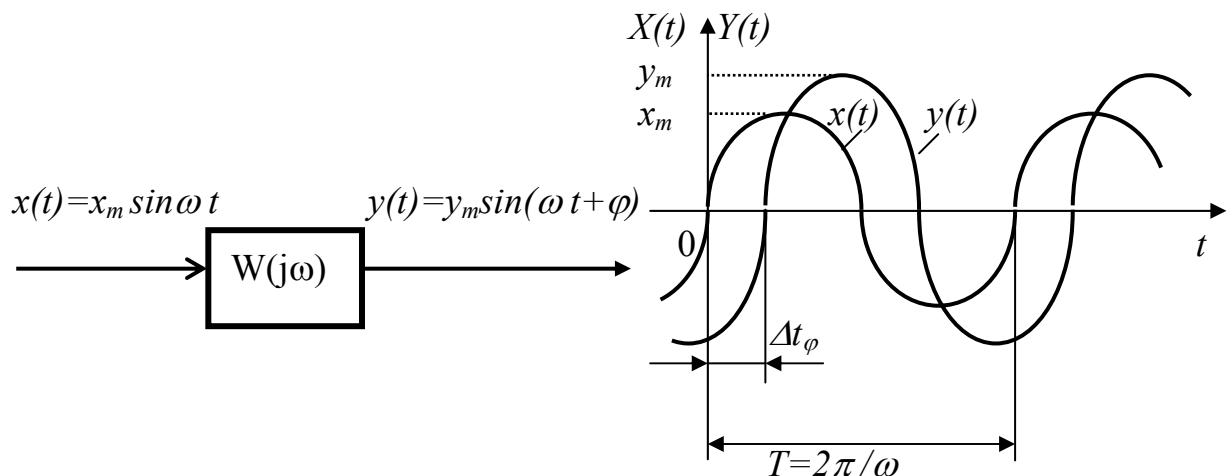


Рис. 2.8. Сигналы на входе и выходе звена

Частотные характеристики описывают передаточные свойства элементов и систем в режиме установившихся гармонических колебаний, вызванных внешним гармоническим воздействием.

Рассмотрим сущность и разновидности частотных характеристик. Пусть на вход линейного элемента (рис. 2.8) в момент времени $t=0$ приложено гармоническое воздействие определенной частоты ω :

$$x(t) = x_m \sin \omega t. \quad (2.19)$$

Через некоторое время, необходимое для протекания переходного процесса, элемент войдет в режим установившихся вынужденных колебаний, а выходная величина $y(t)$ будет изменяться по гармоническому закону с той же частотой ω , но с другой амплитудой y_m и со сдвигом Δt_φ :

$$y(t) = y_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.20)$$

где $\varphi = (\Delta t_\varphi/T)360$ – фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами в градусах.

Изменяя частоту ω (от 0 до ∞) при фиксированном x_m , можно установить, что амплитуда и фазовый сдвиг выходного сигнала конкретного элемента зависят от частоты воздействия. Следовательно, зависимости амплитуды y_m и сдвига φ от значений частоты ω могут служить характеристиками динамических свойств элементов.

Так как амплитуда выходного сигнала зависит еще от амплитуды входного сигнала, то целесообразно при описании свойств элементов рассматривать отношение амплитуд y_m/x_m .

Зависимость отношения амплитуд выходного и входного сигналов от частоты называют *амплитудной частотной характеристикой* (а.ч.х.) и обозначают $A(\omega)$ (рис. 2.9,а).

Зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами от частоты называют *фазовой частотной характеристикой* (ф.ч.х.) $\varphi(\omega)$ (рис. 2.9,б). Аналитические выражения $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ называют соответственно амплитудной и фазовой частотными функциями.

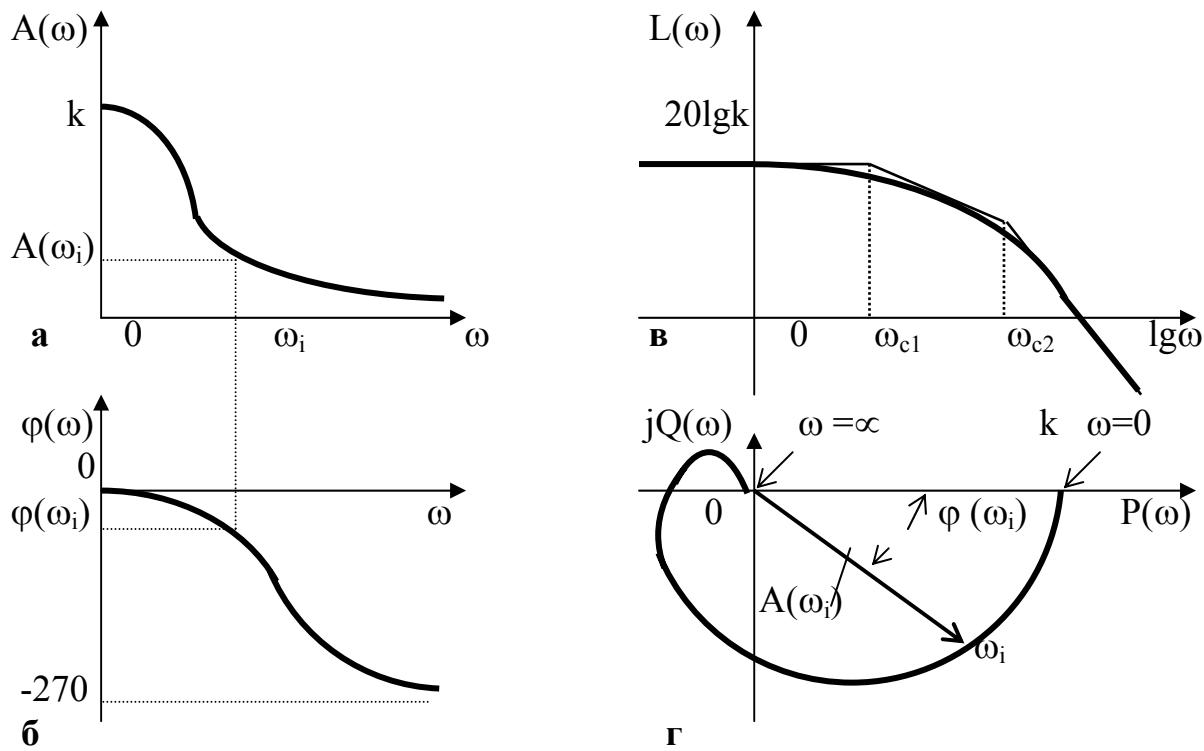


Рис. 2.9. Частотные характеристики:
а – амплитудная; б – фазовая; в – амплитудно-фазовая;
г – логарифмическая

А.ч.х. показывает, как элемент пропускает сигналы различной частоты. Оценка пропускания производится по отношению амплитуд y_m / x_m . А.ч.х. имеет размерность, равную отношению размерности выходной величины к размерности входной. Ф.ч.х. показывает, какое отставание или опережение выходного сигнала по фазе создает элемент на различных частотах.

Амплитудную и фазовую частотные характеристики можно объединить в одну общую - амплитудно-фазовую частотную характеристику (а.ф.ч.х. или а.ф.х.). *Амплитудно-фазовая частотная характеристика* $W(j\omega)$ представляет собой функцию комплексного переменного $j\omega$, модуль которой равен $A(\omega)$, а аргумент равен $\varphi(\omega)$. Каждому фиксированному значению частоты ω_i соответствует комплексное число $W(j\omega_i)$, которое на комплексной плоскости можно изобразить вектором, имеющим длину $A(\omega_i)$ и угол $\varphi(\omega_i)$ (рис. 2.9,г). Отрицательные значения $\varphi(\omega)$, соответствующие отставанию выходного

сигнала от входного, принято отсчитывать по часовой стрелке от положительной вещественной оси.

При изменении частоты от нуля до бесконечности вектор $W(j\omega)$ поворачивается вокруг начала координат, при этом одновременно увеличивается или уменьшается длина вектора. Кривая (годограф), которую описывает конец вектора, и есть а.ф.х. Каждой точке характеристики соответствует определенное значение частоты.

Проекции вектора $W(j\omega)$ на действительную и мнимую оси называют соответственно действительной и мнимой частотными характеристиками и обозначают $P(\omega)$, $Q(\omega)$. Действительная частотная характеристика всегда четная функция частоты, а мнимая характеристика всегда нечетная функция.

Аналитическое выражение для а.ф.х. конкретного элемента можно получить из его передаточной функции путем подстановки $p=j\omega$:

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}. \quad (2.21)$$

А.ф.х. $W(j\omega)$, как и любая комплексная величина, может быть представлена в показательной форме:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\phi(\omega)}, \quad (2.22)$$

алгебраической форме:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (2.23)$$

или тригонометрической форме:

$$W(j\omega) = A(\omega) \cos \phi(\omega) + jA(\omega) \sin \phi(\omega). \quad (2.24)$$

Связь между различными частотными функциями следующая:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}, \quad (2.25)$$

$$\phi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg (Q(\omega) / P(\omega)). \quad (2.26)$$

Поскольку а.ф.х. $W(j\omega)$, так же, как и передаточная функция, представляет собой обычно дробь, то ее модуль может быть найден как отношение модуля числителя к модулю знаменателя:

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = |K(j\omega)| / |D(j\omega)|, \quad (2.27)$$

а аргумент функции – как разность аргументов числителя и знаменателя:

$$\phi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arg K(j\omega) - \arg D(j\omega). \quad (2.28)$$

При практических расчетах автоматических систем удобно использовать частотные характеристики, построенные в логарифмической системе координат (рис. 2.9,в). Такие характеристики называют *логарифмическими*. Они имеют меньшую кривизну и поэтому могут быть приближенно заменены ломаными линиями, составленными из нескольких прямолинейных отрезков. Причем эти отрезки в большинстве случаев удается построить без громоздких вычислений по некоторым простым правилам. Частоты, соответствующие точкам стыковки отрезков, называют *сопрягающими* и обозначают ω_c . Кроме того, в логарифмической системе координат легко находить характеристики различных соединений элементов, так как умножению и делению обычных характеристик соответствует сложение и вычитание ординат логарифмических характеристик.

За единицу длины по оси частот логарифмических характеристик принимают декаду. *Декада* – интервал частот, заключенный между произвольным значением ω_i и его десятикратным значением $10\omega_i$. Отрезок логарифмической оси частот, соответствующий одной декаде, равен 1.

В расчетах используют *логарифмическую амплитудную частотную характеристику* (л.а.ч.х.):

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega), \quad (2.29)$$

ординаты которой измеряют в логарифмических единицах - белах (Б) или децибелах (дБ). Например, если имеется число $N=100$, в децибелах $L=20\lg 100=40$ дБ.

При построении фазовой частотной характеристики логарифмический масштаб применяют только для оси абсцисс.

По виду частотных характеристик все элементы и системы делятся на минимально-фазовые и неминимально-фазовые. *Минимально-фазовыми* являются элементы (системы), у которых все полюсы и нули передаточной функции $W(p)$ имеют отрицательные действительные части. Такие элементы дают минимальный фазовый сдвиг $\varphi(\omega)$ по сравнению с любыми другими элементами.

Пример 5

Найти аналитические выражения для частотных характеристик для цепи (пример 3, рис. 2.4), имеющей передаточную функцию

$$W(p) = \frac{T_3 p}{T_2^2 p^2 + T_1 p + 1}.$$

Решение. Амплитудно-фазовая функция цепи равна (замена $p=j\omega$)

$$W(j\omega) = \frac{T_3 j\omega}{T_1 j\omega + (1 - T_2^2 \omega^2)}.$$

Выражение для амплитудной частотной характеристики найдем как

$$A(\omega) = \frac{|T_3 j\omega|}{|T_1 j\omega + (1 - T_2^2 \omega^2)|} = \frac{T_3 \omega}{\sqrt{T_1^2 \omega^2 + (1 - T_2^2 \omega^2)^2}}.$$

Фазовая частотная характеристика определяется как разность аргументов числителя и знаменателя $W(j\omega)$:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{T_3 \omega}{0} - \operatorname{arctg} \frac{T_1 \omega}{1 + T_2^2 \omega^2}.$$

2.5. Векторно-матричная форма описания элементов

Для записи систем дифференциальных уравнений, представляющих анализируемую систему управления, в некоторых случаях удобно пользоваться матричными обозначениями. Особенно это относится к многомерным элементам, которыми часто являются объекты управления.

Одним из способов описания элементов в векторно-матричной форме является *описание в переменных состояния*. Уравнение состояния линейного объекта записывается в виде векторного дифференциального уравнения в форме Коши.

Пусть объект, имеющий один вход и один выход, описывается передаточной функцией:

$$W(p) = \frac{x(p)}{y(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}; \quad (m = n - 1). \quad (2.30)$$

По передаточной функции (2.30) запишем операторное уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) y(t) \quad (2.31)$$

и преобразуем его к нормальной форме Коши. Для этого введем вспомогательную переменную $x_1(t)$ и запишем уравнение (2.31) в форме пропорции:

$$\frac{x(t)}{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m} = \frac{y(t)}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} = x_1(t). \quad (2.32)$$

Из (2.32) можно составить два уравнения (перемножив по диагонали числители на знаменатели первых двух членов выражения и поочередно приравняв их $x_1(t)$):

$$(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x_1(t) = x(t), \quad (2.33)$$

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) x_1(t) = y(t). \quad (2.34)$$

Обозначим $\dot{x}_1(t) = x_2(t); \dot{x}_2(t) = x_3(t); \dots; \dot{x}_{n-1}(t) = x_n(t)$, т.е

$$\dot{x}_i(t) = x_{i+1}(t) \quad (i = 1; 2; 3; \dots; n-1). \quad (2.35)$$

С учетом (2.35) уравнение (2.34) преобразуется к виду

$$a_0 \dot{x}_n(t) + a_1 x_n(t) + a_2 x_{n-1}(t) + \dots + a_n x_1(t) = y(t), \quad (2.36)$$

откуда

$$\dot{x}_n(t) = -a_0^{-1} [a_1 x_n(t) + a_2 x_{n-1}(t) + \dots + a_n x_1(t)] + a_0^{-1} y(t). \quad (2.37)$$

Объединив (2.37) с (2.35), получим систему дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dots \\ \dot{x}_n(t) = -a_0^{-1} [a_1 x_n(t) + a_2 x_{n-1}(t) + \dots + a_n x_1(t)] + a_0^{-1} y(t). \end{array} \right\} \quad (2.38)$$

Система уравнений (2.38) может быть записана в виде векторного дифференциального уравнения в форме Коши:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{y}(t), \quad (2.39)$$

где $\mathbf{x}(t)$ – вектор состояния с компонентами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, называемыми *переменными состояния* объекта;

$\mathbf{y}(t)$ – вектор управления с компонентами $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$;

$A = [a_{ij}]_{n \times n}, B = [b_{ij}]_{n \times l}$ – матрицы постоянных коэффициентов, зависящих от конструктивных параметров объекта.

Для матричного уравнения (2.39) матрицы имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{-a_n}{a_0}; & \frac{-a_{n-1}}{a_0}; & \dots; & \dots; & \frac{-a_1}{a_0} \end{bmatrix}_{n \times n}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{1}{a_0} \end{bmatrix}_{n \times 1}. \quad (2.40)$$

Если на входе объекта действуют возмущения $z_i(t)$, то уравнение состояния объекта будет иметь вид

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + By(t) + z(t), \quad (2.41)$$

где $z(t)$ – вектор возмущений с компонентами $z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)$.

Системы, которые можно записать в виде (2.39) и (2.41), называются линейными системами. Переменные x_1, x_2, \dots, x_n в любой момент времени определяют состояние системы. Если переменные состояния связаны между собой соотношением (2.35), то они называются *фазовыми переменными*.

Пространство состояний можно определить как n -мерное евклидово пространство, по осям которого откладываются переменные состояния. Соответствующий способ описания называется *методом пространства состояний*.

Системе уравнений (2.39) соответствует модель динамического объекта, представленная на рис. 2.10.

На модели идеальные интегрирующие звенья устанавливают связь между переменными состояния и их первыми производными.

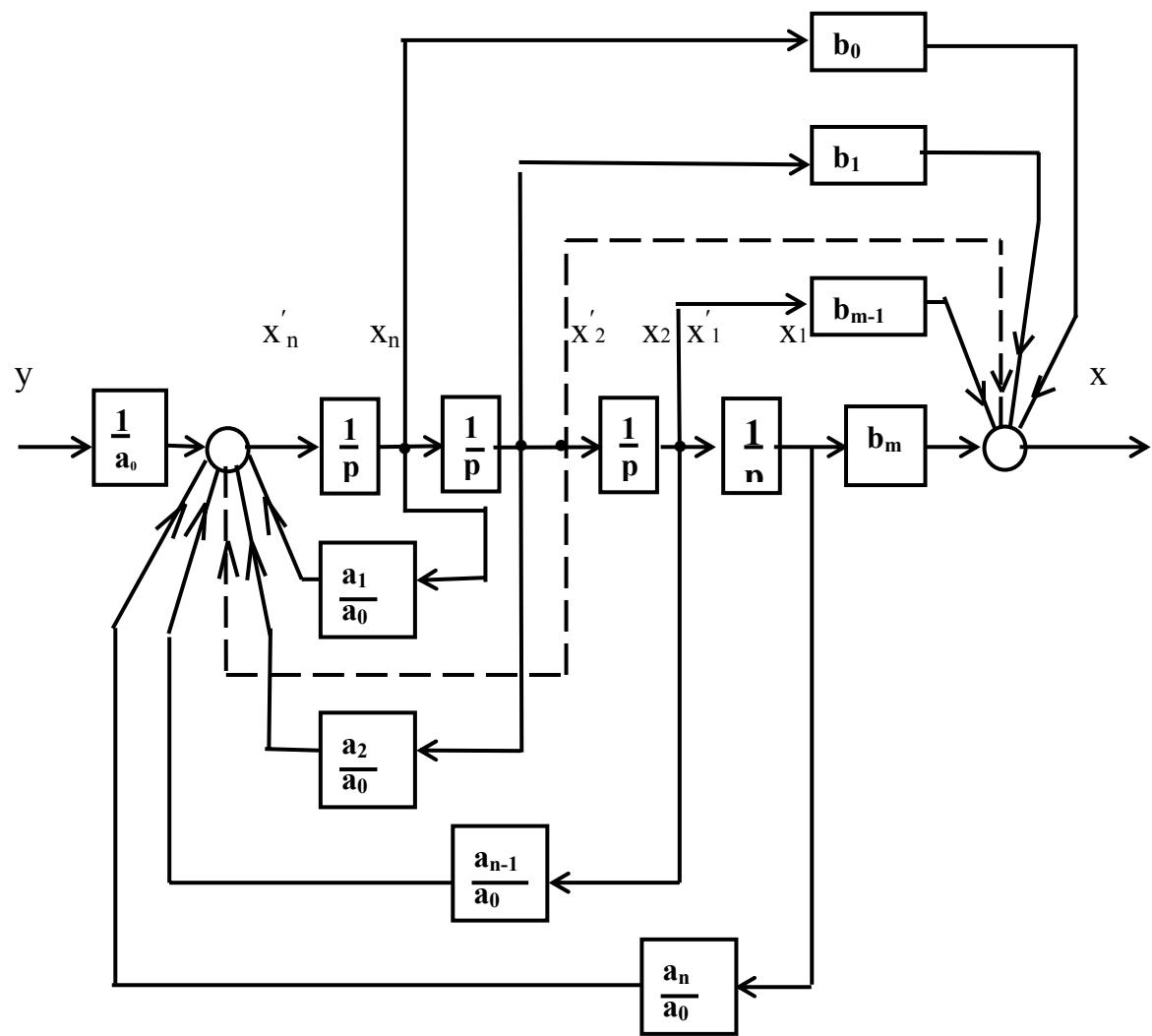


Рис. 2.10. Модель объекта в переменных состояния

ГЛАВА 3

ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

3.1. Понятие типовых динамических звеньев

Функциональные элементы, используемые в автоматических системах, могут иметь самые различные конструктивное исполнение и принципы действия. Однако общность математических выражений, связывающих входные и выходные величины различных функциональных элементов, позволяет выделить ограниченное число так называемых типовых динамических звеньев. Каждому типовому звену соответствует определенное математическое соотношение между входной и выходной величиной. Если это соотношение является элементарным (например, дифференцирование, умножение, интегрирование и т.д.), то и звено называется *элементарным*.

Звенья, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядка, называются *типовыми динамическими звеньями*.

Типовые динамические звенья являются основными составными частями алгоритмических структур непрерывных систем управления, поэтому знание их характеристик облегчает анализ таких систем.

3.2. Безынерционное звено

Это звено является простейшим и передает сигнал со входа на выход мгновенно, не изменяя его форму. Звено может только усиливать или ослаблять значение входной величины.

Зависимость между входной величиной $x(t)$ и выходной величиной $y(t)$ описывается алгебраическим уравнением

$$y(t) = kx(t). \quad (3.1)$$

Свойства звена определяются только одним параметром – передаточным коэффициентом k .

При единичном ступенчатом воздействии $x(t) = 1(t)$, приложенном в момент времени $t=0$, выходная величина изменяется мгновенно и принимает значение k (рис. 3.1,а). Переходная функция звена имеет вид

$$h(t) = k1(t), \quad (3.2)$$

а импульсная переходная функция (рис. 3.1,б) –

$$w(t) = k\delta(t). \quad (3.3)$$

Уравнение звена в операционной форме

$$Y(p) = kX(p), \quad (3.4)$$

а передаточная функция

$$W(p) = Y(p)/X(p) = k. \quad (3.5)$$

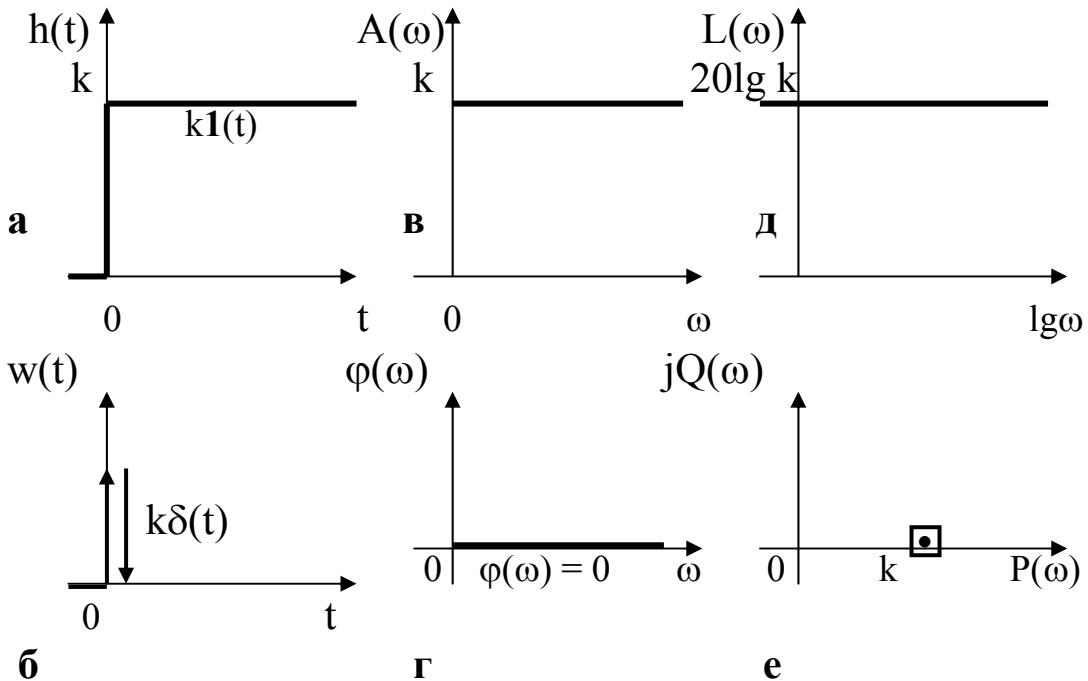


Рис. 3.1. Характеристики безынерционного звена

Амплитудно-фазовая характеристика (а.ф.х.) звена описывается функцией

$$W(j\omega) = k, \quad (3.6)$$

которой на комплексной плоскости соответствует одна точка на действительной оси (рис. 3.1, е). Амплитудная частотная характеристика (а.ч.х.)

$$A(\omega) = k \quad (3.7)$$

представляет собой прямую, параллельную оси частот (рис.3.1, в). Это означает, что *сигналы любой частоты проходят через безынерционное звено с одинаковым отношением амплитуд выходной и входной величин, равным k*.

Выражение для фазовой частотной характеристики (ф.ч.х.), (рис. 3.1, г)

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = \arctg(0/k) = 0 \quad (3.8)$$

показывает, что безынерционное звено не создает фазовых сдвигов между входной и выходной величиной.

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика (л.а.ч.х.) безынерционного звена

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k \quad (3.9)$$

так же, как и его а.ч.х., является прямой линией, параллельной оси абсцисс (рис. 3.1,д).

Примером безынерционного звена может служить операционный усилитель, работающий в режиме масштабного усиления.

3.3. Инерционные звенья первого порядка

Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (3.10)$$

где k – передаточный коэффициент, характеризующий свойства звена в статическом режиме; T – постоянная времени, характеризующая инерционность звена.

Переходная функция звена находится как сумма общего и частного решений уравнения (3.10):

$$h(t) = k(1 - e^{-t/T})1(t). \quad (3.11)$$

Касательная к кривой $h(t)$ (рис. 3.2, а) в точке $t=0$ отсекает на линии уставновившегося значения отрезок, равный постоянной времени T .

Импульсная переходная функция звена (рис. 3.2,б) находится дифференцированием функции $h(t)$:

$$w(t) = \frac{k}{T} e^{-t/T} 1(t). \quad (3.12)$$

Применяя к левой и правой частям уравнения (3.10) преобразование Лапласа, получаем уравнение динамики звена в операционной форме и передаточную функцию $W(p)$:

$$(Tp + I)Y(p) = kX(p), \quad (3.13)$$

$$W(p) = Y(p)/X(p) = k/(Tp + I). \quad (3.14)$$

Подстановкой $p=j\omega$ из (3.14) получим амплитудно-фазовую функцию

$$W(j\omega) = k/(Tj\omega + I). \quad (3.15)$$

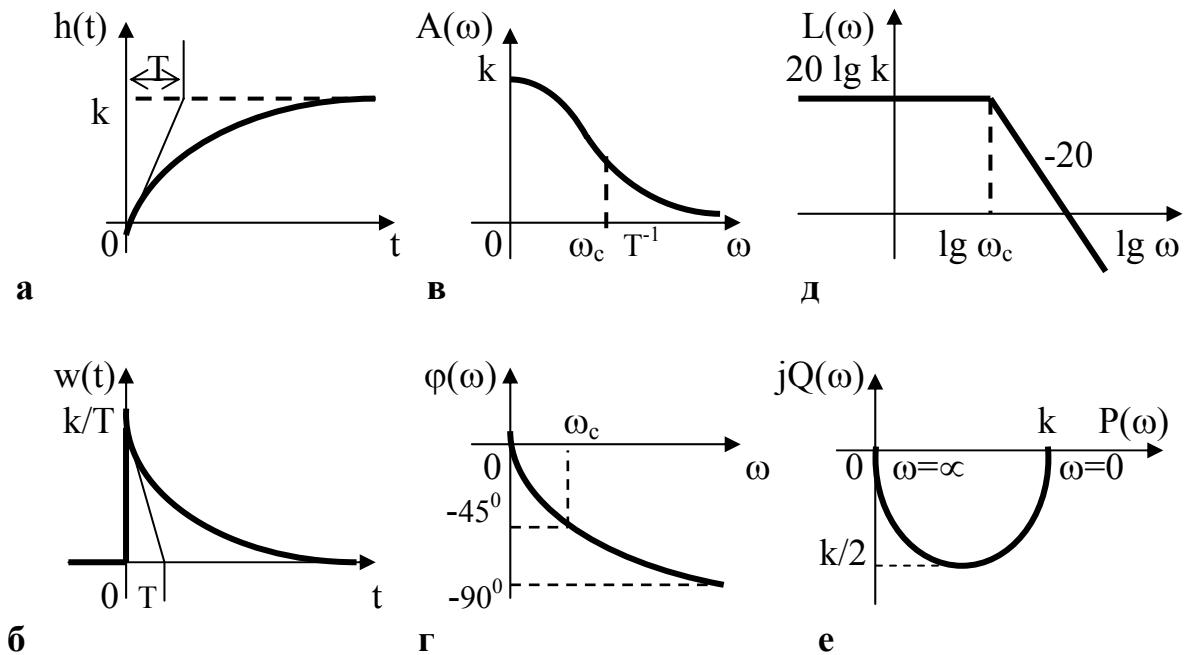


Рис. 3.2. Характеристики инерционного звена первого порядка

Умножив числитель и знаменатель формулы (3.15) на комплексное сопряженное знаменателю число $(1 - jT\omega)$ и выделив вещественную и мнимую части, можно записать

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (3.16)$$

где

$$P(\omega) = k/(1 + T^2\omega^2); \quad Q(\omega) = -kT\omega/(1 + T^2\omega^2).$$

Последние выражения можно рассматривать как уравнение а.ф.х. в параметрической форме в системе координат $P(\omega)$ и $jQ(\omega)$. Роль третьего параметра играет частота ω . А.ф.х. представляет собой полуокружность (рис. 3.2, е) с центром в точке $(k/2; j0)$ и диаметром, равным k .

Выражение для амплитудно-частотной характеристики

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = |k|/|Tj\omega + 1| = k / \sqrt{1 + T^2\omega^2}. \quad (3.17)$$

График функции $A(\omega)$ (рис. 3.2, в) показывает, что гармонические сигналы малой частоты ($\omega < \omega_c$) хорошо пропускаются звеном – с отношением выходной и входной величин, близким к передаточному коэффициенту k . Сигналы большой частоты плохо пропускаются звеном. Чем больше постоянная времени T , тем уже полоса пропускания частот.

Таким образом, инерционное звено первого порядка по своим частотным свойствам является фильтром низкой частоты.

Фазовая частотная характеристика (рис. 3.2, г)

$$\varphi(\omega) = \arctg [Q(\omega)/P(\omega)] = -\arctg \omega T. \quad (3.18)$$

Чем больше частота входного сигнала, тем больше отставание по фазе выходной величины от входной. Максимально возможное отставание равно 90° .

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика описывается выражением

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \sqrt{1 + T^2 \omega^2}. \quad (3.19)$$

В практических расчетах используют асимптотическую характеристику, представляющую собой ломаную в виде двух асимптот (рис. 3.2, д). Первая низкочастотная асимптота получается из (3.19), если пренебречь величиной $T^2 \omega^2$:

$$L(\omega) \approx 20 \lg k. \quad (3.20)$$

Высокочастотная асимптота заменяет точную характеристику при больших частотах, когда $T^2 \omega^2 \gg 1$, и единицу под корнем в (3.19) можно не учитывать. Выражение для этой асимптоты имеет вид

$$L(\omega) \approx 20 \lg k - 20 \lg T\omega. \quad (3.21)$$

Эта асимптота зависит от частоты. Она имеет отрицательный наклон и проходит через точку с координатами ($\omega = T^1$; $L(\omega) = 20 \lg k$). Приращение высокочастотной асимптоты равно -20 дБ на декаду.

Значение *сопрягающей частоты* ω_c найдем из условия $20 \lg k = 20 \lg k - 20 \lg T\omega_c$,

$$\omega_c = 1/T. \quad (3.22)$$

3.4. Инерционные звенья второго порядка

Дифференциальное уравнение звена -

$$T_2^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + T_1 \frac{d y(t)}{dt} + y(t) = kx(t). \quad (3.23)$$

Уравнение динамики в операционной форме -

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1)Y(p) = kX(p) \quad (3.24)$$

Передаточная функция -

$$W(p) = Y(p) / X(p) = k / (T_2^2 p^2 + T_1 p + 1). \quad (3.25)$$

Характеристическое уравнение звена -

$$T_2^2 p^2 + T_1 p + 1 = 0 \quad (3.26)$$

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = (-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}) / 2T_2^2 \quad (3.27)$$

Общее решение дифференциального уравнения, определяющее свободное движение, имеет вид

$$y(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t}. \quad (3.28)$$

Характер переходного процесса зависит от вида корней которые могут быть действительными или комплексными. Если $T_1 \geq 2T_2$, то оба корня действительные. Обозначим их

$$p_1 = -1/T_3; \quad p_2 = -1/T_4, \quad (3.29)$$

где T_3 и T_4 – некоторые условные постоянные времени, причем $T_3 > T_4$.

При $T_1 > 2T_2$ переходная функция звена имеет монотонный (апериодический) характер. Звено в данном случае называется *апериодическим звеном второго порядка*. При указанном условии знаменатель передаточной функции можно разложить на два множителя и представить передаточную функцию в виде

$$W(p) = k / (T_3 p + 1)(T_4 p + 1), \quad (3.30)$$

согласно которому инерционное звено второго порядка (рис. 3.3, а) можно представить как последовательное соединение двух инерционных звеньев первого порядка (рис. 3.3, б).

Если $T_1 < 2T_2$, то корни уравнения (3.26) комплексные:

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta, \quad (3.31)$$

$$\text{где } \alpha = T_1 / 2T_2^2; \quad \beta = \sqrt{4T_2^2 - T_1^2 / 2T_2^2}.$$

Решение (3.28) в этом случае содержит гармонические составляющие, и звено называют *колебательным* (рис. 3.3, в).

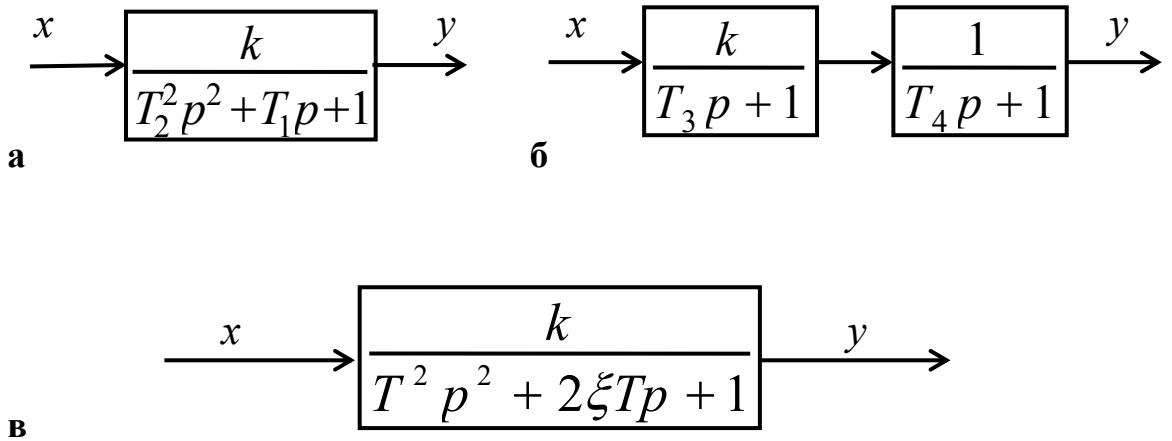


Рис. 3.3. Алгоритмические схемы инерционных звеньев второго порядка

При $T_1=0$ оба корня будут мнимыми, а переходная функция будет представлять собой незатухающую синусоиду. В этом случае звено называют *идеальным колебательным или консервативным*.

Наряду с общими свойствами (статизм, инерционность) апериодическое и колебательное звенья имеют и существенные различия. Рассмотрим особенности характеристик этих звеньев.

Переходная функция апериодического звена второго порядка может быть получена сложением общего решения (3.28) с частным решением, соответствующим вынужденной составляющей при $x(t)=1(t)$. Тогда переходная функция определится как

$$h(t) = C_1 e^{-t/T_3} + C_2 e^{-t/T_4} + k1(t). \quad (3.32)$$

При подстановке нулевых начальных условий $h(0)=0$; $h'(0)=0$ из (3.32) определим

$$C_1 = -kT_3 1(t) / (T_3 - T_4); \quad C_2 = kT_4 1(t) / (T_3 - T_4).$$

Тогда переходная функция

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_3}{T_3 - T_4} e^{-t/T_3} + \frac{T_4}{T_3 - T_4} e^{-t/T_4} \right) 1(t). \quad (3.33)$$

Временные характеристики $h(t)$ и $w(t)$ апериодического звена показаны на рис. 3.4, а, б. В соответствии с представлением апериодического звена второго порядка в виде последовательного соединения двух инерционных звеньев первого порядка все его частотные характеристики (рис. 3.4, в – е) могут быть получены по аналогичным характеристикам звеньев первого порядка по правилам умножения комплексных величин.

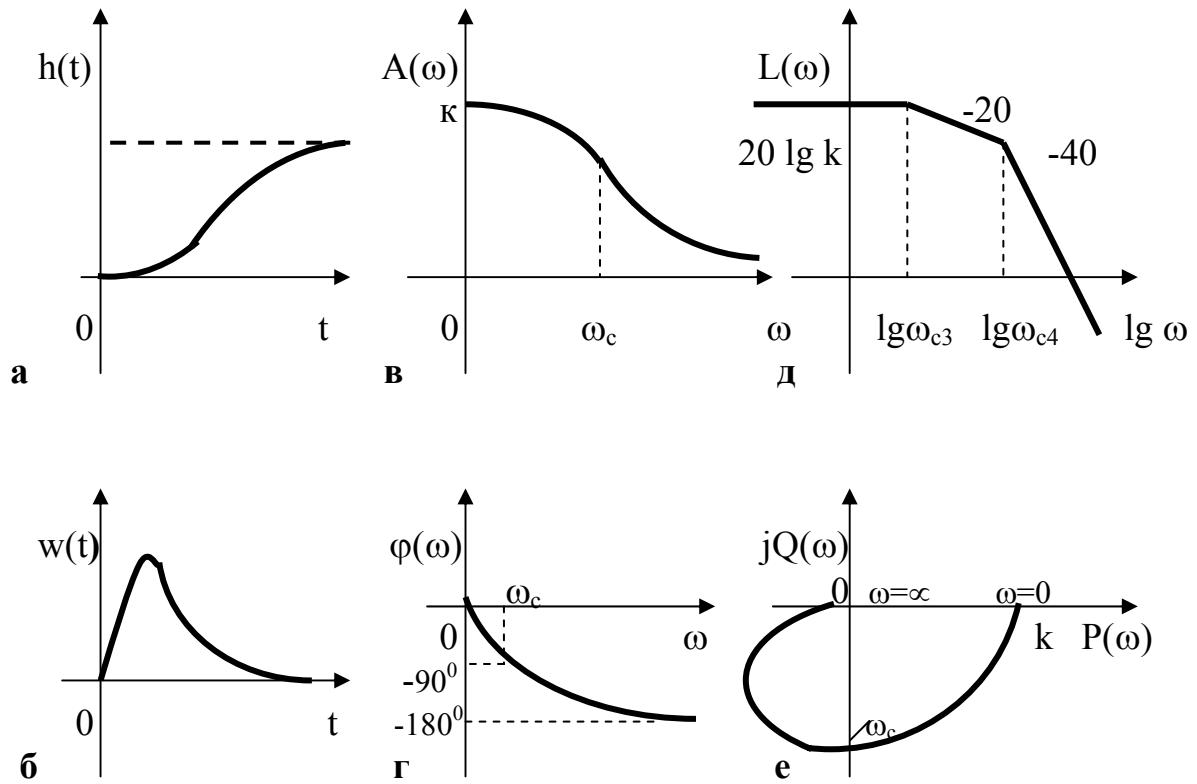


Рис. 3.4. Характеристики апериодического звена второго порядка

Апериодическое звено второго порядка так же, как и звено первого порядка, является фильтром низких частот.

Дифференциальное уравнение колебательного звена записывают обычно в виде

$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (3.34)$$

где $T=T_2$ – постоянная времени, характеризующая инерционность звена; $\xi=T_1/2T_2$ – относительный коэффициент демпфирования, характеризующий колебательность звена ($0 \leq \xi \leq 1$).

Передаточная функция колебательного звена

$$W(p) = Y(p)/X(p) = k/(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1), \quad (3.35)$$

а корни соответствующего характеристического уравнения равны

$$p_{1,2} = -\alpha \pm j\beta = -(\xi/T) \pm j\sqrt{1 - \xi^2/T}, \quad (3.36)$$

где $\alpha = \xi/T$ – коэффициент затухания; $\beta = \sqrt{1-\xi^2}/T$ – круговая частота затухающих колебаний в рад/с.

Переходная функция колебательного звена с учетом найденных значений корней $p_{1,2}$ определится как

$$h(t) = k \left[1 - \frac{1}{\beta T} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \right] l(t). \quad (3.37)$$

В (3.37) $\varphi = \arctg(\beta/\alpha) = \arcsin\beta T = \arccos\xi$.

Свободная составляющая переходной функции (рис. 3.5, а) представляет собой синусоиду, амплитуда которой убывает по экспоненте (пунктирная линия). Период затухающих колебаний равен

$$T_3 = 2\pi / \beta = 2\pi T / \sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3.38)$$

Если коэффициент демпфирования $\xi = 0$ при $T_1=0$, то на выходе звена после подачи единичного ступенчатого воздействия возникают незатухающие колебания с частотой $\omega_0=1/T$.

Скорость затухания колебательных переходных процессов принято оценивать *степенью затухания*

$$\phi = (A_1 - A_3) / A_1 = 1 - A_3 / A_1,$$

представляющей собой отношение разности двух соседних амплитуд к первой из них.

Если в выражение для переходной функции (3.37) подставить два значения t , отличающиеся на период затухающих колебаний $T_3=2\pi/\beta$, то получим

$$\phi = 1 - e^{-2\pi/\beta} = 1 - e^{-2\pi/\mu}. \quad (3.39)$$

Отношение $\mu = \beta/\alpha$ называют *степенью колебательности*.

А.ф.х. колебательного звена (рис. 5, е) описывается уравнением

$$W(j\omega) = k / \left[T^2(j\omega)^2 + 2\xi T j\omega + 1 \right]. \quad (3.40)$$

Уравнению (3.40) соответствует а.ч.х. (рис. 3.5, в)

$$A(\omega) = k / \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2} \quad (3.41)$$

и ф.ч.х. (рис. 3.5, г)

$$\varphi(\omega) = -\arctg \left[2\xi T \omega / (1 - T^2 \omega^2) \right]. \quad (3.42)$$

А.ч.х. на частоте ω_{max} имеет резонансный пик, равный

$$A_{max} = A(\omega_{max}) = k / 2\xi\sqrt{1 - \xi^2}. \quad (3.43)$$

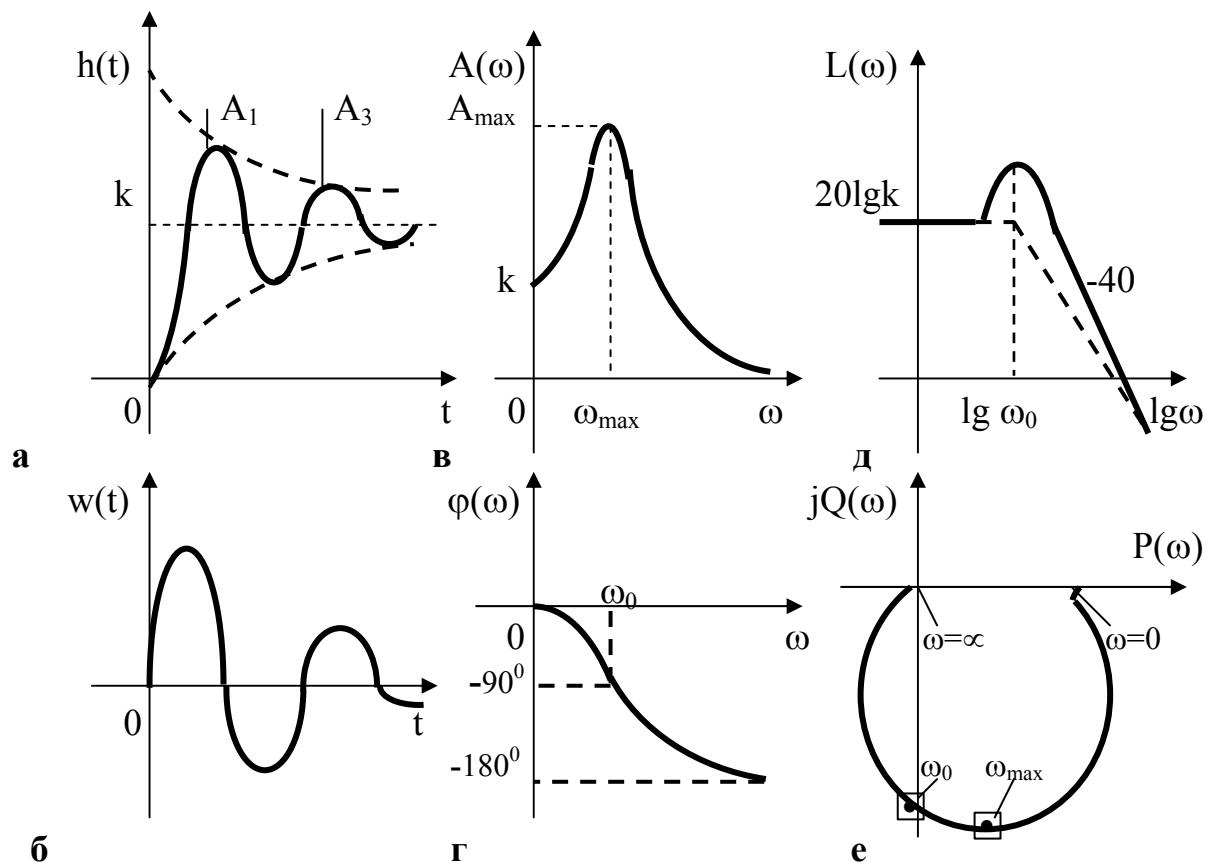


Рис. 3.5. Характеристики колебательного звена второго порядка

Резонансный пик существует, если $\xi < 0,707$. Чем меньше ξ , тем ближе резонансная частота ω_{max} к собственной частоте незатухающих колебаний ω_0 и тем больше резонансный пик. *Колебательное звено, как и все инерционные звенья, хорошо пропускает сигналы низкой частоты и плохо – сигналы высокой частоты.*

3.5. Интегрирующие звенья

Интегрирующие звенья подразделяются на идеальные и реальные. Общим свойством этих звеньев является пропорциональность производной от выходной величины мгновенному значению входной величины. У реального интегрирующего звена пропорциональность устанавливается после завершения переходного процесса в звене.

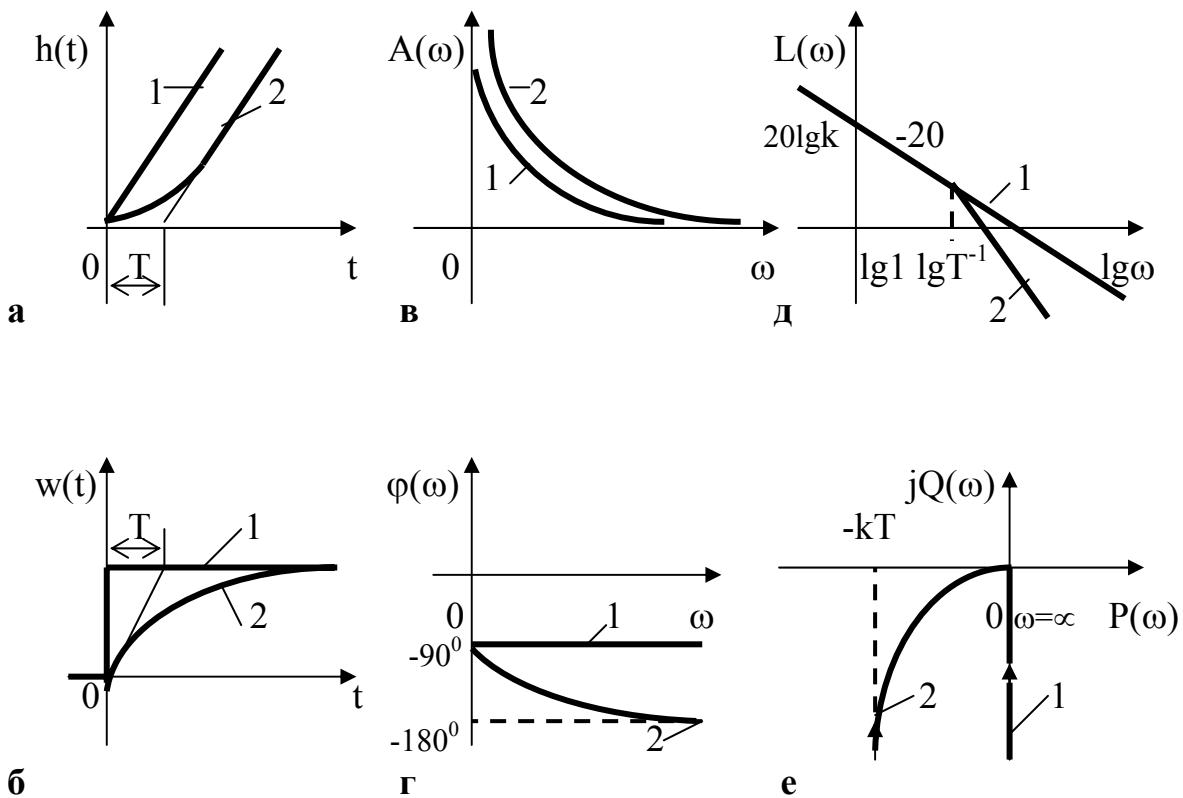


Рис. 3.6. Характеристики идеального (1) и реального (2) интегрирующих звеньев

Идеальному интегрирующему звену соответствует уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = kx(t). \quad (3.44)$$

Уравнению (3.44) соответствует интегральное уравнение

$$y(t) = k \int_0^t x(t) dt + y(0), \quad (3.45)$$

из которого видно, что звено интегрирует входной сигнал.

Переходную функцию получим из (3.45), полагая $x(t) = 1(t)$ (рис. 3.6, а):

$$h(t) = kt 1(t). \quad (3.46)$$

Импульсная переходная функция идеального интегрирующего звена (рис. 3.6, б)

$$w(t) = k 1(t). \quad (3.47)$$

Передаточная функция идеального интегрирующего звена

$$W(p) = k / p. \quad (3.48)$$

А.ф.х. идеального звена

$$W(j\omega) = k / j\omega = -jk / \omega \quad (3.49)$$

на комплексной плоскости (рис. 3.6, е) представляет собой прямую, совпадающую с мнимой осью.

А.ч.х. (рис. 3.6, в)

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = k / \omega \quad (3.50)$$

является гиперболой, стремящейся к бесконечности при $\omega \rightarrow 0$.

Ф.ч.х. идеального интегрирующего звена (рис. 3.6, г)

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{-k / \omega}{0} = -90^\circ \quad (3.51)$$

свидетельствует, что фазовый сдвиг не зависит от частоты и равен -90° .

Л.а.ч.х. представляет собой прямую с наклоном -20 дБ/декаду и проходит через точки $\omega=1$; $L(\omega)=20 \lg k$ (рис. 3.6, д):

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg k - 20 \lg \omega. \quad (3.52)$$

Дифференциальное уравнение реального интегрирующего звена

$$T \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = kx(t), \quad (3.53)$$

а передаточная функция

$$W(p) = k / (Tp + 1)p. \quad (3.54)$$

Звено с передаточной функцией (3.54) может рассматриваться как последовательное соединение идеального интегрирующего звена с передаточной функцией $1/p$ и статического инерционного звена первого порядка с постоянной времени T и коэффициентом передачи k . Все частотные характеристики реального интегрирующего звена могут быть получены по правилам перемножения комплексных величин.

3.6. Дифференцирующие звенья

Дифференцирующие звенья подразделяются на идеальные (безинерционные) и реальные (инерционные). Значение выходной величины идеального

дифференцирующего звена в каждый момент времени пропорционально мгновенному значению первой производной от входной величины:

$$y(t) = k \frac{dx(t)}{dt}. \quad (3.55)$$

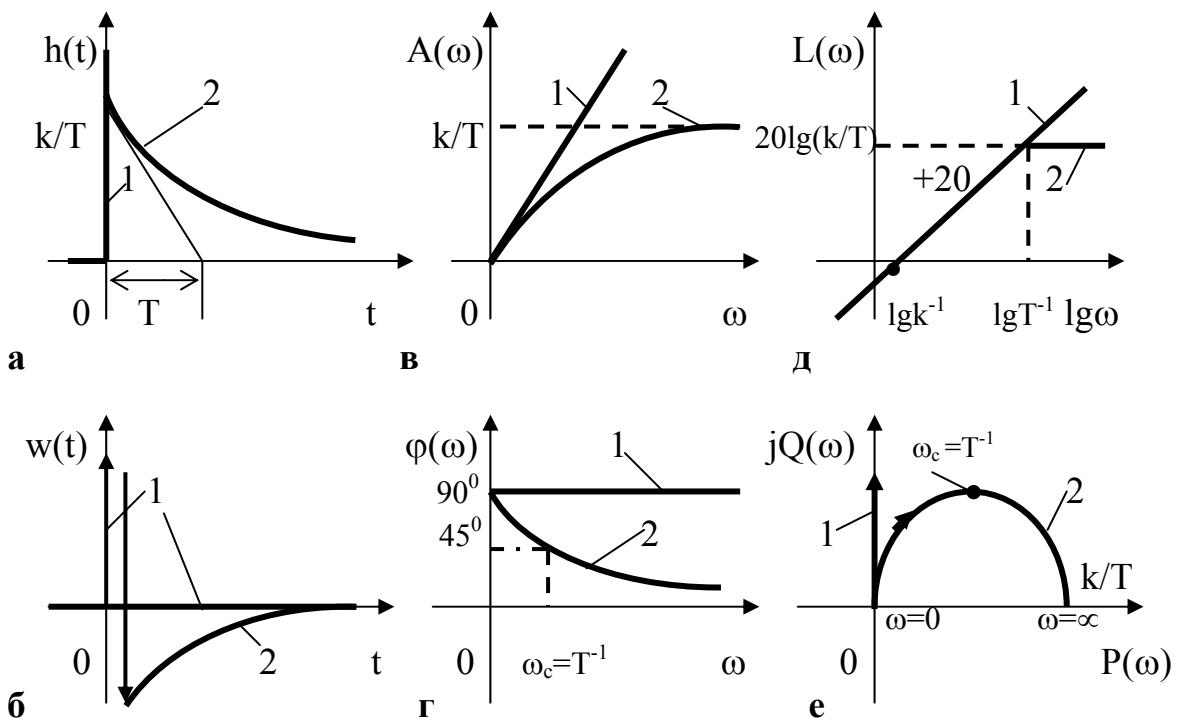


Рис. 3.7. Характеристики идеального (1) и реального (2) дифференцирующих звеньев

Переходная функция (рис. 3.7, а) определяется дифференцированием единичной ступенчатой функции $1(t)$ и подстановкой в (3.55):

$$h(t) = k\delta(t). \quad (3.56)$$

Импульсная переходная функция (рис. 3.7, б)

$$w(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}. \quad (3.57)$$

Передаточная функция звена

$$W(p) = kp. \quad (3.58)$$

Амплитудно-фазовая функция (рис. 3.7, е) совпадает с положительной мнимой осью и описывается выражением

$$W(j\omega) = kj\omega. \quad (3.59)$$

Амплитудно-частотная функция (рис. 3.7, в)

$$A(\omega) = k\omega \quad (3.60)$$

показывает, что амплитуда выходного сигнала возрастает пропорционально частоте входного сигнала.

Фазовый сдвиг на всех частотах одинаков:

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{k\omega}{0} = +90^\circ. \quad (3.61)$$

Л.а.ч.х. звена

$$L(\omega) = 20 \lg k\omega \quad (3.62)$$

представляет собой прямую линию с наклоном +20дБ/декаду, проходящую через точку с координатами $\omega = k^{-1}$, $L(\omega) = 0$ (рис. 3.7, д).

Реальное дифференцирующее звено можно рассматривать как последовательное соединение идеального дифференцирующего звена и инерционного звена первого порядка. Передаточная функция реального дифференцирующего звена

$$W(p) = kp / (Tp + 1). \quad (3.63)$$

Временные характеристики $h(t)$ и $w(t)$ реального дифференцирующего звена представлены на рис. 3.7, а, б. Выражения для частотных характеристик могут быть получены из передаточной функции обычным способом. Частотные характеристики представлены на рис. 3.7.

3.7. Звено запаздывания

Звеном запаздывания называется звено, передающее сигнал со входа на выход без искажения его формы, но с некоторой задержкой τ во времени. Наиболее распространенным в практике автоматических систем является транспортное запаздывание, обусловленное пространственным перемещением элементов, передающих информацию (например, транспортерная лента, полоса прокатываемого металла). К статическим устройствам запаздывания можно отнести различного рода линии задержки электронного или параметрического типа.

В некоторых случаях звено запаздывания вводится при расчете системы условно. Для ряда объектов уравнение динамики неизвестно, поэтому кривую переходного процесса реального объекта при единичном входном воздействии аппроксимируют экспонентой и эквивалентным запаздыванием.

Уравнение звена запаздывания

$$y(t) = x(t - \tau) \quad (3.64)$$

не является дифференциальным и относится к классу особых уравнений со смещенным аргументом.

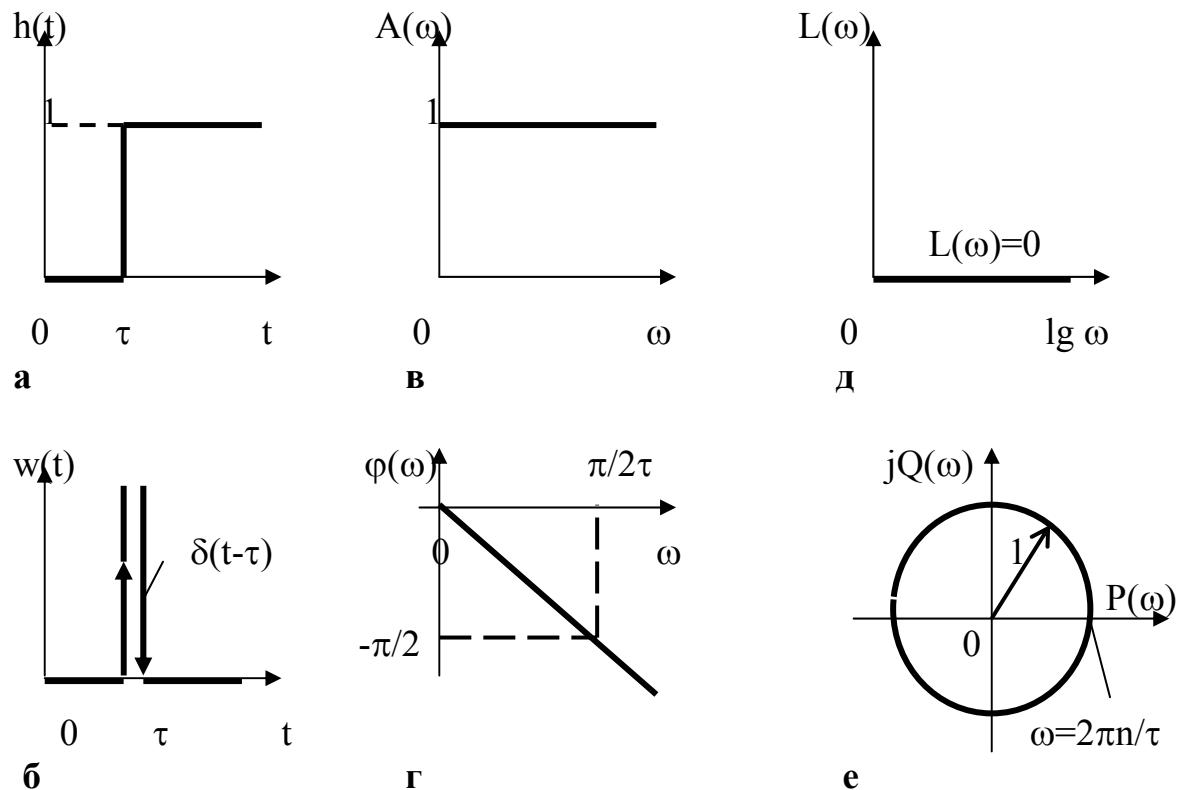


Рис. 3.8. Характеристики звена запаздывания

Подстановкой в уравнение звена значения входной величины $x(t)=1(t)$ получим его переходную функцию:

$$h(t) = 1(t - \tau), \quad (3.65)$$

а подстановкой $x(t)=\delta(t)$ – импульсную:

$$w(t) = \delta(t - \tau). \quad (3.66)$$

Временные характеристики звена запаздывания показаны на рис. 3.8, а, б.

На основании теоремы запаздывания запишем уравнение (3.64) в изображениях по Лапласу:

$$Y(p) = X(p)e^{-p\tau} \quad (3.67)$$

и определим передаточную функцию звена как

$$W(p) = Y(p)/X(p) = e^{-p\tau}. \quad (3.68)$$

А.ф.х. звена

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos \omega\tau - j \sin \omega\tau \quad (3.69)$$

является окружностью единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 3.8, е).

Амплитудная частотная и фазовая частотная характеристики определяются выражениями:

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg}(-\sin \omega\tau / \cos \omega\tau) = -\omega\tau; \quad (3.70)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\cos^2 \omega\tau + \sin^2 \omega\tau} = 1. \quad (3.71)$$

Звенья запаздывания ухудшают устойчивость систем и делают их трудно управляемыми.

Звено запаздывания определяет трансцендентный характер характеристического уравнения системы. Для приведения характеристического уравнения к алгебраической форме трансцендентную передаточную функцию звена раскладывают в ряд Пада и приближенно заменяют ее двумя или тремя членами ряда:

$$W(p) = e^{-p\tau} \approx (1 - 0,5\tau p) / (1 + 0,5\tau p) \quad (3.72)$$

или

$$W(p) \approx \frac{1 - 0,5\tau p + 0,83\tau^2 p^2}{1 + 0,5\tau p + 0,83\tau^2 p^2}. \quad (3.73)$$

ГЛАВА 4

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ. СТАТИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ САУ

4.1. Получение передаточных функций одномерной системы по передаточным функциям звеньев

Если имеются уравнения всех звеньев системы, то описанием последней является система этих уравнений. Исключив из нее обычным порядком промежуточные переменные, можно получить одно дифференциальное уравнение высокого порядка, связывающее интересующую нас выходную величину системы с определенной входной величиной, каким-либо возмущением или задающим воздействием. Наиболее просто эту процедуру можно выполнить, если оперировать передаточными функциями звеньев. Рассмотрим простейшие случаи преобразования структурных схем.

Передаточная функция цепочки последовательно соединенных звеньев
В этом случае имеем систему уравнений (рис. 4.1):

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= W_1(p) X, \\
 Y_2 &= W_2(p) Y_1, \\
 Y_3 &= W_3(p) Y_2, \\
 &\dots \\
 Y &= W_n(p) Y(n-1).
 \end{aligned}$$

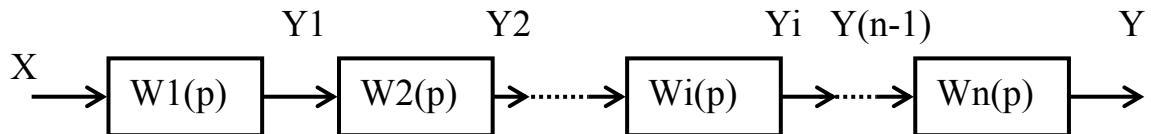


Рис. 4.1. Последовательное соединение звеньев

Исключив отсюда промежуточные переменные, получим

$$Y = \{W_1(p) \ W_2(p) \dots \ W_n(p)\}X = W(p)X.$$

Здесь n

$$W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (4.1)$$

Это значит, что такую цепочку можно заменить в структурной схеме одним эквивалентным звеном с передаточной функцией $W(p)$.

Параллельное соединение звеньев направленного действия

При параллельном соединении все звенья имеют общий входной сигнал X , а выходной сигнал Y равен сумме выходных сигналов отдельных звеньев:

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n = [W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p)]X = W(p)X,$$

где

$$W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (4.2)$$

На рис. 4.2 представлено такое соединение звеньев.

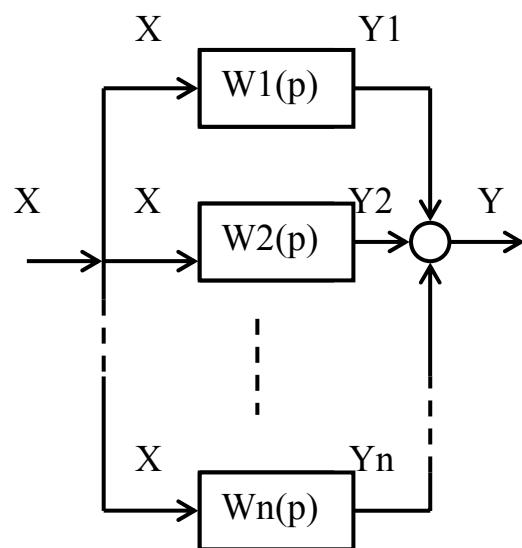


Рис. 4.2. Параллельное соединение звеньев

Таким образом, в структурной схеме такую группу звеньев можно заменить одним эквивалентным звеном с соответствующей передаточной функцией $W(p)$.

Звено, охваченное обратной связью

Обратная связь может быть положительной, если сигнал обратной связи $X_{\text{ос}}$ складывается со входным сигналом X (плюс у суммирующего элемента на рис. 4.3), или отрицательной, если $X_{\text{ос}}$ вычитается из X (минус на рис. 4.3).

Охват звеньев как положительной, так и отрицательной обратными связями широко применяется для коррекции статических и динамических свойств замкнутых систем автоматического управления с целью придания заданных показателей качества процесса управления.

Схема описывается следующими уравнениями:

$$\left. \begin{array}{l} Y = W_1(p)(X + X_{oc}), \\ X_{oc} = W_2(p)Y, \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \longrightarrow \text{для положительной обратной связи;} \\ \longrightarrow \text{для отрицательной обратной связи.} \end{array}$$

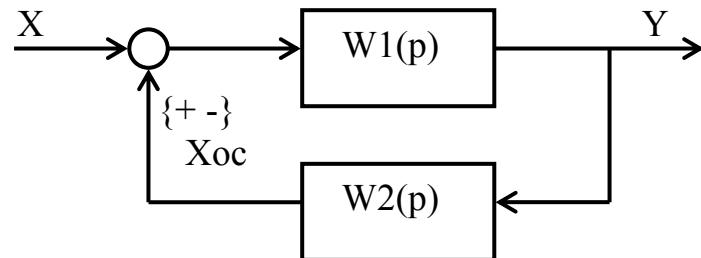


Рис. 4.3. Звено, охваченное обратной связью

Исключив из уравнений X_{oc} , получим

$$Y \frac{W_1(p)}{1 \{-+\} W_1(p)W_2(p)} X = W_3(p)X. \quad (4.3)$$

В уравнении (4.3) в знаменателе "минус" соответствует положительной обратной связи, а "плюс"- отрицательной обратной связи.

Из (4.3) следует

$$W_3(p) = \frac{W_1(p)}{1 \{-+\} W_1(p)W_2(p)} = \frac{W_1(p)}{1 \{-+\} W(p)}, \quad (4.4)$$

где

$$W(p) = W_1(p)W_2(p). \quad (4.5)$$

Звено, охваченное обратной связью, также может быть представлено одним эквивалентным звеном с соответствующей передаточной функцией.

Правила переноса входных и выходных сигналов в структурных схемах Правила перестановки сумматоров

В общем случае одномерная САУ является многоконтурной, т.е. она содержит произвольное число связанных друг с другом контуров.

При преобразовании многоконтурной схемы в эквивалентную одноконтурную руководствуются рядом правил. В их число, прежде всего, входят уже изложенные выше правила замены групп последовательно и параллельно соединенных звеньев, а также звена с обратной связью одним эквивалентным звеном. Кроме того, применяются правила переноса воздействий из одной точки системы в другую и правила перестановки сумматоров.

В процессе преобразования многоконтурной САУ часто необходимо переносить суммирующий элемент вперед или назад. Правила переноса сумматоров вытекают из следующих соображений. Пусть сумматор находится на выходе звена с передаточной функцией $W_2(p)$ (рис. 4.4,а). При этом справедливо

$$\begin{aligned} X &= X_2 + F, \\ X &= X_1 W_2(p) + F. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Если в (4.6) вынести за скобки $W_2(p)$, то получим

$$X = \{X_1 + F * 1/W_2(p)\} W_2(p). \quad (4.7)$$

Выражение (4.7) показывает, что на вход звена $W_2(p)$ поступает сигнал с выхода суммирующего устройства, на входы которого подаются сигналы X_1 и $F * 1/W_2(p)$, чему соответствует эквивалентная схема справа.

Таким образом, при переносе суммирующего (вычитающего) элемента назад добавляется звено с обратной передаточной функцией $1/W_2(p)$.

При переносе суммирующего элемента вперед (рис. 4.4,б) аналогично можно показать, что в ветвь добавляется фиктивное звено с передаточной функцией $W_2(p)$ обойденного при этом звена основного контура.

При переносе точки разветвления, т.е. входа параллельной ветви (рис. 4.5), правило преобразования обратное: при переносе этой точки вперед в ветвь добавляется звено с обратной передаточной функцией $1/W_2(p)$ обойденного звена, а при переносе назад - звено с передаточной функцией $W_1(p)$.

Из рис. 4.6 следует, что расположенные последовательно сумматоры можно менять местами.

При переносе узла через сумматор назад и переносе узла через сумматор вперед необходимо руководствоваться следующими правилами.

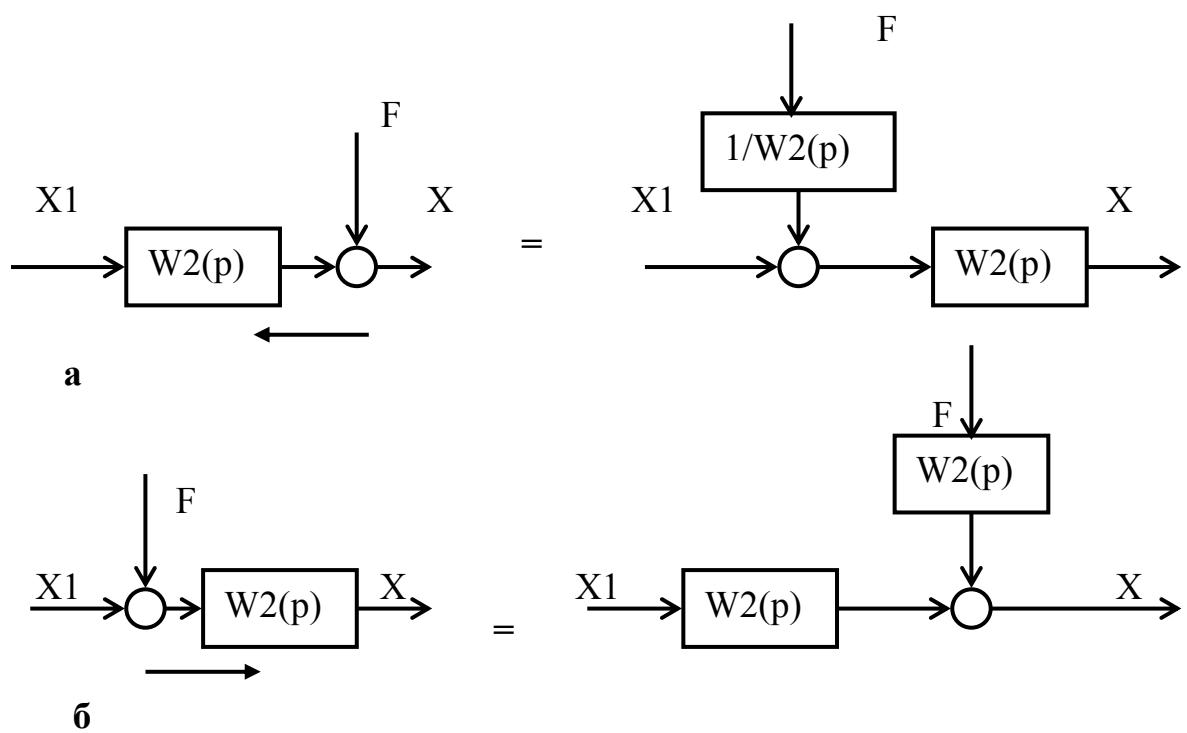


Рис. 4.4. Правила переноса сумматора

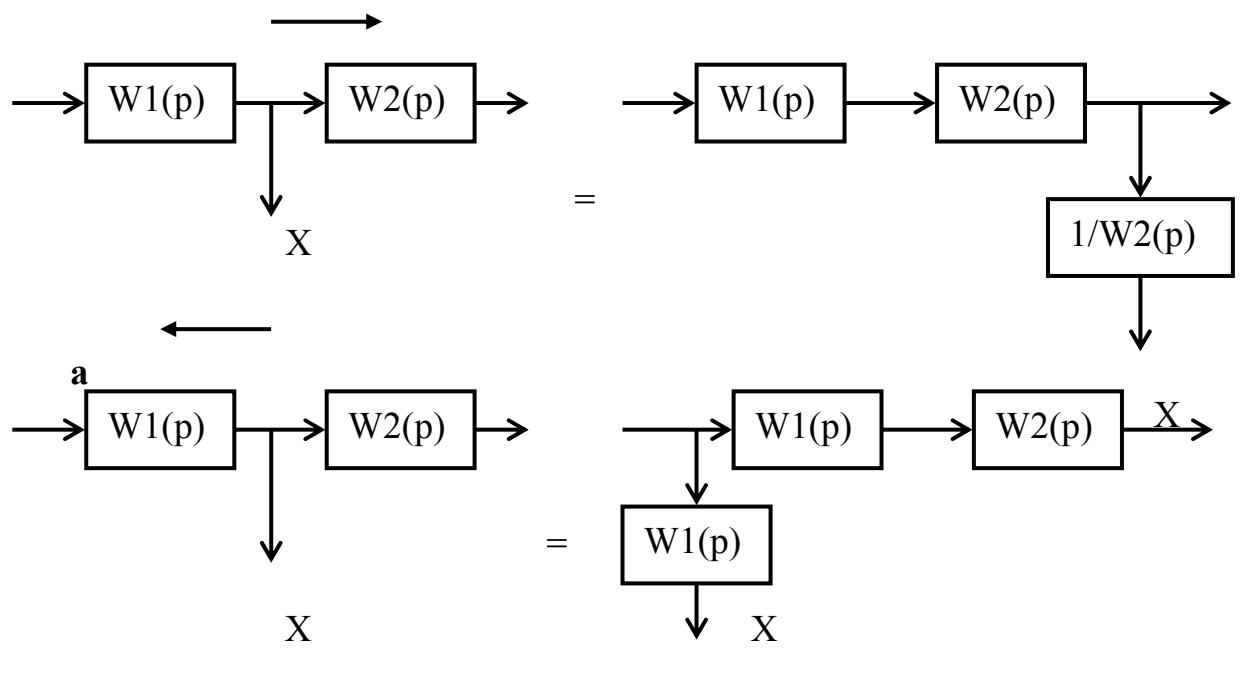


Рис. 4.5. Правила переноса точки разветвления

Правила перестановки сумматоров поясняет рис. 4.6.

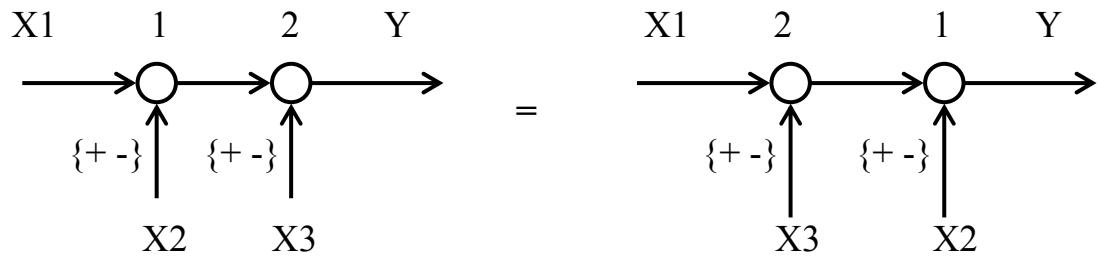


Рис. 4.6. Правила перестановки сумматоров

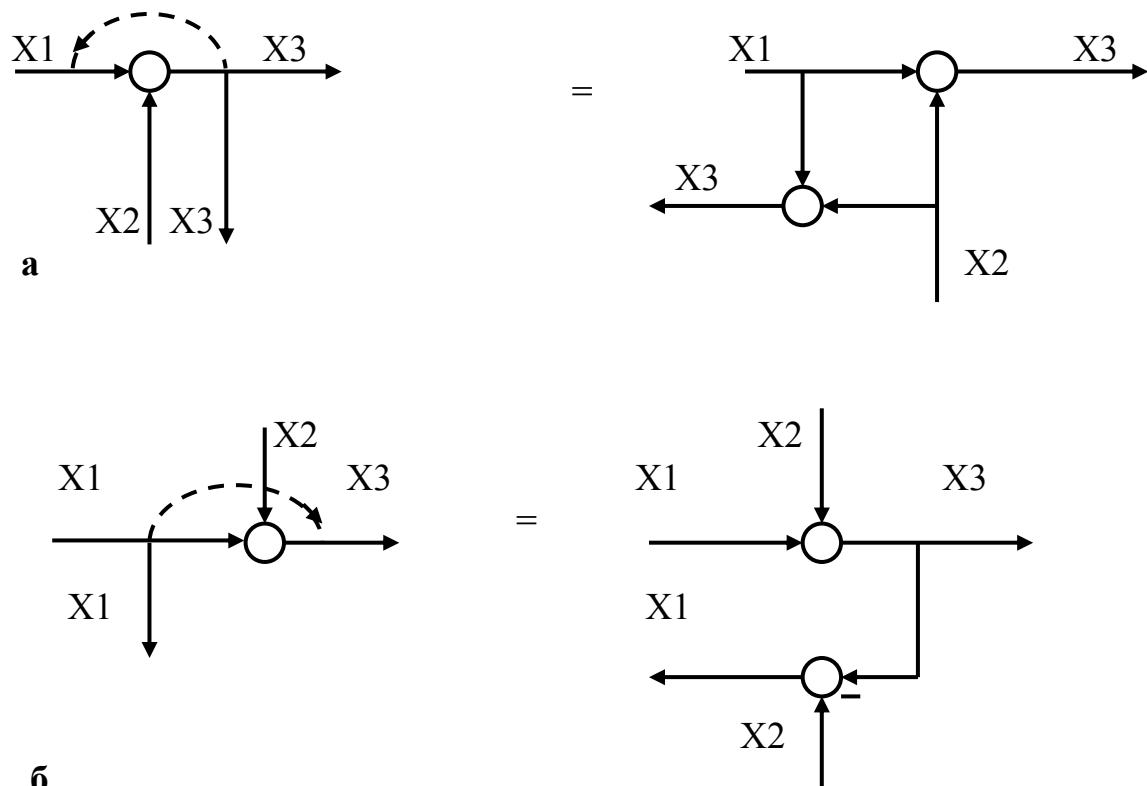


Рис. 4.7. Правила переноса узла через сумматор

Пример преобразования структурной схемы

Основной задачей преобразования многоконтурной структурной схемы является приведение ее к схеме с неперекрещивающимися связями, когда отдельные контуры не сцепляются друг с другом. После этого каждый из этих контуров может быть заменен эквивалентным звеном. В результате исходная схема приводится к одноконтурной.

На рис. 4.8 приведен пример поэтапного преобразования структурной схемы.

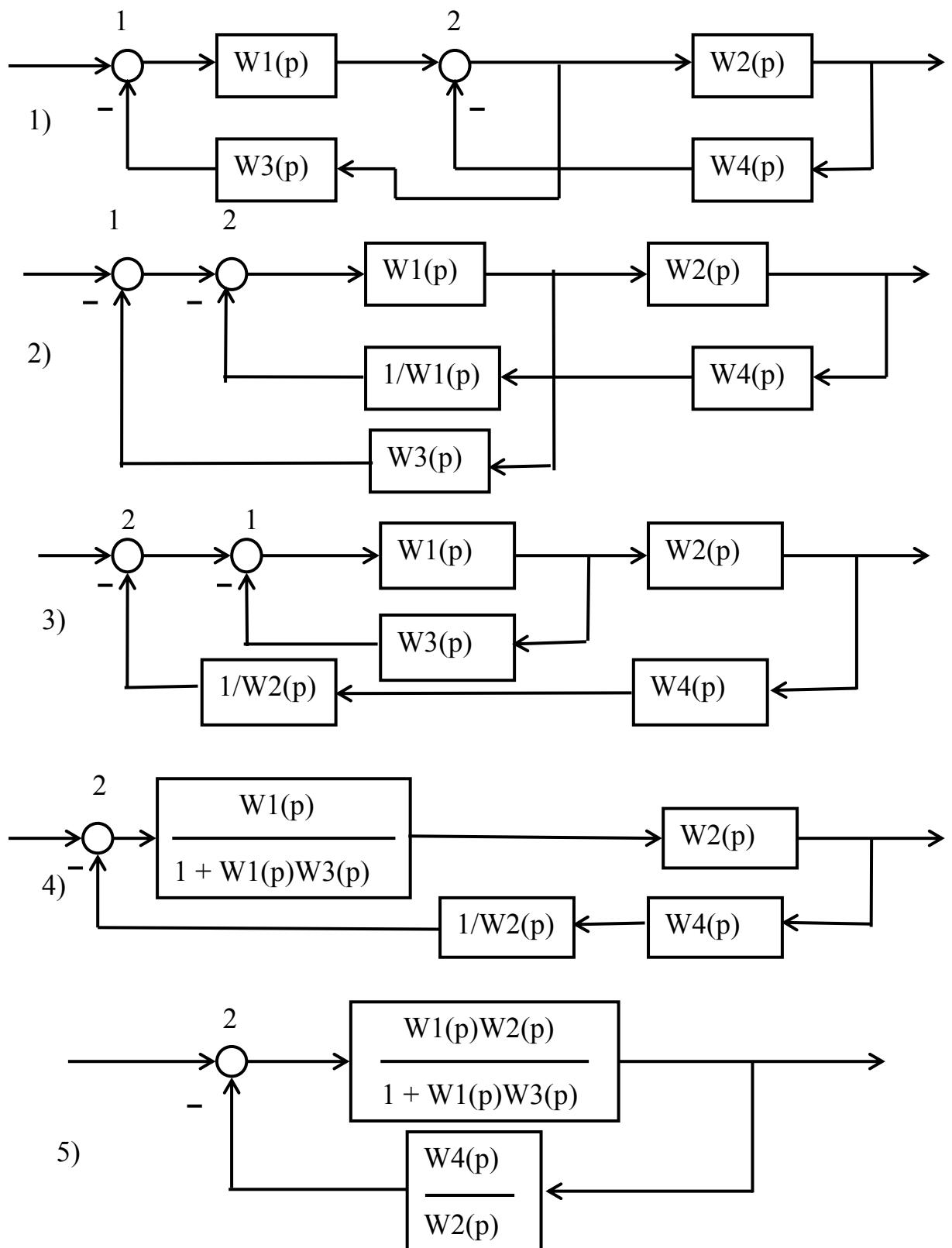


Рис. 4.8. Этапы преобразования структурной схемы

Очередным преобразованием система приводится к одному эквивалентному звену.

4.2. Статические режимы САУ

Как всякая динамическая система, САУ может находиться в одном из двух режимов - стационарном (установившемся) и переходном. Существует два вида стационарных режимов САУ - статические и динамические.

Статический режим (статика) это режим, при котором система находится в состоянии покоя вследствие того, что все внешние воздействия и параметры самой системы не меняются во времени.

Динамический стационарный режим возникает, когда приложенные к системе внешние воздействия изменяются по какому-либо установленному закону, в результате чего система приходит в режим установленного вынужденного движения.

Важными вопросами статики является обеспечение заданной статической точности, а также изучение статических характеристик элементов и систем. По виду этих характеристик различают статическое и астатическое регулирование и управление.

Уравнения статики САУ получаются из уравнения динамики:

$$Y = W_3(p)X. \quad (4.8)$$

$$B \quad (4.8) \quad W_3(p) = \frac{W_{yx}(p)}{1 + W(p)},$$

где $W_{yx}(p)$ - передаточная функция, определяющая зависимость Y от X при отсутствии обратной связи, а $W(p)$ - передаточная функция разомкнутой системы. Для получения уравнения статики необходимо в $W_3(p)$ подставить $p=0$, что соответствует постоянству всех переменных X, Y, Z , т.е. равенству нулю их производных.

В качестве примера рассмотрим уравнение статического режима для САУ с передаточной функцией

$$W_3(p) = \frac{K_h(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + K_I}.$$

Уравнение статики при $p=0$ будет иметь вид

$$W_3(0) = \frac{K_h}{1 + K_I},$$

a

$$Y_{cm} = W_3(0)X_{cm} = \frac{K_H}{1 + K_I} X_{cm} . \quad (4.9)$$

Система, содержащая после ее приведения к одноконтурной только статические звенья, называется статической.

Задачами статики являются изучение статических характеристик и обеспечение заданной статической точности.

Под статической характеристикой понимается зависимость выходной координаты Y от входного воздействия по управлению X или от возмущения Z .

$$Y = F(X) \text{ при } Z=const, \quad (4.10)$$

$$Y = F(Z) \text{ при } X = const. \quad (4.11)$$

В общем случае структурная схема САУ с учетом управляющего и возмущающего воздействий может быть приведена к виду (рис. 4.9).

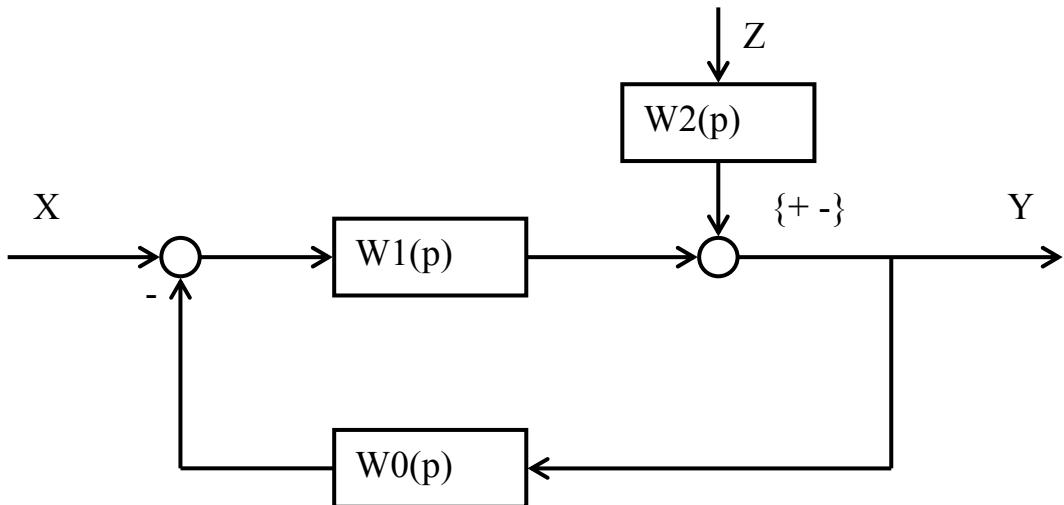


Рис. 4.9. Структурная схема САУ

Из схемы (рис. 4.9) следует, что САУ характеризуется передаточными функциями по управляющему X и по возмущающему Y воздействиям, а следовательно, и статическими характеристиками по управлению и по возмущению. Статические характеристики по управлению бывают линейными и нелинейными. Для количественной оценки статических характеристик по управлению введено понятие коэффициента передачи K как отношение выходной координаты Y к входной X :

$$K = Y / X = tga = const \text{ для линейных характеристик.}$$

Если Y и X имеют одинаковую размерность, то коэффициент передачи называют коэффициентом усиления.

Статические характеристики по возмущению (рис. 4.10) $Y=F(Z)$ могут быть представлены семейством характеристик для различных заданных постоянных значений X . Для заданного значения $X_n=\text{const}$ рост возмущения Z уменьшает значение Y , если возмущение действует со знаком “минус”.

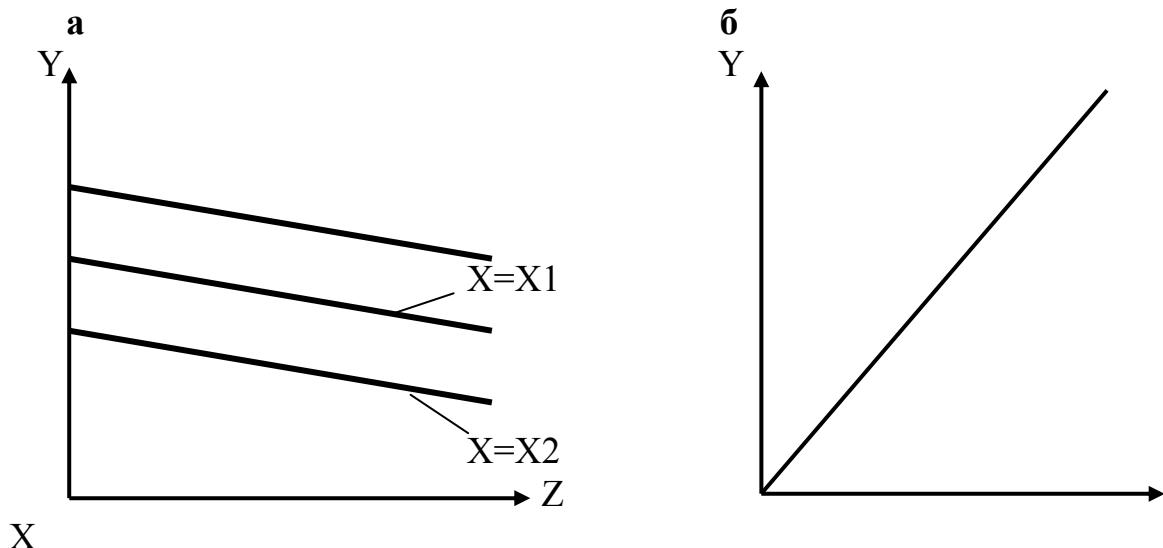


Рис. 4.10. Статические характеристики по возмущению (а) и по управлению (б)

В системах, которые обеспечивают в установившемся режиме равенство управляемой переменной заданному значению (статизм равен нулю), осуществляется астатическое управление. Статическая характеристика астатической системы является прямой линией, параллельной оси абсцисс.

Поведение астатического регулятора, содержащего интегрирующее звено, можно охарактеризовать, рассмотрев его работу при разомкнутой главной обратной связи. Если подать на вход разомкнутой астатической системы постоянный сигнал, то на ее выходе можно получить непрерывное изменение выходной переменной с постоянной скоростью. Отношение скорости изменения выходной переменной к сигналу на входе называется *коэффициентом усиления астатической системы*.

Для статического режима работы астатических систем не существует определенной зависимости между значением выходной переменной и положением регулирующего органа.

ГЛАВА 5

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ САУ

Устойчивость является одним из необходимых условий, обеспечивающих нормальное функционирование автоматических систем. Поэтому чрезвычайно важно выяснить те условия, которые обеспечивают принципиальную работоспособность системы, ее устойчивость.

Признаком устойчивости САУ является существование установившегося состояния. Если отклонение выходной координаты от заданного значения (т.е. ошибка управления) не стремится к постоянной величине или к нулю, а возрастает или испытывает колебания, то САУ неустойчива. Причинами неустойчивости могут быть инерционность элементов и большой коэффициент передачи разомкнутой системы, так как многократно усиленное рассогласование, возвращающееся по цепи обратной связи на вход системы, не успевает из-за запаздывания в инерционных элементах отрабатываться.

Не останавливаясь на теоремах, доказанных Ляпуновым, рассмотрим, как можно оценить устойчивость линейных систем, описываемых дифференциальным уравнением вида

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j x^{(j)}(t). \quad (5.1)$$

Решение этого уравнения содержит две составляющие, одна из которых, $y_{ce}(t)$ (свободная или переходная составляющая), определяется решением однородного дифференциального уравнения:

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = 0 \quad (5.2)$$

при начальных условиях: $y(0) \neq 0; y' \neq 0; y'' \neq 0; \dots$.

В линейных системах, для которых справедлив принцип суперпозиции, $y_{ce}(t)$ не зависит от воздействий, а определяется только параметрами системы. В соответствии с определением устойчивости по Ляпунову, САУ асимптотически устойчива, если с течением времени при $t \rightarrow \infty$ свободная (переходная) составляющая решения линейного дифференциального уравнения будет стремиться к нулю. На рис. 5.1, а показаны $y_{ce}(t)$, соответствующие устойчивым, а на рис. 5.1, б – неустойчивым системам.

Поведение свободной составляющей определяется решением однородного дифференциального уравнения

$$y_{ce}(t) = \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}, \quad (5.3)$$

где A_i – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий; p_i – корни характеристического уравнения $a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n = 0$.

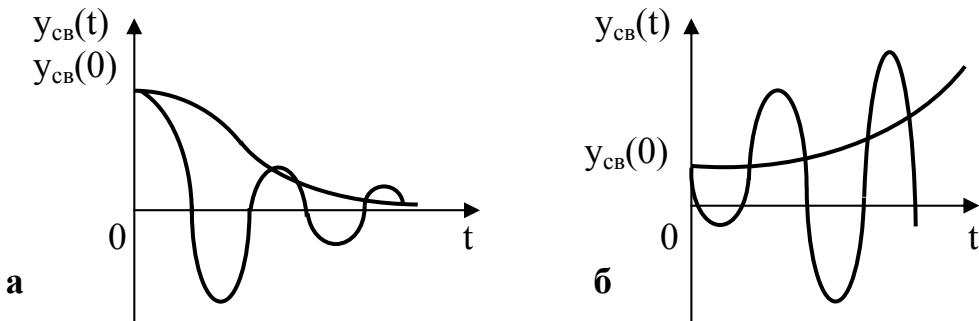


Рис. 5.1. Свободные составляющие переходного процесса в САУ:
а - в устойчивых, б - в неустойчивых

Для оценки условий устойчивости необходимо выяснить, когда выражение (5.3) будет стремиться к нулю. Так как система линейная, на значение свободной составляющей влияют только корни характеристического уравнения, которые зависят от структуры и параметров системы. Эти параметры – вещественные числа. Следовательно, вещественными являются и коэффициенты характеристического уравнения, определяемые параметрами системы и их комбинациями, а это означает, что корни уравнения могут быть либо только вещественными, либо комплексно-сопряженными:

$$p_k = \alpha_k, \quad p_{k+1} = \alpha_{k+1} + j\omega_{k+1}, \quad p_{k+2} = \alpha_{k+1} - j\omega_{k+1}. \quad (5.4)$$

Если вещественных корней s , а комплексно-сопряженных $n-s$, то свободная составляющая может быть записана в следующем виде:

$$y_{cb}(t) = \sum_{i=1}^s A_i e^{\alpha_i t} + \sum_{r=1}^{(n-s)/2} A_r e^{\alpha_r t} \sin(\omega_r t + \varphi_r), \quad (5.5)$$

откуда следует, что $y_{cb}(t) = 0$ при $t \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда все α_i и α_r отрицательны.

На комплексной плоскости корней корни с отрицательными вещественными частями располагаются на левой полуплоскости и называются левыми, а корни, расположенные в правой полуплоскости, называются правыми.

Необходимое и достаточное условие устойчивости линейной системы может быть сформулировано так: линейная система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения являются левыми.

Так как при расположении корней слева от мнимой оси система устойчива, а справа неустойчива, то мнимую ось называют *границей устойчивости*. Если хотя бы один корень расположен на этой оси, то систему нельзя считать

работоспособной, потому что малейшие изменения параметров могут привести к потере устойчивости.

Для оценки устойчивости системы практически не требуется находить корней ее характеристического уравнения в связи с тем, что разработаны косвенные признаки, по которым можно судить о знаках действительных частей этих корней и тем самым об устойчивости системы, не решая самого характеристического уравнения. Эти косвенные признаки называются критериями устойчивости.

5.1. Частотные критерии устойчивости

Они позволяют оценить устойчивость замкнутых систем косвенным путем с помощью частотных характеристик. Доказательство частотных критериев основано на принципе аргумента.

Принцип аргумента. Оценка устойчивости основана на значении корней характеристического уравнения $p_1 - p_n$. При этом характеристическое уравнение вида

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = F(p) \quad (5.6)$$

можно представить в форме произведения однотипных сомножителей

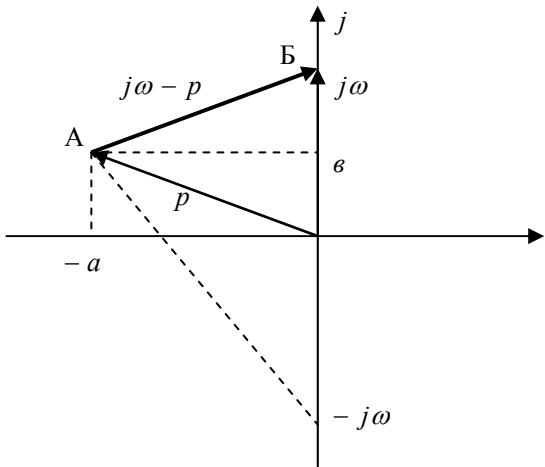
$$a_n (p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n) = F(p) . \quad (5.7)$$

Для перехода к частотным характеристикам вводим замену $p \rightarrow j\omega$ и получаем вектор

$$F(j\omega) = a_n (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \dots (j\omega - p_n) . \quad (5.8)$$

Угол поворота этого вектора $\varphi_F(\omega)$ определяется суммой углов поворота $\varphi_i(\omega)$ отдельных сомножителей $(j\omega - p)$:

$$\varphi_F(\omega) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\omega) .$$



Если корень характеристического уравнения будет левым $p = -a + jb$, то вектор $j\omega - p$ отобразится на комплексной плоскости отрезком АБ (рис. 5.2). Из рис. 5.2 видно, что при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ вектор АБ будет вращаться относительно точки А и скользить по минус бесконечности до плюс бесконечности.

Рис. 5.2. Левый корень

Его результирующий угол поворота составит $\varphi_{1l}(\omega) = 180^\circ$.

Для правого корня p результирующий вектор $j\omega - p$ расположится в правой части комплексной плоскости, а его результирующий угол поворота составит $\varphi_{1m}(\omega) = -180^\circ$.

Если общее число корней n будет содержать l левых и m правых корней, т.е. $n=l+m$, то

$$\varphi_F(\omega) = l\varphi_{1l}(\omega) + m\varphi_{1m}(\omega) = l\pi + m\pi .$$

Так как $l=n-m$, то

$$\varphi_F(\omega) = (n-m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi , \quad (5.9)$$

что соответствует изменению ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Если ω изменяется от 0 до $+\infty$, то

$$\varphi_F(\omega) = (n-2m)\pi/2 . \quad (5.10)$$

Это и есть математическое выражение принципа аргумента.

5.2. Критерий устойчивости Михайлова

Критерий устойчивости Михайлова предназначен для оценки устойчивости системы по его характеристическому уравнению. Устойчивая система содержит только левые корни, т.е. $m=0$. И тогда, согласно формуле (5.10), угол поворота характеристического частотного вектора при изменении ω от 0 до $+\infty$ составит $\varphi(\omega)=+n\pi/2$, т.е. для устойчивости системы характеристический частотный вектор должен пройти последовательно (поочередно) в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов. Вектор начинает движение при $\omega=0$ с положительной вещественной оси.

Порядок расчета устойчивости по критерию Михайлова:

1. Записывается характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$F(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 .$$

2. Производится замена $p = j\omega$ и выделяются вещественная $P(\omega)$ и мнимая $Q(\omega)$ слагаемые.

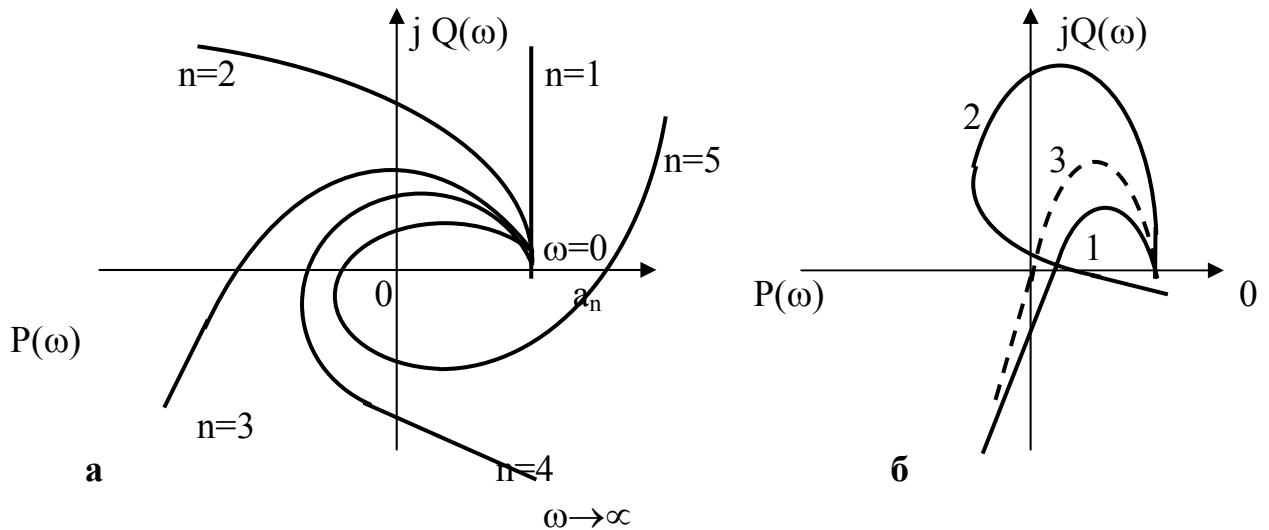


Рис. 5.3. Годографы Михайлова для систем:
а - устойчивых , б - неустойчивых

3. В осях координат $P(\omega), jQ(\omega)$ при изменении ω от 0 до $+\infty$ строят характеристический частотный вектор (годограф Михайлова).
4. По виду годографа Михайлова судят об устойчивости системы. Устойчивые годографы проходят поочередно n квадрантов. На границе устойчивости системы годограф проходит через начало координат.

Различные виды годографов представлены на рис. 5.3.

Системе, находящейся на границе устойчивости, соответствует годограф, проходящий через начало координат комплексной плоскости (кривая 3).

5.3. Критерий устойчивости Найквиста

Этот критерий позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по амплитудно-фазовой частотной характеристике (а.ф.х.) $W(j\omega)$ разомкнутой системы. Условие устойчивости замкнутой системы сводится к требованию, чтобы а.ф.х. разомкнутой системы не охватывала точку $(-1, j0)$. На рис. 5.4, а характеристики 1 и 4 соответствуют устойчивым системам, характеристика 3 - неустойчивой, а характеристика 2 - нахождению системы на границе устойчивости. Если, например, уменьшить коэффициент передачи в неустойчивой системе, то ее а.ф.х. сожмется к началу координат, в результате чего

система станет устойчивой. Наоборот, при увеличении коэффициента передачи характеристика устойчивой системы в конце концов охватит точку $(-1, j0)$ и система потеряет устойчивость.

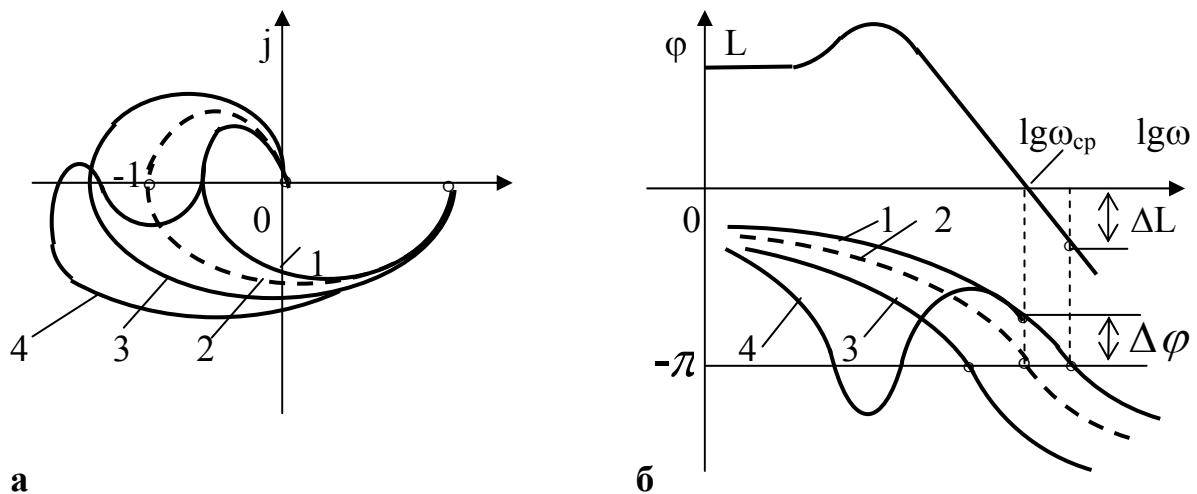


Рис. 5.4. Амплитудно-фазовые и логарифмические частотные характеристики устойчивых и неустойчивых САУ

Данная выше формулировка критерия Найквиста относится к системам, которые являются устойчивыми в разомкнутом состоянии. В случае одноконтурной системы устойчивость в разомкнутом состоянии всегда обеспечивается, если система состоит только из устойчивых звеньев. При наличии местных обратных связей должна быть еще проверена устойчивость образованных этими связями контуров. Для этого, в свою очередь, может быть применен критерий Найквиста или любой другой.

Для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, критерий Найквиста имеет такую формулировку: для устойчивости системы в замкнутом состоянии а.ф.х. разомкнутой системы должна охватывать точку $(-1; j0)$. При этом число пересечений ею отрицательной действительной полуоси левее точки $(-1; j0)$ сверху вниз должно быть на $k/2$ больше числа пересечений в обратном направлении, где k – число полюсов передаточной функции $W(p)$ разомкнутой системы с положительной действительной частью.

В соответствии с критерием Найквиста об устойчивости можно судить не только по а.ф.х., но и совместно по амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристикам разомкнутой системы. Обычно при этом пользуются логарифмическими характеристиками, что представляет большое удобство в силу простоты их построения. Согласно критерию Найквиста, для системы, устойчивой в разомкнутом состоянии, условием устойчивости ее в замкнутом состоянии является неохват а.ф.х. $W(j\omega)$ точки $(-1; j0)$. Последнее имеет место, если при частоте, на которой $A(\omega) = 1$, фаза $\varphi(\omega) > -180^\circ$, т.е. абсолютное значение фазы меньше 180° . Сказанное непосредственно следует

из рис. 5.4 а, б. Таким образом, применительно к логарифмическим характеристикам, если учесть при этом, что значению $A=1$ соответствует $L = 20\lg A = 0$, критерий устойчивости Найквиста для систем, устойчивых в разомкнутом состоянии, сводится к тому, что л.а.ч.х. должна пересечь ось абсцисс раньше, чем фаза окончательно перейдет за значение -180° . Или иными словами, на частоте среза ω_{cp} величина фазы должна быть меньше 180° . Изложенное иллюстрируется рис. 5.4, б. Здесь изображены л.а.ч.х. $L(\omega)$ и четыре варианта л.ф.х. $\varphi(\omega)$. В случае л.ф.х. 1 и 4 замкнутая система устойчива. Л.ф.х. 2 соответствует нахождению замкнутой системы на границе устойчивости, а л.ф.х. 3 - неустойчивой замкнутой системе.

Для астатических систем и систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, требования к л.а.ч.х. и л.ф.х. в отношении устойчивости можно сформулировать, исходя из соответствующих требований к а.ф.х.. В частности, для систем, неустойчивых в разомкнутом состоянии, условием устойчивости в замкнутом состоянии является следующее: при положительной л.а.ч.х. число пересечений л.ф.х. уровня -180° снизу вверх должно быть на $k/2$ раз больше числа пересечений в обратном направлении.

При оценке устойчивости систем одного факта устойчивости недостаточно. Необходимо еще оценить величину запаса устойчивости, т.е. степени удаленности системы от границы устойчивости. Система, которая теоретически является устойчивой, но находится очень близко к границе устойчивости, практически при ее реализации может оказаться неустойчивой как вследствие неточности математического описания системы, использованного при оценке устойчивости, так и из-за изменения во времени параметров системы. Основное распространение в качестве меры запаса устойчивости получили вытекающие из критерия Найквиста две величины - запас устойчивости по фазе $\Delta\varphi$ и запас устойчивости по амплитуде ΔL в логарифмическом масштабе. Эти величины показаны на рис. 5.4, б для системы с л.ф.х., представленной кривой 1. Аналогично они могут быть найдены и по а.ф.х.. Запас устойчивости по фазе определяется величиной, на которую должно возрасти запаздывание по фазе в системе на частоте среза ω_{cp} , чтобы система оказалась на границе устойчивости. Запас устойчивости по амплитуде определяется величиной допустимого подъема л.а.ч.х., при котором система окажется на границе устойчивости.

Таким образом, запас по амплитуде представляет собой запас по коэффициенту передачи k разомкнутой системы по отношению к его критическому по устойчивости значению. Рекомендуется выбирать запас устойчивости по фазе больше 30° , а запас устойчивости по амплитуде больше 6 дБ. Последнее соответствует примерно двойному запасу коэффициента передачи по устойчивости.

Доказательство критерия Найквиста

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$I + W(p) = 0, \quad (5.11)$$

в которое входит передаточная функция условно разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)}. \quad (5.12)$$

С учетом (5.12) уравнение (5.11) запишем в виде

$$\frac{[A(p) + B(p)]}{A(p)} = 0. \quad (5.13)$$

Обозначим корни числителя через $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$, а корни знаменателя уравнения (5.13) через $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$. Тогда уравнение (5.13) можно представить как

$$F(p) = \frac{A(p) + B(p)}{A(p)} = \frac{c_0(p - p_1)(p - p_2)\dots(p - p_n)}{a_0(p - \lambda_1)(p - \lambda_2)\dots(p - \lambda_n)}. \quad (5.14)$$

При переходе к частотной функции заменой $p \rightarrow j\omega$ получим

$$F(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{c_0(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)\dots(j\omega - p_n)}{a_0(j\omega - \lambda_1)(j\omega - \lambda_2)\dots(j\omega - \lambda_n)} = \frac{F_1(j\omega)}{F_2(j\omega)} \quad (5.15)$$

На основании принципа аргумента при изменении ω от 0 до $+\infty$ результирующая фаза будет равна сумме углов поворота всех векторов сомножителей числителя и знаменателя.

Для устойчивой замкнутой системы вектор числителя $F_1(j\omega)$ повернется при изменении ω от нуля до бесконечности на угол $\varphi_1 = n\pi/2$.

Если система устойчива в разомкнутом состоянии, то вектор $F_2(j\omega)$ также повернется на угол $\varphi_2 = n\pi/2$. Результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ будет равен разности углов поворота векторов $F_1(j\omega)$ и $F_2(j\omega)$. Тогда получим $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = n\pi/2 - n\pi/2 = 0$, т.е. приращение аргумента результирующего вектора равно нулю.

С другой стороны, на основании (5.11)

$$F(j\omega) = I + W(j\omega). \quad (5.16)$$

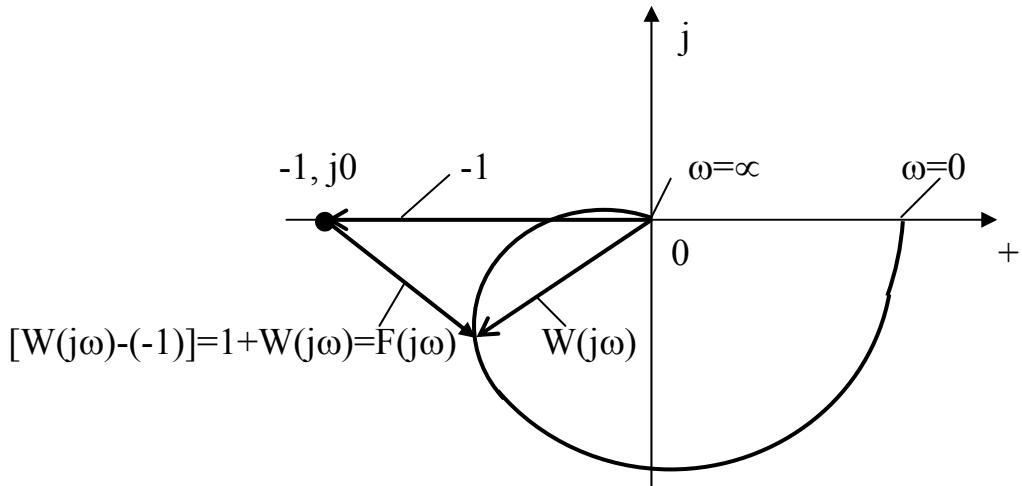


Рис. 5.5. К доказательству критерия Найквиста

Изобразим вектор $F(j\omega)$ совместно с вектором $W(j\omega)$ согласно уравнению (5.16) на комплексной плоскости а.ф.х. разомкнутой системы (рис. 5.5). Для устойчивой системы достаточно, чтобы а.ф.х. разомкнутой системы не охватывала точку с координатами $(-1; j0)$ (только тогда результирующий угол поворота $\varphi = 0$).

Для случая, когда система в разомкнутом состоянии является неустойчивой и имеет m правых корней, то результирующий угол поворота вектора $F(j\omega)$ будет

$$\varphi = n\pi/2 - [(n-m)\pi/2 - m\pi/2] = 2m\pi/2 = m\pi. \quad (5.17)$$

Это означает, что для устойчивой системы а.ф.х. должна охватывать точку $-(1; j0)$ $m/2$ раз.

5.4. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица

Применительно к задачам теории управления критерий Гурвица можно сформулировать так: *автоматическая система, которой соответствует характеристическое уравнение*

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

устойчива, если при $a_0 > 0$ положительны все определители $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ вида

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots & a_{2i-1} \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots & a_{2i-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots & a_{2i-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{i-2} & a_i \end{vmatrix} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (5.18)$$

Если хотя бы один из определителей (5.18), называемых определителями Гурвица, отрицателен, то система неустойчива.

Определители (5.18) составляют следующим образом: на главной диагонали записывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_1 до a_n (в порядке возрастания индекса), затем в каждом столбце выше диагональных коэффициентов записывают коэффициенты с последовательно возрастающими индексами, а ниже – с последовательно убывающими индексами; на место коэффициентов с индексами большими n или меньшими нуля проставляют нули. При этом каждая i -я матрица получается квадратной размером $i \times i$.

Так как последний столбец главного определителя Δ_n содержит всегда только один элемент a_n , отличный от нуля, то, согласно известному свойству определителей,

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1}. \quad (5.19)$$

Если главный определитель $\Delta_n = 0$, а все остальные определители положительны, то система находится на *границе устойчивости*. С учетом выражения (5.19) это условие распадается на два:

$$a_n = 0 \text{ и } \Delta_{n-1} = 0. \quad (5.20)$$

Условию $a_n = 0$ соответствует один нулевой корень, т.е. апериодическая граница устойчивости, а условию $\Delta_{n-1} = 0$ – пара мнимых корней, т.е. колебательная граница устойчивости.

Как показывает анализ, для устойчивости систем не выше четвертого порядка необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и определитель Δ_{n-1} были положительными.

Критерий Гурвица следует применять для анализа систем не выше пятого порядка. При более высоком порядке систем вычисление определителей становится затруднительным без применения средств вычислительной техники.

Пример 1. Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(p) = a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 2p^3 + 6p^2 + 10p + 10 = 0.$$

Определить устойчивость системы.

Решение. Все коэффициенты этого характеристического уравнения положительны, а определитель Гурвица Δ_2 с четным индексом равен

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 6 \cdot 10 - 2 \cdot 15 = 30 > 0.$$

Система устойчива.

5.5. Построение областей устойчивости

Определение областей устойчивости. Пусть все коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0 \quad (5.21)$$

заданы, кроме одного, например, a_1 . Допустим, что коэффициент a_1 изменяется от нуля до бесконечности. Будем придавать этому коэффициенту ряд значений и определять при этом значения всех n корней характеристического уравнения. Если на некоторой вещественной полуоси отмечать для каждого значения a_1 точку, которой соответствует определенное распределение корней на комплексной плоскости, то выбранная полуось может быть разбита на ряд отрезков в зависимости от того, все или не все корни левые. На стыках таких отрезков один или несколько корней находятся на мнимой оси (рис. 5.6,а).

Если в уравнении изменяются два коэффициента, то на плоскости этих коэффициентов, вычисляя все корни уравнения, можно выделить области устойчивости и неустойчивости (рис. 5.6,б).

Аналогично можно исследовать совокупность нескольких коэффициентов характеристического уравнения. Наиболее просто область устойчивости выделяется для уравнения $p^2 + a_1 p + a_2 = 0$: $a_1 > 0, a_2 > 0$ (рис. 5.6,в).

Понятие о D-разбиении пространства коэффициентов характеристического уравнения. Если при значениях каких-либо двух коэффициентов характеристического уравнения в плоскости корней имеется k корней левых и $(n-k)$ корней правых, то, изменяя значения коэффициентов (например, a_0 и a_n), получим определенную кривую на плоскости коэффициентов, ограничивающую область, каждая точка которой характеризует указанное расположение корней относительно мнимой оси. Эту область обозначим $D(k; n-k)$ (рис. 5.7).

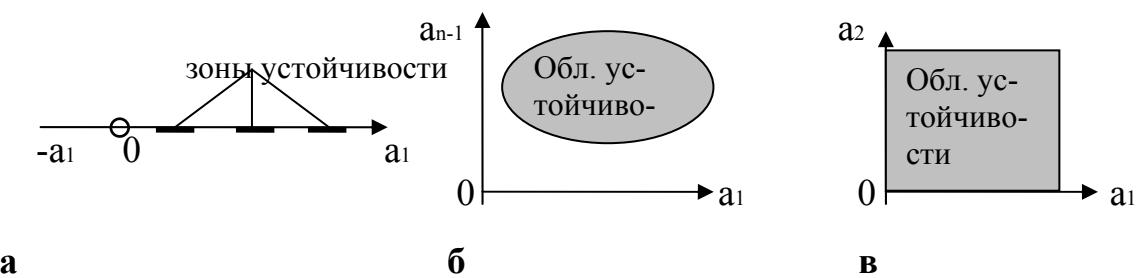


Рис. 5.6. Зоны и области устойчивости

Число корней может иметь любое целое значение, поэтому в плоскости коэффициентов можно указать области $D(k; n-k)$, соответствующие разным значениям k . Например, при степени $n=4$ можно рассматривать области

$D(0; 4); D(1; 3); D(2; 2); D(3; 1); D(4; 0)$. Из этих областей только последняя является областью устойчивости.

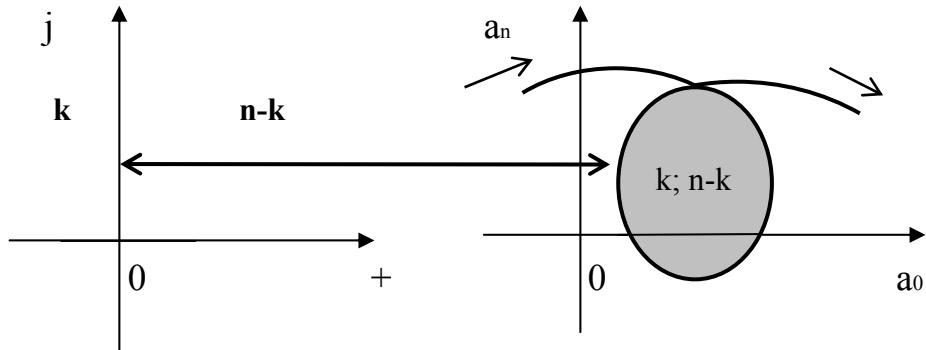


Рис. 5.7. Области распределения корней

Разбиение пространства коэффициентов на области устойчивости и неустойчивости называется *D-разбиением*.

Мнимая ось в плоскости корней есть отображение границы D-разбиения в плоскости коэффициентов (рис. 5.7). Чтобы определить границу D-разбиения, надо заменить в характеристическом уравнении p на $j\omega$ и изменять частоту от минус бесконечности до плюс бесконечности.

D-разбиение плоскости одного комплексного параметра. Если требуется оценить влияние на устойчивость только одного параметра, а значения остальных параметров заданы, целесообразно ввести вместо этого параметра комплексную величину, вещественная часть которой равна исследуемому параметру. Пусть параметр τ входит в характеристическое уравнение

$$S(p) + \tau R(p) = 0, \text{ или } \tau = -\frac{S(p)}{R(p)} \quad (5.15)$$

В качестве τ может быть принята постоянная времени T или коэффициент усиления k любого звена системы. Полагаем временно, что τ - комплексное число. При подстановке $p \rightarrow j\omega$ из (5.15) получим

$$\tau = \tau(j\omega) = \frac{-S(j\omega)}{R(j\omega)} = x(\omega) + jy(\omega). \quad (5.16)$$

Придавая различные значения ω , строим кривую, отображающую мнимую ось комплексной плоскости корней, т.е. границу D-разбиения (рис. 5.8).

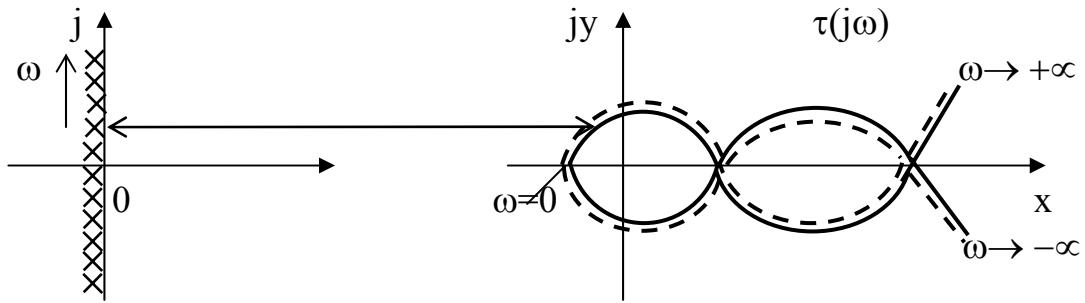


Рис. 5.8. Граница D-разбиения

Кривую достаточно построить в пределах $0 < \omega < +\infty$, а затем дополнить зеркальным отображением. Далее необходимо наметить предполагаемую область устойчивости $D(n; 0)$. Для этого применяют правило штриховки: границей в плоскости корней является мнимая ось, и при движении по ней от $-\infty$ до $+\infty$ область корней устойчивой системы располагается слева. Соответственно этому в плоскости $\tau(j\omega)$ на D-кривой необходимо отметить направление движения в диапазоне частот $-\infty < \omega < +\infty$ и также заштриховать левую часть кривой. Так как τ по физическому смыслу есть вещественная величина, то рассматриваются лишь те отрезки вещественной оси, которые лежат в области, окружённой внутренней штриховкой.

Для каждой области указывают распределение корней. Для этого полагают $\tau=0$ и находят корни характеристического уравнения $S(p) = 0$. Полученное распределение корней $D(k; n-k)$ считают заданным и наносят на плоскость $\tau(j\omega)$ в области начала координат. Если в плоскости $\tau(j\omega)$ при движении от одной точки к другой пересекается D-кривая и при этом происходит переход с заштрихованной стороны на незаштрихованную, то в плоскости корней один корень пересекает мнимую ось. Если штриховка двойная (например, в точке пересечения кривых), то мнимую ось пересекают два корня. Так находится область плоскости $\tau(j\omega)$, соответствующая расположению всех корней в левой полуплоскости.

Далее выбирают из этой области какое-либо значение $\tau_0 = x_0$ и проверяют устойчивость по любому критерию.

Пример 2. Построить кривую D-разбиения для коэффициента усиления k разомкнутой системы. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$0.0001 p^5 + 0.011 p^4 + 0.188 p^3 + 0.98 p^2 + 1.8 p + 1 + k = 0$$

Изменяя ω от 0 до $+\infty$, определяем $x(\omega)$ и $y(\omega)$ и строим D-кривую (рис. 5.9). Определим из исходного уравнения k , заменим p на $j\omega$ и выделим вещественную и мнимую части:

$$k = -(0.0117\omega^4 - 0.98\omega^2 + 1) - j(0.0001\omega^5 - 0.188\omega^3 + 1.8\omega) = x(\omega) + jy(\omega).$$

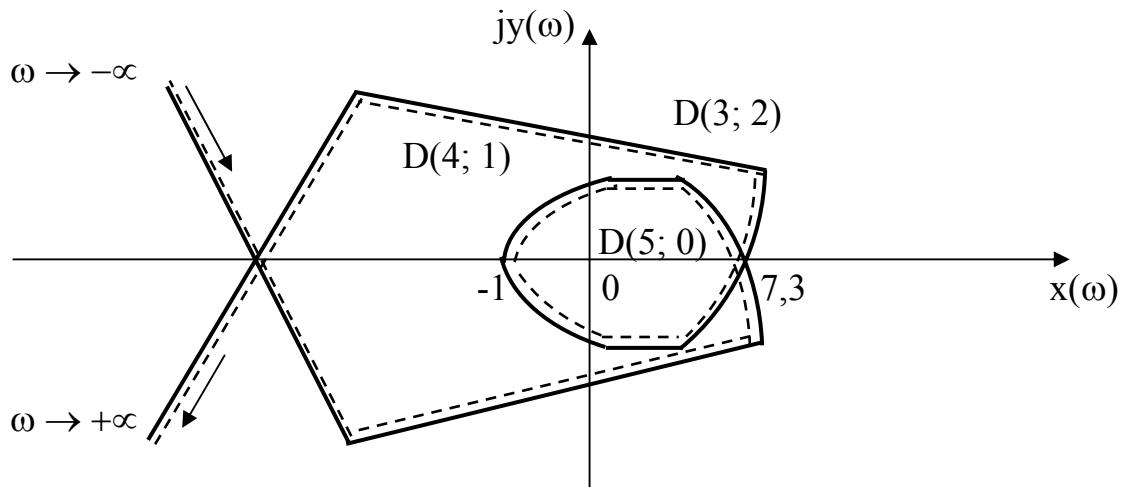


Рис. 5.9. D-кривая

В области с началом координат для любого значения k $[-1; 7,3]$ устанавливаем по любому из критериев устойчивости, что система устойчива. При переходе через линию с одинарной штриховкой прибавляется один правый корень.

ГЛАВА 6

ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Понятие качества процесса управления

Качество процесса управления определяется поведением автоматической системы при переходе с одного режима работы на другой. Различают следующие основные показатели качества процесса управления: колебательность переходного процесса, максимальное отклонение (перерегулирование) управляемой переменной от заданного значения, точность, время переходного процесса.

Изменение выходной координаты $y(t)$ в переходном режиме называют *переходным процессом*. Переходный процесс определяется решением дифференциального уравнения в виде

$$y(t) = y_{np}(t) + y_{ce}(t), \quad (6.1)$$

где $y_{np}(t)$ – принужденная составляющая, обусловленная отработкой задающего воздействия, $y_{ce}(t)$ – переходная (свободная) составляющая, обусловленная отработкой системой ненулевых начальных условий.

В общем случае этот процесс представляет собой сложное движение, характер которого зависит от поведения переходной составляющей и от формы начального участка принужденной составляющей. Для практики важно знать, как быстро система входит в установившийся режим, как велики перерегулирования во время переходного процесса и т.д., т.е. в понятие качества САУ нужно включить *качество переходных процессов*.

После окончания переходных процессов в системе устанавливается режим, когда с той или иной степенью точности выходная координата следует за задающим воздействием. На характер изменения выходной координаты в установившемся режиме существенное влияние оказывает форма воздействий. Иными словами, качество одной и той же системы зависит от характера приложенных к ней воздействий. Качество системы в установившемся режиме зависит также от ее структуры и параметров, поэтому, чтобы характеризовать свойства системы, в общее понятие качества надо включить и оценку *качества установившегося режима*.

Методы оценки качества процесса управления могут быть самыми различными, но определяются они в основном тремя факторами. Во-первых, они зависят от выбора критерия качества (когда систему считать «хорошой», а когда «плохой»); во-вторых, от исследуемого режима работы системы (в переходном режиме ошибки управления намного больше, чем в установившемся, а значит, и методы исследования должны быть разные); в-третьих, от характеристик воздействий.

Вследствие неидеальности реальной САУ ухудшается ее качество, т.е. реальная выходная координата $y(t)$ всегда отличается от желаемой $y_{жe}(t)$. Ошибка управления $e(t) = y_{жe}(t) - y(t)$ входит в некоторый функционал $\psi[e(t)]$, называемый *оценкой точности*. Функционал может иметь самую разнообразную форму, выбор которой зависит от смысла задачи и метода ее решения. Наиболее простое значение функционала: $\psi[e(t)] = |e(t)|$.

Оценки качества переходных процессов подразделяются на прямые и косвенные. На рис. 6.1 приведена классификация методов исследования переходных процессов.

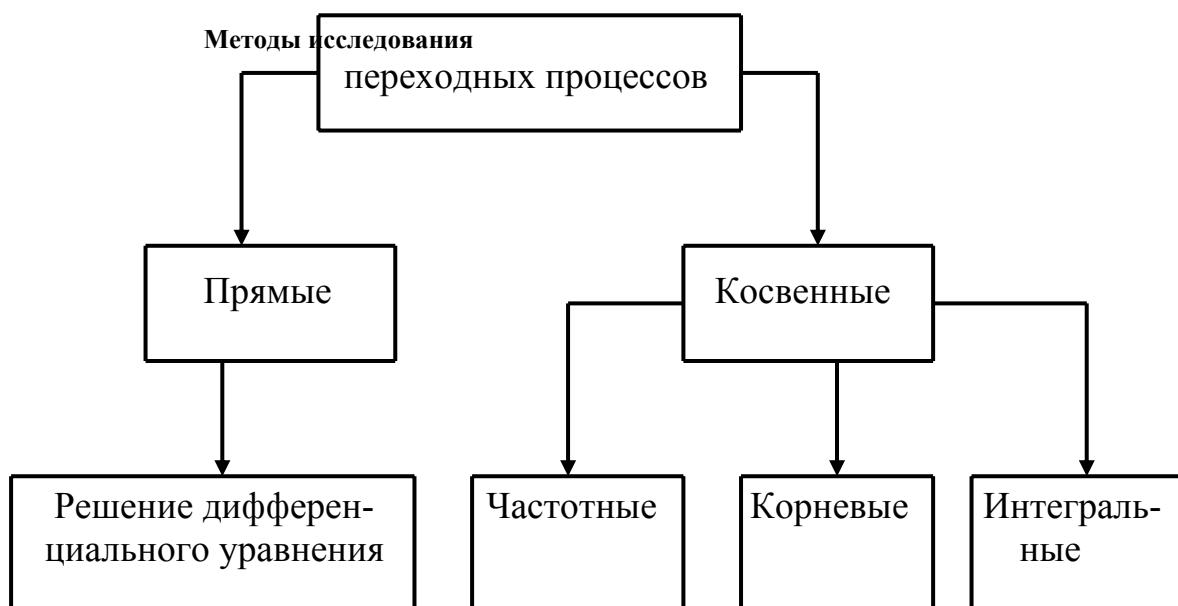


Рис. 6.1. Классификация методов исследования переходных процессов

6.2. Классификация внешних воздействий. Требования, предъявляемые к качеству процесса управления

Изменение режима работы автоматической системы возникает в результате прикладываемых к ней внешних воздействий. При этом возможны различные режимы работы системы в зависимости от заданного закона изменения выходной переменной и внешних возмущающих воздействий. Внешнее возмущение в виде переменной нагрузки наиболее существенно для систем стабилизации управляемой переменной на заданном уровне. Основная задача при этом состоит в том, чтобы создать систему, которая не реагировала бы на это воздействие (инвариантная задача).

Внешнее воздействие на входе системы наиболее характерно для программных и следящих систем. При этом надо так выбрать параметры и структуру системы, чтобы это воздействие воспроизводилось с минимальной

ошибкой (ковариантная задача). В общем случае все эти воздействия на систему являются сложной функцией времени.

При исследовании качества процесса управления обычно принято рассматривать несколько типичных воздействий в виде следующих функций: единичной скачкообразной, импульсной, гармонической и соответствующей изменению сигнала с постоянной скоростью. Наиболее распространенным является воздействие в виде скачкообразной функции. Современные методы анализа качества процесса управления можно разделить на две основные группы. К первой можно отнести прямые методы оценки качества по кривой переходного процесса (методы интегрирования дифференциальных уравнений автоматической системы), ко второй - косвенные методы (критерии качества). Прямые методы требуют решения дифференциальных уравнений; косвенные методы позволяют, не решая дифференциальных уравнений, определять некоторые показатели качества процесса. Чаще применяются косвенные методы: распределение полюсов и нулей; интегральные оценки; частотные.

Основными параметрами качества процесса управления являются время переходного процесса t_p , заданное значение h_y , ошибка $e(t)$ и максимальное превышение h_m управляемой переменной.

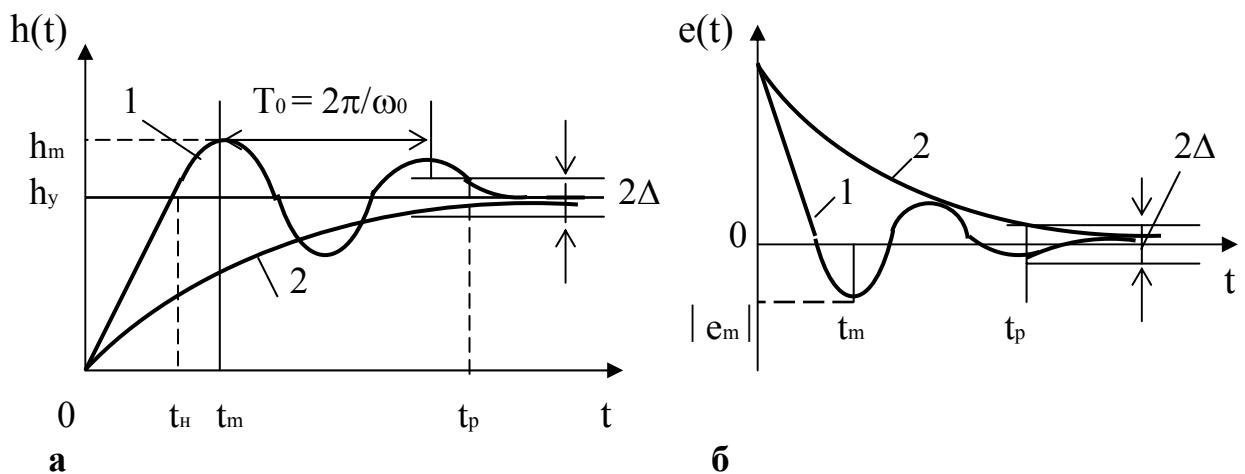


Рис. 6.2. Переходные характеристики:
а – для выходной координаты $y(t)$, б - для ошибки $e(t)$

6.3. Характер затухания переходного процесса

В зависимости от характера затухания при скачкообразном воздействии переходный процесс может быть монотонным, апериодическим или колебательным (рис. 6.2). Процесс является монотонным, если отклонение управляемой переменной от нового установившегося значения при $t \rightarrow \infty$ только уменьшается (кривая 2). Процесс считается апериодическим, если име-

сто не более одного перерегулирования относительно начального и конечного значений управляемой переменной. Процесс называется колебательным, если управляемая переменная в течение переходного процесса несколько раз отклоняется в обе стороны от конечного установившегося значения (кривая 3).

В некоторых случаях необходимо иметь суждение о быстроте затухания переходного процесса. В случае монотонного и апериодического процессов быстрота затухания характеризуется абсолютным значением наименьшего вещественного корня характеристического уравнения данной системы. Для оценки быстроты затухания колебательного процесса используют логарифмический декремент затухания, который равен натуральному логарифму отношения амплитуд двух последовательных экстремумов кривой затухания (рис. 6.3).

Если затухание колебательного процесса происходит по закону

$$x_{\text{вых}} = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t + \psi),$$

где α - вещественная часть комплексного корня, то логарифмический декремент затухания определяется как

$$d = \ln \frac{x_{1,0}}{x_{2,0}} = \ln \frac{A \cos \psi}{A \cos \psi} e^{\alpha T} = \alpha T.$$

Колебания, возникающие в системе, приводят к износу механизмов и часто оказываются нежелательными по техническим соображениям, поэтому число колебаний, возникающих в системе во время переходного процесса, не должно быть слишком велико. В связи с этим вводится понятие о степени колебательности μ , которая характеризуется числом колебаний, возникающих в системе за время переходного процесса.

Поскольку колебательность переходного процесса обусловлена наличием комплексного корня $p_k = -\alpha_k \pm j\omega_k$ в характеристическом уравнении, то степень колебательности (для ближайшего к мнимой оси корня)

$$\mu_k = \omega_k / \alpha_k. \quad (6.2)$$

Выражение (6.2) является общим. Например, для вещественного корня $\omega_k=0$, поэтому $\mu_k=0$; для чисто мнимого корня $\alpha_k=0$, поэтому $\mu_k=\infty$.

Значение степени колебательности μ может быть использовано для приближенной оценки перерегулирования x_m . При этом установлено, что между ними существует неравенство

$$x_m \leq e^{-\pi/\mu},$$

где перерегулирование определено в относительных единицах для случая нулевых начальных условий переходного процесса.

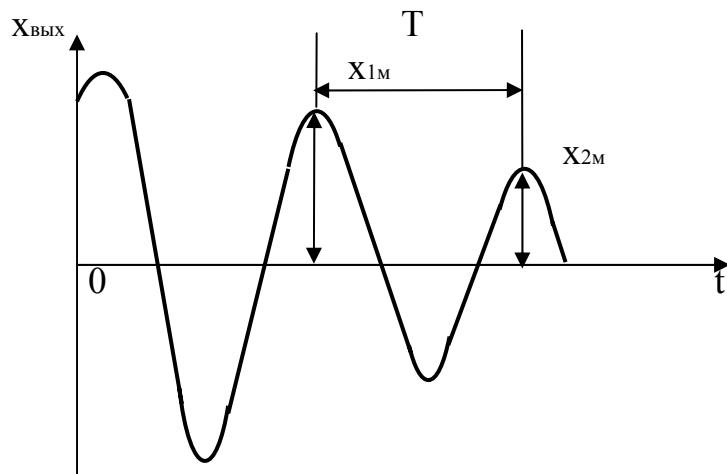


Рис. 6.3. Затухание колебательного переходного процесса

Для оценки колебательности переходного процесса широко используются частотные характеристики.

6.4. Максимальное отклонение управляемой переменной. Перерегулирование. Время переходного процесса

Если переходные процессы представляют собой реакцию на скачкообразные воздействия, то их подразделяют на колебательные процессы (кривая 1 на рис. 6.2) и процессы без перерегулирования (кривая 2).

Назовем прямые оценки качества переходного процесса (рис. 6.2.).

1. Время регулирования t_p – минимальное время, по истечении которого переходная характеристика будет оставаться близкой к установившемуся значению с требуемой точностью, т.е. выполняются неравенства $|e(t)| \leq \Delta$ или $|h(t) - h_y| \leq \Delta$, где Δ – постоянная, заранее оговариваемая величина, которая задается в процентах от h_y (для статических систем $h_y = K/(1+K)$, а для астатических $h_y = 1$). Обычно принимают $\Delta = 5\%$.
2. Перерегулирование H_m – максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения, выраженное в относительных единицах или процентах $H_m = (h_m - h_y)/h_y \cdot 100\%$ или $H_m = |e_m|/h_y \cdot 100\%$.
3. Время достижения первого максимума t_m .
4. Время нарастания переходного процесса t_n – абсцисса первой точки пересечения кривой $h(t)$ с уровнем установившегося значения h_y или кривой $e(t)$ с осью абсцисс.
5. Частота колебаний $\omega = 2\pi / T_0$, где T_0 – период колебаний для колебательных процессов.
6. Число колебаний N , которое имеет $h(t)$ за время t_p .

Для монотонных процессов основным показателем является время регулирования.

6.5. Корневые оценки качества

Корневые оценки основаны на зависимости характера переходного процесса от распределения нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы.

Переходная характеристика может быть вычислена по формулам разложения:

$$h(t) = \frac{K(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{K(p_k)}{p_k D'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (6.3)$$

где p_k – корни (полюсы) характеристического уравнения замкнутой системы $D(p)=0$, n – число корней. Из выражения видно, что на характер $h(t)$ влияют и числитель $K(p)$, и знаменатель $D(p)$ передаточной функции. Однако, если числитель $K(p)$ представляет собой постоянную величину, то оценка по корням характеристического уравнения допустима.

Для приближенной оценки качества надо на плоскости корней выделить ту область, в которой располагаются корни (рис. 6.3).

О качестве переходного процесса приближенно можно судить по *степени устойчивости* α_{min} , под которой понимают расстояние от мнимой оси до ближайшего корня или ближайшей пары комплексных корней. Степень устойчивости характеризует *пределное быстродействие* системы, так как вещественная часть корня α_{min} принадлежит той компоненте переходной характеристики, которая затухает медленнее всех остальных. Время переходного процесса $t_{per} \cong 3/\alpha_{min}$, если ближайший к мнимой оси корень – вещественный и не превосходит этого значения, если ближайшей к мнимой оси является пара комплексных корней.

Под *колебательностью* системы μ понимают

$$\mu = \operatorname{tg} \varphi = (\omega / \alpha)_{max}. \quad (6.4)$$

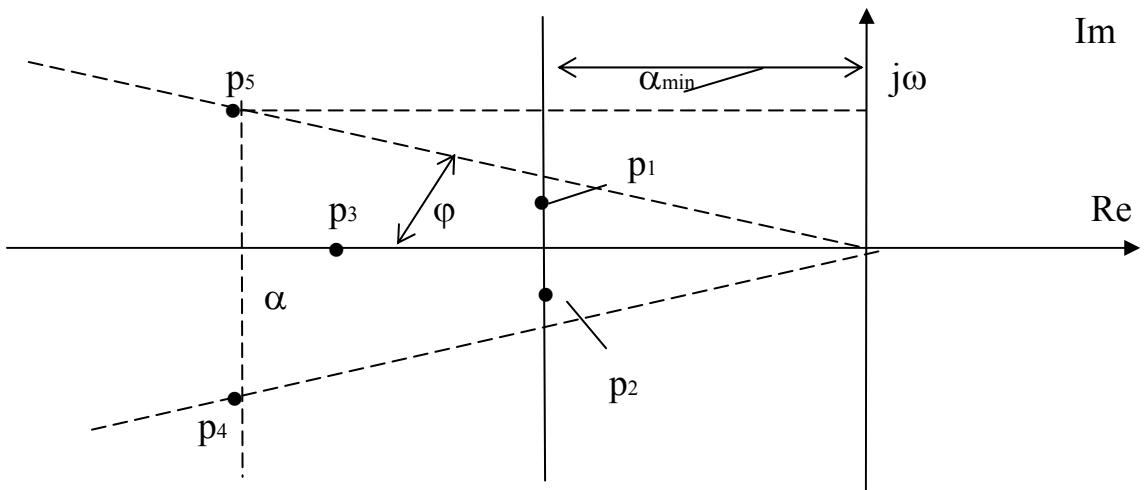


Рис. 6.4. Пример распределения корней на комплексной плоскости

6.6. Оценки качества САУ по частотным характеристикам

Математической основой частотного метода анализа качества автоматических систем является преобразование Фурье. Этот метод сочетает аналитические вычисления и графические построения.

Так как при анализе качества управления применяются те же частотные характеристики, что и при исследовании устойчивости, то частотный метод представляет собой единый метод анализа динамики автоматических систем. При этом используется аналитическая зависимость между переходной и частотной функциями замкнутой системы.

Переходная характеристика замкнутой САУ может быть определена по вещественной частотной характеристике (ВЧХ) $P(\omega)$ из выражения

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (6.5)$$

Для того чтобы косвенно (без построения кривой процесса) судить о качестве переходного процесса, надо рассмотреть свойства ВЧХ и соответствующих им переходных характеристик, устанавливаемые этой формулой. Приведем основные свойства:

1. Если ВЧХ $P(\omega)$ можно представить суммой $\sum P_i(\omega)$, то и $h(t)$ может быть представлена суммой составляющих $\sum h_i(t)$.
2. Если умножить $P(\omega)$ на постоянное число a , то соответствующие значения $h(t)$ тоже умножаются на это число.
3. Если аргумент ω в выражении ВЧХ умножить на постоянное число a , то аргумент в соответствующем выражении переходной характеристики делится на это число, т.е.

$$h\left(\frac{t}{a}\right) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(a\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (6.6)$$

Отсюда следует, что, чем более широкополосна ВЧХ, тем быстрее $h(t)$ достигнет установившегося значения.

4. Начальное значение ВЧХ равно конечному значению $h(t)$.

5. Если у ВЧХ есть разрыв непрерывности ($P(\omega_l) = \infty$, как это показано на рис. 6.5,а, то характеристическое уравнение имеет мнимый корень $p_i = \pm j\omega_l$ и в системе устанавливаются незатухающие колебания.

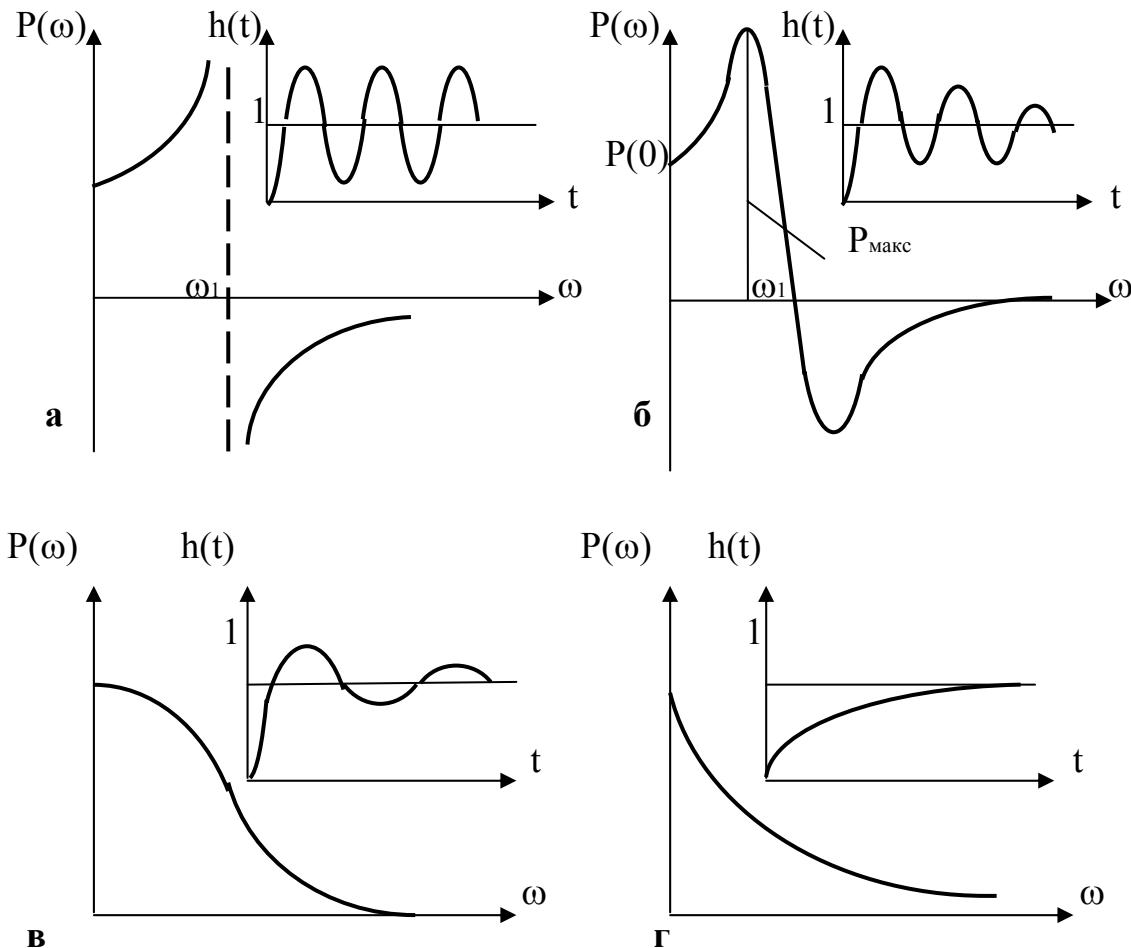


Рис. 6.5. Влияние формы ВЧХ на переходную характеристику

6. Высокий и острый пик ВЧХ, за которым $P(\omega)$ переходит через нуль при частоте, близкой к ω_l , соответствует медленно затухающим колебаниям (рис. 6.5,б).
7. Чтобы у $h(t)$ было перерегулирование, не превышающее 18%, ВЧХ должна быть положительной невозрастающей функцией частоты ω (рис. 6.5,в).
8. Чтобы $h(t)$ была монотонной, ВЧХ должна быть положительной непрерывной функцией частоты с отрицательной убывающей по абсолютной величине производной (рис. 6.5,г).

9. Максимальное значение перерегулирования определяется по выражению (рис. 6.5,б)

$$H_{\max} = \frac{1,18P_{\max} - P(0)}{P(0)}. \quad (6.7)$$

О качестве переходного процесса можно судить также по виду амплитудно-частотной характеристики $A(\omega)$ замкнутой системы. Пик характеристики $A(\omega)$ является косвенной оценкой величины перерегулирования и колебательности процесса. При этом отношение максимума характеристики $A(\omega)$ к значению амплитуды при $\omega=0$ называется показателем колебательности M .

Обычно принимается, что при $\omega=0$ значение амплитудной характеристики замкнутой системы $A(0)=1$. Тогда показатель колебательности определяется в относительных единицах. Частота, при которой $A(\omega)$ имеет максимум, называется собственной частотой ω_c . Если характеристика $A(\omega)$ имеет пик, то точка пересечения кривой с линией $A(0)$ определяет частоту среза ω_c замкнутой системы. Эта частота косвенным путем характеризует время переходного процесса. Чем больше частота среза, тем меньше время t_p . При этом время переходного процесса системы $t_p \approx \pi/\omega_c$.

6.7. Интегральные оценки качества

Интегральные оценки качества представляют собой интегралы по времени (в пределах от 0 до ∞) от некоторой функции управляемой переменной $X(t)$ или сигнала ошибки $\Delta X(t)$:

$$I = \int_0^{\infty} f_0 [X(t), t] dt. \quad (6.8)$$

Подынтегральная функция f_0 выбирается таким образом, чтобы интеграл (6.8) лучше характеризовал качество системы. Чтобы интеграл был сходящимся, в функцию f_0 вводят не абсолютное значение $X(t)$, а ее отклонение от установленных значений.

Простейшей интегральной оценкой является линейная интегральная оценка:

$$I_1 = \int_0^{\infty} [X(\infty) - X(t)] dt = \int_0^{\infty} \Delta X dt, \quad (6.9)$$

которая равна площади, заключенной между прямой $X(\infty)$ и кривой $X(t)$ (рис. 6.6, а, б). Интегральная оценка (6.9) учитывает как величину динамических отклонений, так и длительность их существования. Поэтому, чем меньше оценка, тем лучше качество процесса управления.

На рис. 6.6, а показан переходный процесс, вызванный возмущением, а на рис. 6.6, б – изменением задающего воздействия.

Если выбрать в качестве целевой функции при оптимизации САУ по быстродействию интегральную оценку, то настроочные параметры регулятора

(варируемого звена) необходимо изменять таким образом, чтобы интегральная оценка была минимальна, т.е. $I \rightarrow \min$. После такой процедуры регулятор будет иметь оптимальные настроочные параметры. Абсолютное значение интегральной оценки не связано с числовыми показателями качества.

Недостатком линейной интегральной оценки I_1 является то, что ее можно применять лишь для заведомо неколебательных (апериодических) переходных процессов. Интеграл (6.2), вычисленный для знакопеременной кривой (рис. 6.6,в), будет существенно меньше интеграла, вычисленного для апериодической кривой, хотя качество переходного процесса в этом случае будет значительно хуже. Это связано с тем, что значение интеграла зависит от знаков площадей подынтегральной функции. В предельном случае ухудшения качества переходного процесса, когда он будет иметь незатухающий колебательный характер, I_1 уменьшится до нуля.

В связи с этим для колебательных переходных процессов применяют такие интегральные оценки, знакопеременность подынтегральной функции которых тем или иным способом устранена. Таким свойством обладает квадратичный интегральный критерий

$$I_2 = \int_0^{\infty} (\Delta X)^2 dt , \quad (6.10)$$

в котором знаки площади не принимаются во внимание.

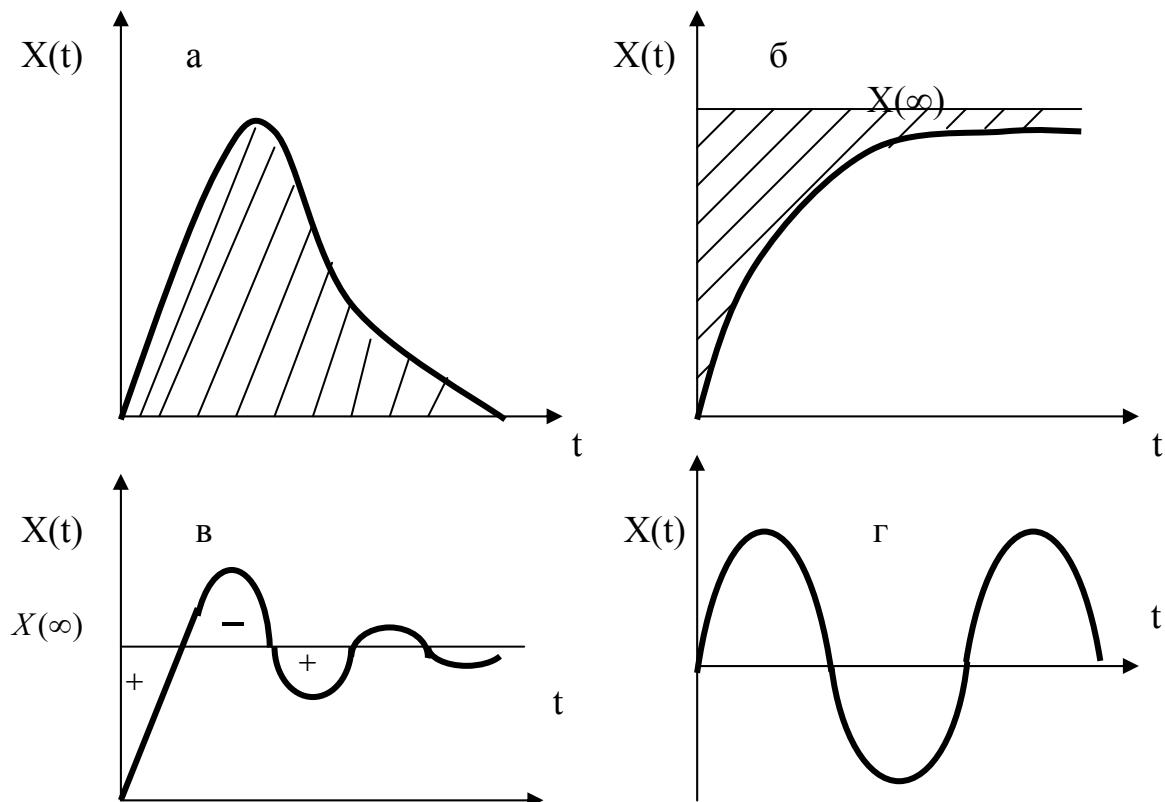


Рис. 6.6. Интегральные оценки качества переходных процессов

Этот критерий является наиболее широко используемым интегральным критерием. Однако выбор варьируемых параметров по минимуму I_2 дает колебательный переходный процесс обычно с довольно большой колебательностью. Поэтому в тех случаях, когда такой процесс неприемлем, переходят к интегральному критерию

$$I_3 = \int_0^{\infty} [(\Delta X)^2 + a(\frac{d\Delta X}{dt})^2] dt . \quad (6.11)$$

Интеграл I_3 состоит из двух частей, т.е. может быть представлен в виде суммы двух интегралов (аддитивная форма представления интеграла). Первый является прежним интегралом I_2 от $(\Delta X)^2$, а второй – интегралом от $(\Delta X')^2$. Если при одном и том же значении площади переходного процесса, т.е. неизменной величине первого интеграла, замедлить (растянуть) переходный процесс во времени, то соответственно уменьшится второй интеграл от квадрата скорости изменения X . Поэтому при вариации некоторых параметров системы минимум интеграла I_3 по сравнению с интегралом I_2 будет при более медленном и менее колебательном процессе. При этом замедление процесса будет тем больше, чем больше взята величина a , определяющая относительный вес составляющих интеграла I_3 от ΔX и $\Delta X'$.

Имеются еще более сложные интегральные критерии качества, содержащие вторую и следующие производные от ΔX . Их применение приближает переходный процесс соответственно к кривой второго и следующих порядков.

Если представить разность под знаком интеграла (6.9) в виде

$$X(\infty) - X(t) = X_s - \xi(\infty) - X(t) = \xi(t) - \xi(\infty) = \xi_n(t) , \quad (6.12)$$

где $\xi(\infty)$ – установившееся значение сигнала ошибки;

$\xi(t)$ – динамическая составляющая сигнала ошибки;

$\xi_n(t)$ – переходная составляющая сигнала ошибки;

X_s – заданное значение регулируемой величины,

то интегральную оценку (6.9) можно определить в таком виде:

$$Q_a = \int_0^{\infty} \xi_n(t) dt = \int_0^{\infty} [\xi(t) - \xi(\infty)] dt . \quad (6.13)$$

Для колебательных переходных процессов применяется модульная интегральная оценка

$$Q_m = \int_0^{\infty} |\xi_n(t)| dt \quad (6.14)$$

и ее модификация

$$Q_m^I = \int_0^{\infty} t |\xi_n(t)| dt .$$

Квадратичная оценка

$$Q_{\text{кв}} = \int_0^{\infty} \xi_n^2(t) dt \quad (6.15)$$

так же, как и линейная, учитывает величину и длительность отклонений.

6.8. Связь показателей качества с параметрами приближенной модели

Приближенную оценку прямых показателей качества σ и t_n (без вычисления и построения переходной характеристики) удобно осуществлять на основе гипотезы об эквивалентности динамических свойств замкнутой системы регулирования произвольного порядка свойствам колебательного звена второго порядка.

Действительно, простейшей моделью, пригодной для приближенного описания динамики одноконтурной системы и приближенной оценки показателей качества процесса управления по основному каналу $x_3 - x$, может служить инерционное звено второго порядка:

$$W_m(p) = k / (T^2 p^2 + 2\xi T p + 1), \quad (6.16)$$

обладающее колебательными свойствами ($\xi \leq 0.7$) и передаточным коэффициентом $k=1$. Приближенная замена реальной САУ, у которой а.ч.х. $|\Phi_c(j\omega)|$ имеет, как правило, характерный резонансный пик при частоте ω_p , заключается в подборе T и ξ модели 6.16) таким образом, чтобы обеспечить в существенном диапазоне частот $0 \leq \omega \leq 2\omega_p$ наиболее близкое совпадение а.ч.х. системы и модели, т.е., чтобы

$$|\Phi_c(j\omega)| \approx |W_m(j\omega)|.$$

При этом достаточно обеспечить совпадение трех параметров а.ч.х.: начальных значений $|\Phi_c(j0)| \approx |W_m(j0)|$, резонансных частот $\omega_{pc} \approx \omega_{pm}$ и максимальных значений $|\Phi_c(j\omega_p)| \approx |W(j\omega_p)|$, определяющих частотный показатель колебательности.

Очевидно, что при указанных условиях $h_c(t) \approx h_m(t)$. С помощью модели (6.16) удается любой реальный контур регулирования, представляющий собой в общем случае сложную динамическую систему высокого порядка, описать достаточно простыми формулами. Так, а.ч.х. замкнутого исходного контура

$$A_c(\omega) = |\Phi_c(j\omega)| \approx A_m(\omega) = 1 / \sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}, \quad (6.17)$$

а переходная функция

$$h_c(t) \approx h_m(t) = 1 - (\sqrt{1 - \xi^2})^{-1} e^{-\xi t/T} \sin\left(\sqrt{1 - \xi^2} \frac{t}{T} + \arccos \xi\right). \quad (6.18)$$

В выражениях (6.17) и (6.18) входят лишь два числовых параметра T и ξ , которые связаны с частотами незатухающих (ω_0), затухающих (ω_3) и резонансных (ω_p) колебаний и с частотным показателем колебательности M известными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= 1/T; \quad \omega_3 = \sqrt{1 - \xi^2} / T; \quad \omega_p = \sqrt{1 - \frac{2\xi^2}{(6.19)}} / T \\ M &= A(\omega_p) / A(0) = 1 / 2\xi\sqrt{1 - \xi^2}. \end{aligned} \right\}$$

По модельной переходной характеристике (6.18) можно получить аналитические выражения для двух главных показателей качества: перерегулирования (%):

$$\sigma = e^{-\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2}} \cdot 100 \% \quad (6.20)$$

и длительности переходного процесса:

$$t_n \leq T \ln 20 / \xi \approx 2T / \xi. \quad (6.21)$$

В диапазоне реальных значений $0,25 < \xi < 0,55$ можно указать набор приближенных формул:

(6.22)

$$\sigma \approx 0,1/\xi; \quad t_n \approx 3T/\xi; \quad M \approx 0,545/\xi; \quad \omega_p / \omega_0 \approx 1,2 - \xi.$$

Так как при синтезе САУ всегда стремятся показатели замкнутой системы оценивать по характеристикам ее разомкнутого контура, которые более просты и непосредственно выбираются разработчиком, то для модели (6.16) замкнутой системы найти соответствующую модель разомкнутого контура. Нетрудно убедиться, что простейшим разомкнутым контуром, который при замыкании образует колебательное звено (6.16), является реальное интегрирующее звено:

$$W_{pk}(p) = k / p(T_{01}p + 1). \quad (6.23)$$

Действительно, передаточная функция замкнутой системы (рис. 6.7,а) по основному каналу

$$\Phi_m(p) = \frac{W_{pk}(p)}{1 + W_{pk}(p)} = \frac{k}{T_{01}p^2 + p + k} = \left(\frac{T_{01}}{k} p^2 + \frac{1}{k} p + 1 \right)^{-1}, \quad (6.24)$$

где k – передаточный коэффициент разомкнутого контура; T_{01} – постоянная времени инерционного контура (обычно объекта).

Очевидно, что модель замкнутой системы по каналу задания будет эквивалентна колебательному звену (6.16), если параметры разомкнутого контура связаны с параметрами этого звена следующими соотношениями:

$$T_{01} / k = T^2; 1 / k = 2\xi T; kT_{01} = 1 / 4\xi^2; T_{01} = T / 2\xi. \quad (6.25)$$

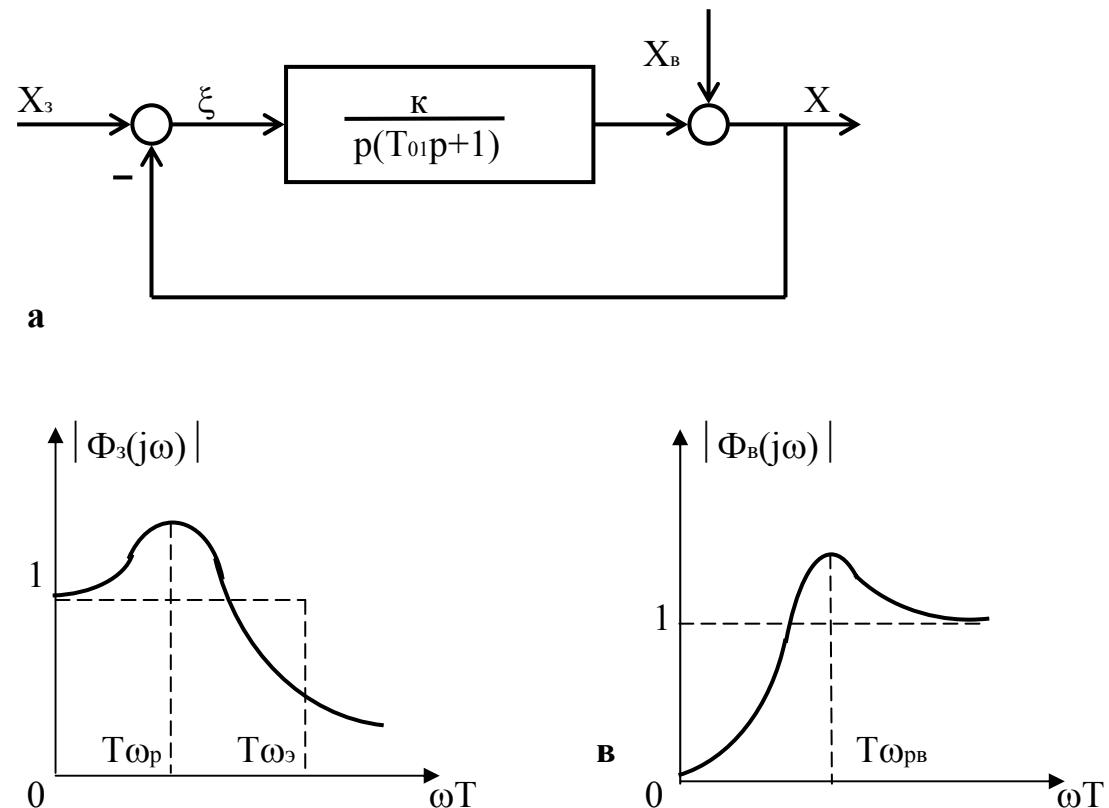


Рис. 6.7. Приближенная модель колебательной системы регулирования:
а – алгоритмическая структура, б,в – частотные характеристики

Параметры T и ξ колебательной модели (6.16) замкнутой системы можно выразить в явном виде через параметры k и T_{01} разомкнутого контура системы:

$$T = 1/\omega_0 = \sqrt{T_{01}/k}, \quad \xi = 1/2\sqrt{kT_{01}}. \quad (6.26)$$

Из формул (6.26) следует:

1. Частота ω_0 собственных незатухающих колебаний замкнутой системы тем больше, чем больше k разомкнутого контура и чем меньше T_{01} .

2. Колебательность замкнутой системы, характеризуемая величиной ξ^{-1} , тем сильней, чем больше произведение kT .

Типичная форма амплитудных характеристик модели системы по каналам задания и возмущения показана на рис. 6.7, б, в соответственно.

Формулы для приближенной оценки показателей качества системы:

$$\sigma \approx 0,2\sqrt{kT_{01}}; \quad t_n \approx 6T_{01}; \quad M \approx 1,1\sqrt{kT_{01}}. \quad (6.27)$$

Пример. Оценить приближенно показатели качества статической системы регулирования с передаточной функцией разомкнутого контура

$$W_{pk}(p) = k_{pk} / (T_1 p + 1)(T_2 p + 1)(T_3 p + 1), \quad (1)$$

где $k_{pk} = 8$; $T_1 = 10c$; $T_2 = 1.5c$; $T_3 = 0.5c$.

Решение.

Определим параметры упрощенной модели (6.23).

Согласно (6.23):

$$k = k_{pk}/T_1 = 0.8; \quad T_{01} = T_2 + T_3 = 2c.$$

Согласно (6.26), параметр модели (6.16) $\xi = 1/2\sqrt{kT_{01}} = 1/2\sqrt{0.8 \cdot 2} = 0.4$ и находится в пределах 0.25 < ξ < 0.55, для которых справедливы следующие приближенные показатели. В соответствии (6.27) перерегулирование

$$\sigma \approx 0,2\sqrt{kT_{01}} = 0,2\sqrt{0.8 \cdot 2} = 0.25,$$

длительность переходного процесса

$$t_n \approx 6T_{01} = 6 \cdot 2 = 12 \text{ с},$$

показатель колебательности

$$M \approx 1,1 \sqrt{kT_{01}} = 1,1 \sqrt{0.8 \cdot 2} = 1,375.$$

Для обеспечения высоких показателей качества процесса управления необходимо рационально выбрать схему и параметры специально введенных корректирующих устройств годографа, стандартных передаточных функций и нормированных переходных характеристик и др.

ГЛАВА 7

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Основные понятия о синтезе САУ

Математические задачи в теории автоматического управления состоят из задач анализа и синтеза автоматических систем. В задачах анализа полностью известна структура системы, заданы все параметры системы, и требуется оценить какое-либо ее статическое или динамическое свойство. Задачи синтеза можно рассматривать как обратные задачам анализа, так как в них требуется определить структуру и параметры системы по заданным показателям качества. Простейшими задачами синтеза являются, например, задачи определения передаточного коэффициента разомкнутого контура по заданной ошибке или минимуму интегральной ошибки. Более сложные задачи рассмотрены далее.

Синтезом автоматической системы называют процедуру определения структуры и параметров системы по заданным показателям качества. Синтез является важнейшим этапом проектирования и конструирования системы. В общем случае при проектировании системы необходимо определить алгоритмическую и функциональную структуру (задача полного синтеза). Алгоритмическую структуру системы (или ее части) находят при помощи математических методов и на основании требований, записанных в четкой математической форме. Поэтому процедуру отыскания алгоритмической структуры называют теоретическим синтезом или аналитическим конструированием системы управления.

Синтез функциональной структуры или технический синтез системы заключается в выборе конкретных элементов. Этот этап проектирования не имеет пока строгой математической основы и относится к области инженерного искусства.

Последовательность решения задачи полного синтеза может быть различной. В некоторых простых случаях задачу удается решить в идеальной последовательности: сначала определить при помощи математических методов алгоритмическую структуру системы, а затем подобрать соответствующие конструктивные элементы. В более сложных случаях возникают трудности в подборе конструктивных элементов, потому что в ограниченной номенклатуре средств управления может не оказаться устройств с необходимыми алгоритмическими свойствами. Поэтому задачу синтеза в большинстве случаев решают следующим образом. Сначала, исходя из требований к назначению системы и учитывая условия ее работы, по каталогам серийного оборудования выбирают функционально необходимые элементы системы: регулирующий орган (РО), исполнительное устройство (ИУ), датчики (Д). Эти элементы вместе с объектом управления (ОУ) образуют неизменяемую часть системы (рис. 7.1).

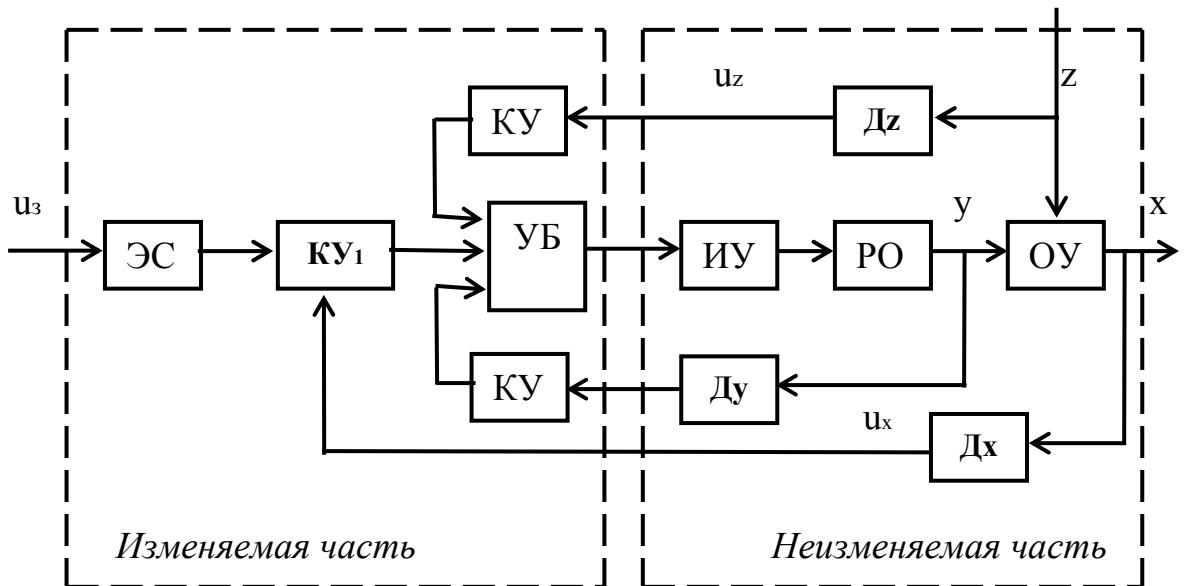


Рис. 7.1.Функциональная структура синтезируемой системы

Затем на основании требований к статическим и динамическим свойствам системы определяют изменяемую часть, в которую входят усилительно-преобразовательный блок (УБ) и различные корректирующие устройства (КУ).

Алгоритмическую структуру изменяемой части находят с учетом свойств уже выбранных функционально необходимых элементов, а техническая реализация этой части осуществляется с использованием стандартных унифицированных регуляторов и различных корректирующих и компенсирующих устройств. Таким образом, процессы определения алгоритмической и функциональной структур всей системы тесно переплетаются друг с другом.

Заключительным этапом проектирования системы управления является *параметрическая оптимизация* - расчет настроек параметров выбранного регулятора.

После решения задачи синтеза обычно выполняют анализ синтезированной системы: проверяют, обладает ли система необходимыми показателями точности, устойчивости и качества.

На всех этапах синтеза и анализа систем целесообразно применение ЭВМ. Моделирование систем на ЭВМ позволяет исследовать большое количество вариантов структур и параметров и ускорить решение задачи синтеза.

7.2. Общие принципы синтеза алгоритмической структуры САУ

1. Идеальная структура системы. Для решения задачи синтеза алгоритмической структуры должны быть известны передаточная функция $W_0(p)$ объекта управления, возмущения u_v и x_v , действующие на входе и выходе объекта, а также помехи x_p , возникающие в каналах задания и измерения (рис. 7.2, а, б).

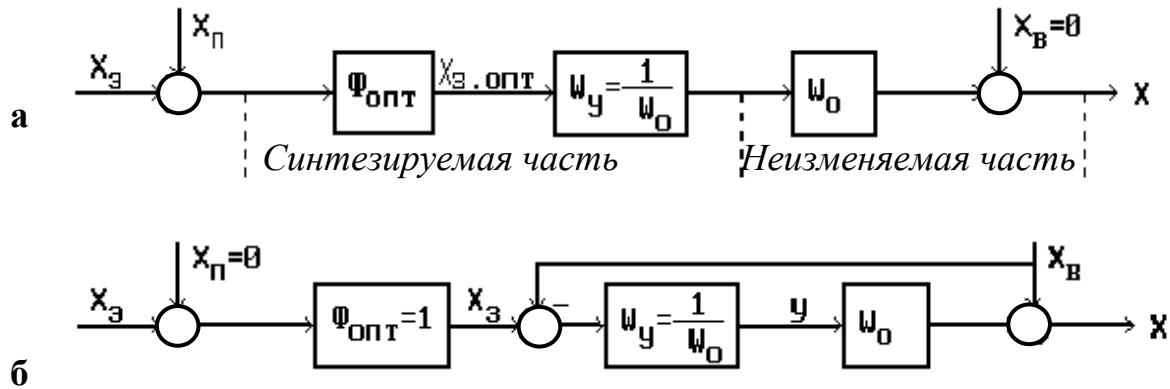


Рис. 7.2. Алгоритмическая структура идеальной разомкнутой системы

В простейшем случае, когда возмущающие воздействия на объект отсутствуют, управление можно осуществлять по разомкнутой схеме (рис. 7.2, а). Если при этом передаточную функцию $W_y(p)$ управляющего устройства принять равной

$$W_y(p) = 1/W_0(p), \quad (7.1)$$

то обеспечится полная (структурная) компенсация инерционности объекта, и система управления будет практически мгновенно воспроизводить на выходе объекта задающее воздействие $x_3 \text{ опт}$. Задание $x_3 \text{ опт}$ формируется специальным фильтром с передаточной функцией $\Phi_{\text{опт}}(p)$, которая выбирается так, чтобы фильтр как можно лучше пропускал все составляющие сигнала x_3 и подавлял помеху x_n .

Если на объект действует возмущение x_v , которое поддается измерению, то теоретически можно синтезировать идеальную разомкнутую систему управления с полной компенсацией возмущения (рис. 7.2, б). Причем передаточная функция (7.1), обеспечивающая полную компенсацию инерционности объекта, оказывается наилучшей и для компенсации ("парирования") возмущения x_v . Действительно, при выполнении условия (7.1) всегда $W_y(p)W_0(p)=1$, поэтому полезная составляющая x_u на выходе объекта будет полностью уравновешивать возмущение x_v .

Основная трудность при моделировании идеальных алгоритмических структур САУ заключается в реализации обратной передаточной функции объекта. Можно рекомендовать в качестве модели обратной передаточной функции объекта следующее соединение звеньев (рис. 7.3).

При большом коэффициенте передачи k_0 эквивалентная передаточная функция соединения звеньев имеет вид

$$W(p) = k_0 / (1 + k_0 W_0(p)) \approx 1/W_0(p). \quad (7.2)$$

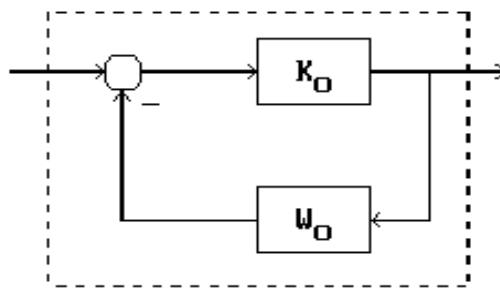


Рис. 7.3. Модель обратной передаточной функции $1/W_0$

Если возмущение x_v не удается измерить, то для отыскания структуры идеальной замкнутой системы можно использовать идею косвенного измерения возмущения x_v с помощью модели объекта $W_0(p)$ (рис. 7.4,а).

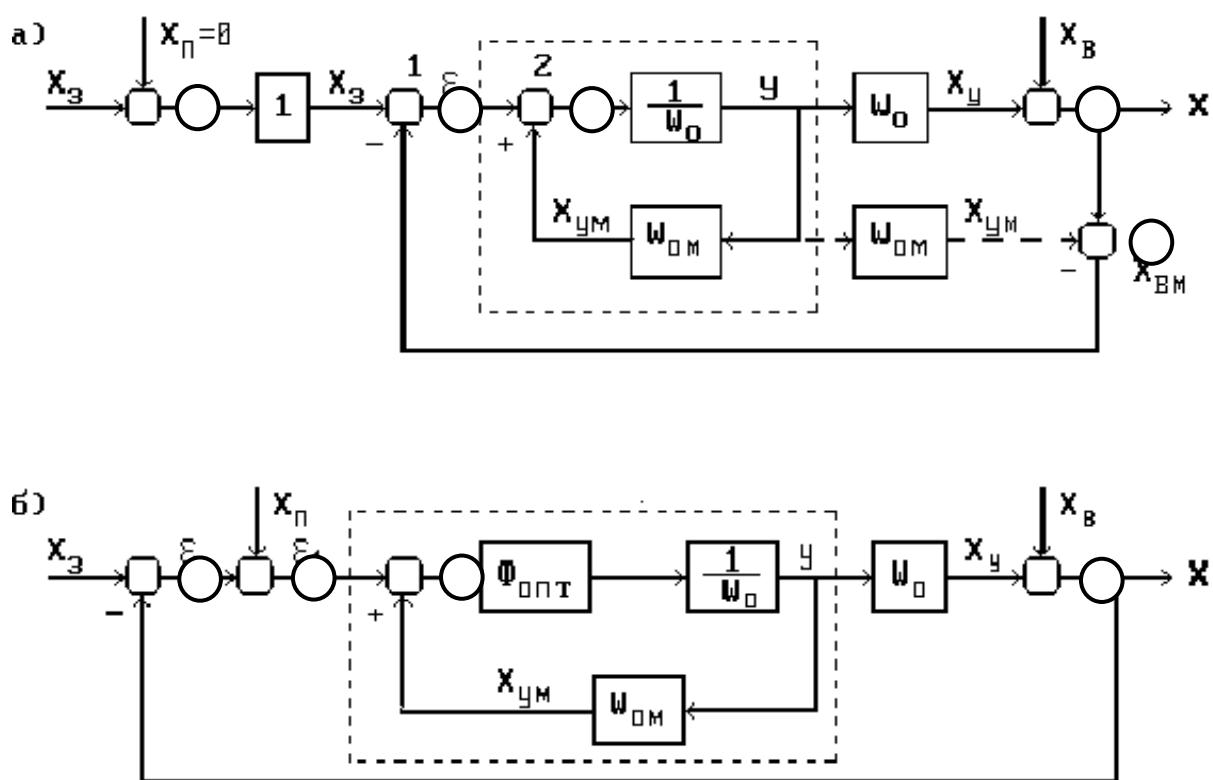


Рис. 7.4. Алгоритмические структуры идеальной замкнутой системы

$$\text{Очевидно, что при } W_{0M}(p) = W_0(p) \quad (7.3)$$

вычисляемый на выходе модели (штриховые стрелки) сигнал

$$x_{BM} = x - x_{UM} = (xy + x_v) - x_{UM} = x_v \quad (7.4)$$

является косвенно измеренным возмущением x_v и его можно, как и в схеме

на рис. 7.2, б, ввести в управляющее устройство с передаточной функцией $1/W_0(p)$ и, таким образом, снова получить идеальную разомкнутую структуру. В ней по правилам структурных преобразований сигнал x_{um} можно перенести на вход управляющего устройства и приложить к сумматору 2. Тогда управляющее устройство $1/W_0$ окажется охваченным внутренней положительной обратной связью, а сигнал после сумматора 1 будет соответствовать сигналу ошибки $\xi = x_3 - x$. Последнее означает, что система стала замкнутой и работает по принципу отрицательной обратной связи с регулятором (штриховой прямоугольник), имеющим передаточную функцию:

$$W_{pu}(p) = \frac{y(p)}{\xi(p)} = \frac{1/W_0(p)}{1 - W_{om}(p)/W_0(p)}. \quad (7.5)$$

При точном совпадении модели и объекта регулятор (7.5) будет работать как пропорциональный с $k_p = \infty$, что соответствует нулевым ошибкам по каналам задания и возмущения. В общем случае, когда $x_b \neq 0$ и $x_n \neq 0$, алгоритмическая структура идеальной замкнутой системы (рис. 7.4, б) сочетает в себе признаки обеих структур, обоснованных выше эвристическим путем. В этой идеальной структуре регулятор содержит внутреннюю положительную обратную связь, звенья $1/W_0$, W_{om} и оптимальный фильтр Φ_{onm} . Передаточная функция регулятора идеальной замкнутой системы

$$W_{pu}(p) = \frac{y(p)}{\xi_1(p)} = \frac{\Phi_{onm}(p)}{1 - \Phi_{onm}(p)} \cdot \frac{1}{W_0(p)^6}$$

Звено $\Phi_{onm}(p)$ осуществляет оптимальную фильтрацию внешних воздействий и вырабатывает оптимальное задание $x_3 \text{ onm}$. Обратная модель объекта $1/W_0(p)$ компенсирует его инерционность, а прямая модель $W_{om}(p)$ вычисляет составляющую x_u на выходе объекта.

Используемое в идеальной системе включение последовательно с объектом звена в виде обратной модели объекта является принципиальной основой структурного и параметрического синтеза систем управления, а сам прием называется *методом компенсации инерционности объекта*.

В практических задачах синтеза чаще всего применяется частичная (параметрическая) компенсация - устранение влияния одной-двух (обычно самых больших) постоянных времени объекта. Для этого последовательно с инерционным объектом

$$W_0(p) = k_0/(T_{01}p + 1)(T_{02}p + 1)\dots(T_{0n} + 1), \quad (7.7)$$

где $T_{01} > T_{02} > T_{03} > \dots > T_{0n}$ включают фиксирующее звено первого-второго порядка с передаточной функцией

$$W_k(p) = k_k(T_{k1}p + 1)(T_{k2}p + 1), \quad (7.8)$$

для которого $T_{k1} = T_{01}$; $T_{k2} = T_{02}$; $k_k = 1/k_0$.

2. Идеальный регулятор для объектов с запаздыванием. Определим структуру и передаточную функцию идеального регулятора для инерционных объектов с запаздыванием, которые можно описать обобщенной передаточной функцией:

$$W_0(p) = W_0'(p)e^{-p\tau_0}, \quad (7.9)$$

где $W_0'(p)$ -дробно-рациональная функция, характеризующая инерционную часть объекта; τ_0 - чистое запаздывание объекта. Учтем, что при подстановке (7.9) в (7.6) в передаточной функции регулятора появится сомножитель $e^{+p\tau_0}$, который соответствует идеальному упредителю, точная реализация которого технически невозможна. Поэтому с целью упрощения искомой структуры регулятора и облегчения его технической реализации целесообразно допустить, чтобы идеальная система воспроизводила задающее воздействие с запаздыванием, т.е., чтобы

$$\Phi_{xz}(p) = \Phi_{onm}(p) = \Phi_{onm}'(p)e^{-p\tau_0}, \quad (7.10)$$

где $\Phi_{onm}'(p)$ - оптимальный фильтр для сигналов x_z и x_n . Тогда, согласно (7.6), получим идеальный регулятор для объектов с запаздыванием

$$W_{pu}(p) = \frac{\Phi_{onm}'(p)}{1 - \Phi_{onm}'(p)e^{-p\tau_0}} \frac{1}{W_0'(p)}, \quad (7.11)$$

который называется регулятором Ресквица.

Выражению (7.11) соответствует структура, представленная на рис. 7.5. Внутренняя обратная связь регулятора Ресквица, содержащая звено чистого запаздывания, прогнозирует, какой сигнал должен появиться на выходе объекта после очередного изменения управляющего воздействия u . Так как эта связь положительная, то прогнозируемый сигнал постоянно компенсирует (нейтрализует) равный ему реальный выходной сигнал объекта. Результирующий сигнал ξ_p появляется только в первые моменты времени после изменения внешних воздействий x_z , x_n или x_w . Таким образом, из основного контура как бы исключается чистое запаздывание τ_0 .

Существенным недостатком системы с регулятором Ресквица является ее критичность к малым вариациям запаздывания объекта.

Идея нейтрализации запаздывания объекта реализуется также с помощью упредителя Смита, которым охватывают типовые регуляторы (рис. 7.6).

Нетрудно убедиться, что при большом передаточном коэффициенте ($k_p \rightarrow \infty$) регулятор с упредителем Смита эквивалентен регулятору Ресквица с $\Phi_{onm} = 1$:

$$\begin{aligned}
W_{csmim}(p) &= \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)W_0'(p)(1 - e^{-p\tau_0})} = \frac{1}{1/W_p(p) + W_0'(p)(1 - e^{-p\tau_0})} \approx \\
&\approx \frac{1}{1 - e^{-p\tau_0}} \frac{1}{W_0'(p)}. \tag{7.12}
\end{aligned}$$

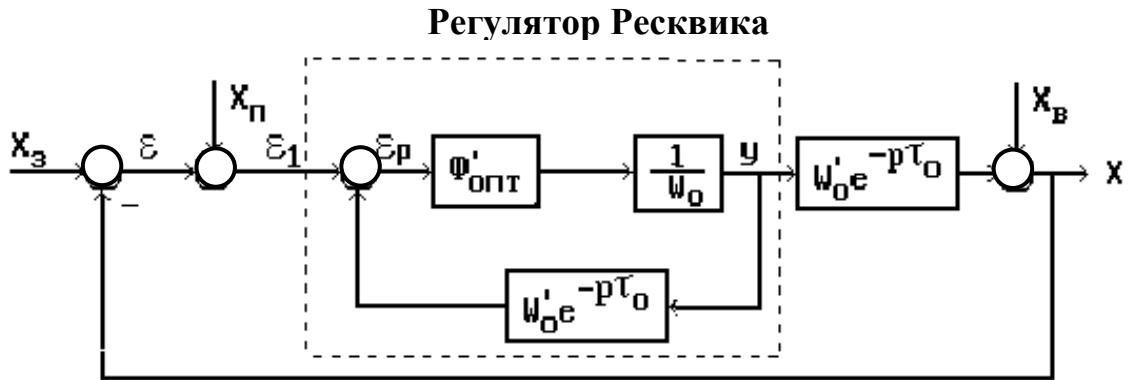


Рис. 7.5. Структура идеальной системы управления объектом с запаздыванием на базе регулятора Ресквика.

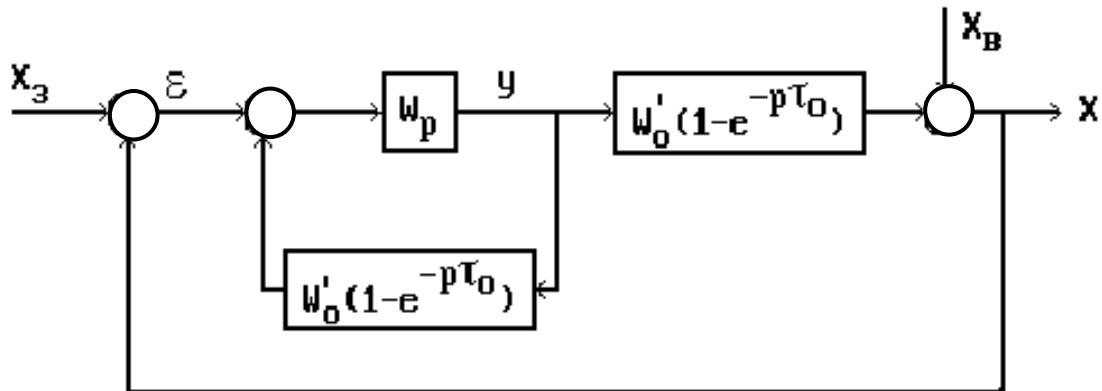


Рис. 7.6. Структура идеальной системы управления объектом с запаздыванием на основе упредителя Смита

Систему с упредителем Смита технически реализовать легче, так как не требуется моделировать обратную передаточную функцию объекта.

3. *Осуществление инвариантности в стабилизирующих и следящих системах.* Одной из главных целей синтеза автоматической системы является обеспечение требуемой точности в установившихся и переходных режимах. Точность систем в установившихся режимах можно улучшить, увеличивая порядок астатизма и коэффициент разомкнутого контура. Но при этом, как правило, уменьшается запас устойчивости, увеличивается колебательность и ухудшается точность системы в переходных режимах. Эффективным средст-

вом устранения противоречия между условиями точности в установившихся и переходных режимах служит компенсация внешних воздействий путем осуществления инвариантности.

"Инвариантность" означает независимость одной физической величины от другой. В ТАУ рассматривают независимость выходных величин (управляемой величины или сигнала ошибки) от входных воздействий. В системах стабилизации стремятся получить независимость управляемой величины от возмущающего воздействия, а в следящих системах - независимость сигнала ошибки от задающего воздействия.

Инвариантность в САУ достигается при помощи управления по возмущению, когда управляющее воздействие формируется в зависимости от изменений возмущающего воздействия. Очевидно, что этот принцип управления применим, если возмущающее воздействие может быть измерено. Обычно принцип управления по возмущению применяют в сочетании с принципом управления по отклонению (комбинированная система).

Рассмотрим алгоритмическую структуру комбинированной системы стабилизации с компенсирующей связью по возмущению z (рис. 7.7). Компенсирующая связь действует на выходную величину со знаком, который всегда противоположен знаку непосредственного влияния возмущения на выход.

Передаточная функция системы по возмущению

$$\Phi_{xz}(p) = \frac{x(p)}{z(p)} = \frac{W_{0z}(p) - W_k(p)W_y(p)W_0(p)}{1 + W_y(p)W_0(p)}, \quad (7.13)$$

где $W_0(p)$ и $W_{0z}(p)$ - передаточные функции объекта соответственно по управляющему и возмущающему воздействию;

$W_y(p)$ - передаточная функция управляющего устройства;

$W_k(p)$ - передаточная функция компенсирующего устройства.

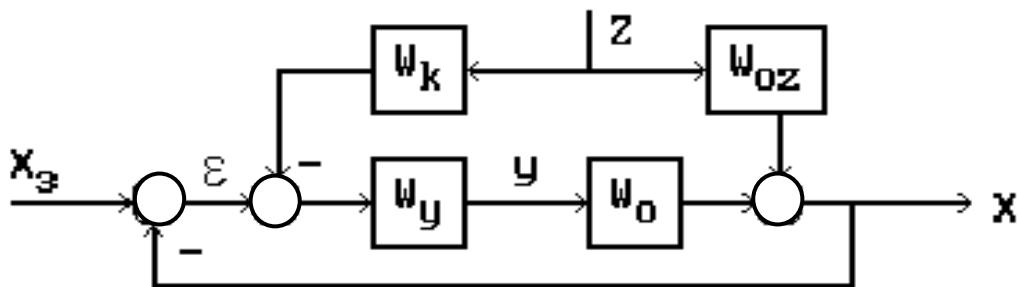


Рис. 7.7. Структура комбинированной САУ с компенсирующей связью по возмущению

Управляемая величина $x(t)$ не зависит от возмущения $z(t)$, если передаточная функция (7.13) равна нулю

$$\Phi_{xz}(p) = 0, \quad (7.14)$$

а это возможно, если равен нулю ее числитель. Отсюда условие инвариант-

ности стабилизируемой величины по отношению к возмущению

$$W_{0z}(p) - W_k(p)W_y(p)W_0(p) = 0. \quad (7.15)$$

Условие (7.15) означает, что для достижения независимости величины $x(t)$ от возмущения $z(t)$ необходимо, чтобы динамические свойства двух параллельных каналов, по которым возмущение $z(t)$ действует на $x(t)$, были одинаковыми.

Согласно (7.15), передаточная функция компенсирующего устройства

$$W_k(p) = W_{0z}(p)/W_y(p)W_0(p). \quad (7.16)$$

В следящих системах необходимо добиваться независимости сигнала ошибки от задающего воздействия. Для схемы, приведенной на рис. 7.8, передаточная функция между воздействием $x_3(t)$ и сигналом ошибки $\xi(t)$:

$$\Phi_{\xi_3}(p) = \frac{1 - W_k(p)W_y(p)W_0(p)}{1 + W_y(p)W_0(p)}. \quad (7.17)$$

Приравнивая функцию (7.17) к нулю, находим условие инвариантности ошибки слежения по отношению к задающему воздействию

$$1 - W_k(p)W_y(p)W_0(p) = 0, \quad (7.18)$$

отсюда требуемая передаточная функция компенсирующего устройства

$$W_k(p) = 1/W_y(p)W_0(p). \quad (7.19)$$

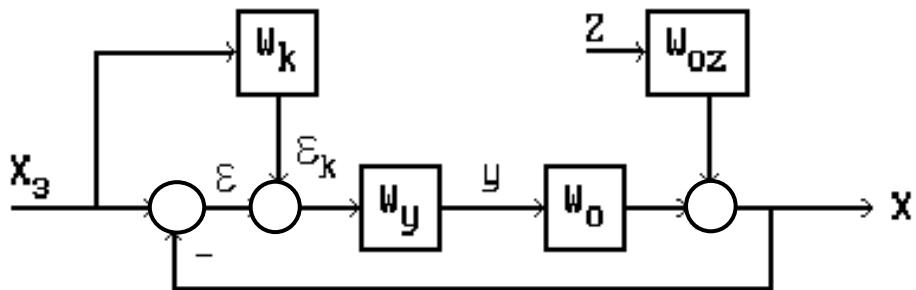


Рис. 7.8. Структура комбинированной САУ с компенсирующей связью по задающему воздействию

По виду передаточных функций (7.13) и (7.17) можно установить, что введение компенсирующих связей не изменяет характеристический полином системы, поэтому не влияет на ее устойчивость.

Если передаточная функция $W_k(p)$ удовлетворяет условию физической реализуемости, то в системе возможно достижение *абсолютной инвариантности*. Если $W_k(p)$ реализуема приближенно, то в системе осуществима частичная инвариантность.

7.3. Структурно-параметрическая оптимизация систем без запаздывания

1. Критерий и метод оптимизации амплитудной характеристики.

При проектировании систем управления объектами, не содержащими чистого запаздывания, наибольшее применение получили два критерия - модульный оптимум (МО) и симметричный оптимум (СО). Критерий модульного оптимума, называемый также критерием амплитудного или технического оптимума, заключается в выполнении следующих требований к форме амплитудной характеристики замкнутой системы по каналу $x_3 - x$: характеристика в как можно более широком диапазоне частот должна быть горизонтальной и равной единице; наклонный участок характеристики должен быть как можно более крутопадающим (рис.7.9, а).

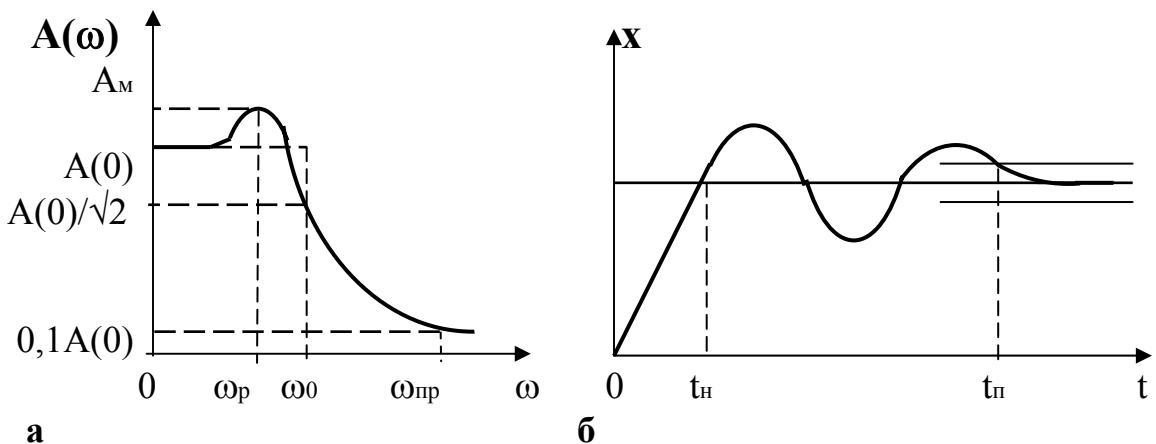


Рис. 7.9. характеристики замкнутой системы:
а-амплитудная, б - переходная

Другими словами, критерий модульного оптимума требует, чтобы настраиваемая система приближалась по своим частотным передаточным свойствам к идеальному фильтру низкой частоты, имеющему прямоугольную частотную характеристику (обозначена пунктиром) с полосой пропускания $\omega_{pr} = \omega_0$. При наличии на входе высокочастотной помехи частоту ω выбирают также достаточно большой, но по компромиссному условию совместной фильтрации всех действующих сигналов. Настройка системы по критерию МО обеспечивает малое перерегулирование и достаточно быстрое протекание переходного процесса со следующими показателями качества (рис. 7.1, б):

$$\sigma < 9\%; \quad t_h < 5/\omega_0; \quad t_p < \pi\omega_0. \quad (7.20)$$

Верхние пределы показателей качества соответствуют идеальному

фильтру низкой частоты, который практически нереализуем. Амплитудную характеристику, близкую по форме к прямоугольной характеристике идеального фильтра, имеет так называемый *фильтр Баттервота*, у которого а.ч.х.:

$$A_\delta(\omega) = |W_\delta(j\omega)| = 1 / \sqrt{(1 + T\omega)^{2.21})}$$

На практике обычно используют фильтры с порядком $n = 2 - 8$.

Нетрудно убедиться, что колебательная модель САУ с передаточной функцией (6.16) имеет при коэффициенте демпфирования $\xi = 0.7$ амплитудную характеристику

$$A_c(\omega) = 1 / \sqrt{1 + T^4 \omega^4}, \quad (7.22)$$

соответствующую частотному случаю фильтра с $n = 2$.

При настройке систем более высокого порядка ($n > 2$) по критерию МО можно обойтись без приближенной модели второго порядка. Для этого передаточную функцию замкнутой системы

$$\Phi(p) = b_m / (a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \quad (7.23)$$

приводят к нормированному виду

$$\Phi(\bar{p}) = B_m / (\bar{p}^n + A_1 \bar{p}^{n-1} + \dots + A_{n-1} \bar{p} + 1), \quad (7.24)$$

где $\bar{p} = p T_m = p / \omega_0$ - оператор Лапласа, соответствующий безразмерному времени $\bar{t} = t / T_m$; T_m - масштабный множитель, равный

$$T_m = 1 / \omega_0 = \sqrt[n]{a_0 / a_n}; \quad (7.25)$$

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0} T_m, \dots, A_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{a_0} T_m^{n-1}, \quad B_m = \frac{b_m}{a_n} \quad (7.26)$$

безразмерные коэффициенты.

Чтобы обеспечить желаемую форму амплитудной характеристики, близкую к прямоугольной, коэффициенты нормированной функции (7.24) выбирают в соответствии со стандартными полиномами Баттервота (табл. 7.1). Именно при таких сочетаниях коэффициентов A_i амплитудная характеристика фильтра принимает вид (7.21), причем $T = T_m$, а относительная частота $\Omega_0 = \omega_0 T = 1$ соответствует значению амплитудной функции, равному 0,7 (при $B_m = 1$).

Масштабный множитель T_m не влияет на форму переходного процесса и служит обобщенной мерой быстродействия системы. Его значение можно выбрать, исходя из требуемых показателей быстродействия t_u и t_n

(рис. 7.9,б):

$$t_u \approx nT_m, \quad t_n \approx 2nT_m, \quad (7.27)$$

где n – порядок полинома Баттервортса.

Таблица 7.1

Коэффициенты фильтра Баттервортса

n	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7
2	1,4	0	0	0	0	0	0
3	2	2	0	0	0	0	0
4	2,61	3,41	2,61	0	0	0	0
5	3,24	5,24	5,24	3,24	0	0	0
6	3,86	7,46	9,13	7,46	3,86	0	0
7	4,5	10,1	14,6	14,6	10,1	4,5	0
8	5,12	13,1	21,8	25,7	21,8	13,1	5,12

Применимельно к колебательной модели параметры фильтра Баттервортса

$$A_l = 2\xi = 1/\sqrt{kT_{01}}, \quad T_m = T = \sqrt{T_{01}/k} \quad (7.28)$$

В системах, параметры которых выбраны в со стандартными полиномами Баттервортса,

$$\sigma = 10 - 15 \%. \quad (7.29)$$

Указанные выше значения t_u и t_n строго выдерживаются только в тех случаях, когда числитель (7.23) не содержит слагаемых с оператором p . Тем не менее и для таких систем можно пользоваться значениями коэффициентов Баттервортса. При этом также обеспечивается достаточно хорошее качество переходного процесса.

Пример. Пусть исходная часть системы, состоящая из функционально необходимых элементов, описывается передаточной функцией (рис. 7.10):

$$W(p) = k / p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1), \quad (1)$$

где $T_1 = 1 \text{ с}$, $T_2 = 2 \text{ с}$.

Определить настроечные параметры T_3 и T_4 последовательно включаемого корректирующего устройства

$$W_k(p) = (T_3 p + 1)(T_4 p + 1) \quad (2)$$

и общий передаточный коэффициент k , обеспечивающие критерий MO и желающую длительность переходного процесса $t_n = 6 \text{ с}$.

Решение. Передаточная функция замкнутой системы по каналу $x_3 - x$

$$\Phi(p) = \frac{k(T_3 p + 1)(T_4 p + 1)}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2 + kT_3 T_4)p^2 + (1 + kT_3 + kT_4)p + k}. \quad (3)$$

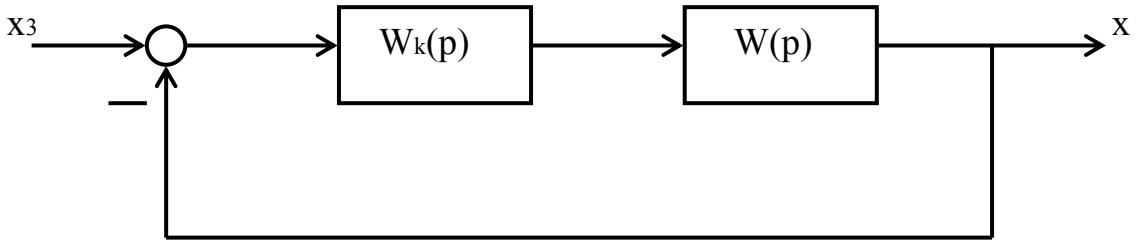


Рис. 7.10. Структурная схема САУ

Не учитывая наличие полинома в числителе, подберем настроочные параметры так, чтобы A_1 и A_2 соответствовали фильтру Баттервортса.

Определим вначале масштабный множитель T_m , ориентируясь на приближенное соотношение (7.26)

$$T_m = t_n / 2n = 6 / 2 \cdot 3 = 1 \text{ с.} \quad (4)$$

Теперь в соответствии с (7.24) определим необходимое значение общего коэффициента передачи

$$k = a_3 = a_0 / T_m^3 = T_1 T_2 / T_m^3 = 1 \cdot 2 / 1^3 = 2. \quad (5)$$

Для $n = 3$ оба безразмерных коэффициента Баттервортса должны быть равны 2 (см. табл. 7. 1):

$$A_1 = \frac{a_1}{a_0} T_m = \frac{T_1 + T_2 + \kappa T_3 T_4}{T_1 T_2} T_m = \frac{3 + 2T_3 T_4}{2} = 2, \quad (6)$$

$$A_2 = \frac{a_2}{a_0} T_m^2 = \frac{1 + \kappa T_3 + \kappa T_4}{T_1 T_2} T_m^2 = \frac{1 + 2T_3 + 2T_4}{2} = 2. \quad (7)$$

Решая совместно эти два уравнения, получаем $T_3 = 0,5 \text{ с}$ и $T_4 = 1 \text{ с}$.

2. Оптимизация типовых контуров регулирования

Применим изложенный метод оптимизации амплитудной характеристики для расчета настроочных параметров типовых регуляторов, используемых

для управления следующими объектами без запаздывания:

$$W_0(p) = k_0/p(T_{01}p + 1), \quad (7.30)$$

$$W_0(p) = k_0/(T_{01}p + 1)(T_{02}p + 1), \quad (7.31)$$

$$W_0(p) = k_0/p(T_{01}p + 1)(T_{02}p + 1), \quad (7.32)$$

$$W_0(p) = k_0/(T_{01}p + 1)(T_{02}p + 1)(T_{03}p + 1), \quad (7.33)$$

где $T_{01} < T_{02} < T_{03}$, причем в общем случае сомножитель с наименьшей постоянной времени T_{01} приближенно заменяет собой несколько инерционных звеньев с еще более малыми постоянными времени T_{0i} .

Моделями (7.30) - (7.33) обычно пользуются для приближенного описания объектов, входящих в типовые контуры регулирования систем управления электроприводами (контуры регулирования напряжения, тока и частоты вращения).

В зависимости от типа и порядка (7.30) - (7.33), а также соотношений между их постоянными времени, настройка контура регулирования осуществляется либо по критерию МО, либо по критерию СО (табл. 7.2).

Настроечные параметры регуляторов k_p , T_u и T_d , обеспечивающие получение определенных показателей качества, будем называть *гарантирующими*.

Если у объекта второго порядка (7.31) $T_{02} \leq 4T_{01}$, то предпочтителен критерий МО. Для выполнения требований критерия применяют ПИ – регулятор

$$W_p(p) = k_p^{\prime} (T_u^{\prime} + 1) / T_u^{\prime} p \quad (7.34)$$

с постоянной времени интегрирования T_u^{\prime} , равной наибольшей постоянной времени объекта:

$$T_u^{\prime} = T_u = T_{02}. \quad (7.35)$$

Тем самым достигается полная компенсация этой наибольшей постоянной времени. Передаточная функция разомкнутого контура принимает вид

$$W(p) = W_p(p)W_0(p) = k_p^{\prime} k_0 / [T_u^{\prime} p(T_{01}p + 1)] \quad (7.36)$$

и совпадает с передаточной функцией разомкнутого контура колебательной модели, для которой критерий МО сводится к условию $\xi = 0,7$. Отсюда в соответствии с ранее приведен-

ными формулами для колебательной модели $kT_{01} = I/4\xi^2$; $T_{01} = T/2\xi$ находим

$$k = 1/4\xi^2 T_{01} = 1/2 T_{01}. \quad (7.37)$$

Таблица 7.2

Гарантирующие настроочные параметры типовых регуляторов для объектов без запаздывания

Передаточная функция объекта $W_0(p)$	Условия применения	Критерий	Параметры регулятора		
			k_p	T_i	T_d
$\frac{k_0}{(T_{01}p+1)(T_{02}p+1)}$ $(T_{01} < T_{02})$	$T_{02} \leq 4T_{01}$	MO	$\frac{T_{02}}{2k_0T_{01}}$	T_{02}	—
	$T_{02} \geq 4T_{01}$	CO	$\frac{T_{02}}{2k_0T_{01}}$	$4T_{01}$	—
$\frac{k_0}{p(T_{01}p+1)(T_{02}p+1)}$	$T_{02} \ll T_{01}$	CO	$\frac{1}{2k_0T_{01}}$	$4T_{01}$	—
	$T_{01} < T_{02}$	CO	$\frac{1}{2k_0T_{01}}$	$4T_{01}$	T_{02}
$\frac{k_0}{(T_{01}p+1)(T_{02}p+1)(T_{03}p+1)}$ $(T_{01} < T_{02} < T_{03})$	$T_{03} \leq 4T_{01}$	MO	$\frac{T_{03}}{2k_0T_{01}}$	T_{03}	T_{02}
	$T_{03} \geq 4T_{01}$	CO	$\frac{T_{03}}{2k_0T_{01}}$	$4T_{01}$	T_{02}
	$T_{02} \geq 4T_{01}$	CO	$\frac{T_{02}T_{03}}{8k_0T_{01}^2}$	T_{02}	$4T_{03}$

Учитывая, что для рассматриваемого контура с ПИ - регулятором

$$k = k_p k_0 / T_u \text{ и } T_u = T_{02}, \quad (7.38)$$

получим, кроме (7.35), второе условие настройки на МО :

$$\dot{k_p} = k_p = T_{02} / 2k_0 T_{01}. \quad (7.39)$$

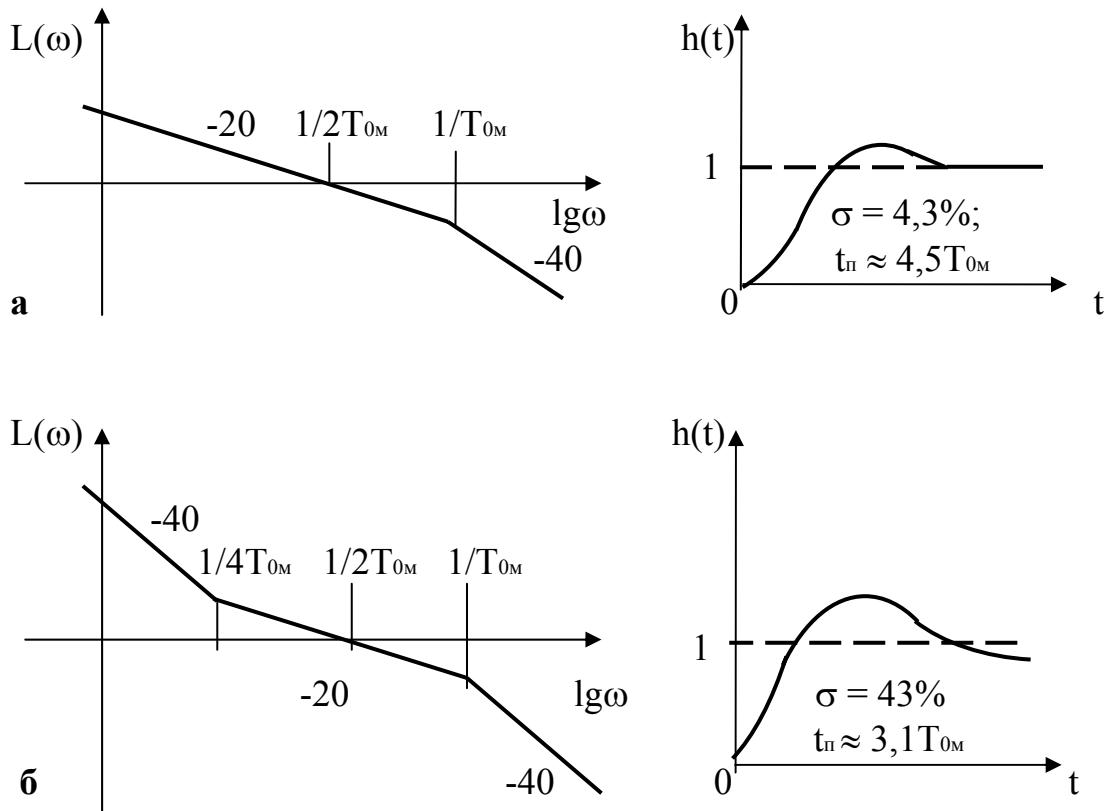


Рис. 7.11. Частотные и переходные характеристики одноконтурной системы регулирования, настроенной по критериям модульного (а) и симметричного (б) оптимумов

На рис. 7.11, а показаны л.а.ч.х. $L(\omega)$ разомкнутого контура и переходная характеристика $h(t)$ замкнутой системы с ПИ - регулятором, настроенным на МО. При этом передаточная функция замкнутого контура имеет вид

$$\Phi(p) = 1/(2T_{01}^2 p^2 + 2T_{01}p + 1). \quad (7.40)$$

Если объект астатический, то передаточная функция разомкнутого контура с ПИ – регулятором при условии $T_u \neq T_{01}$ имеет вид

$$W(p) = k_p \frac{T_u p + 1}{T_u p} \cdot \frac{k_0}{p(T_{01} p + 1)}. \quad (7.41)$$

Ей соответствует передаточная функция замкнутой системы

$$\Phi(p) = \frac{k_p k_0 (T_u p + 1)}{T_u T_{01} p^3 + T_u p^2 + k_p k_0 T_{01} p + k_p k_0}. \quad (7.42)$$

Применяя к знаменателю функции (7.42) соотношения Баттервортса, можно получить следующие настройки ПИ-регулятора:

$$\dot{k_p} = k_p = 1/2k_0T_{01}; \quad \dot{T_u} = T_u = 4T_{01}, \quad (7.43)$$

причем $T_u = 2T_{01}$.

При полученных настройках передаточные функции (7.41) и (7.42) имеют вид

$$W(p) = \frac{4T_{01}p + 1}{8T_{01}^2p^2(T_{01}p + 1)}, \quad (7.44)$$

$$\Phi(p) = \frac{4T_{01}p + 1}{8T_{01}^3p^3 + 8T_{01}^2p^2 + 4T_{01}p + 1}. \quad (7.45)$$

Передаточной функции (7.44) соответствует симметричная л.а.х. $L(\omega)$, показанная на рис. 7.11, б, поэтому изложенный подход к выбору настроек получил название *симметричного оптимума*.

Передаточной функции (7.45) соответствует переходная характеристика замкнутой системы (рис. 7.11, б) со следующими показателями:

$$\sigma \approx 43\%; \quad t_h \approx 3,1T_{01}; \quad t_n \approx 14,7T_{01}. \quad (7.46)$$

Моделирование САУ на ЭВМ при различных настройках позволяет сделать выводы:

1. Увеличение передаточного коэффициента k_p приводит к уменьшению времени нарастания t_h и повышению перерегулирования σ .
2. Увеличение постоянной интегрирования T_u приводит к увеличению времени t_n и снижению σ .
3. Критерий МО предпочтителен при оптимизации систем, отрабатывающих изменение задающего воздействия x_3 , т.е. следящих систем.
4. Критерий СО надо применять при настройке систем, которые чаще реагируют на возмущающие воздействия y_e , т.е. стабилизирующих систем.
5. Оба критерия обеспечивают по каналу возмущения $y_e - x$ приблизительно одинаковые значения первого максимального отклонения x_{max} .

7.4. Частотный метод синтеза САУ

Частотный метод синтеза основан на формировании желаемых л.а.ч.х. разомкнутых по главной обратной связи систем и соответствующих им пере-

даточных функций, которые однозначно связаны с показателями качества переходного процесса замкнутой системы.

Для обеспечения наиболее оптимального соотношения показателей качества желаемая л.а.ч.х. на частоте среза ω_c должна иметь наклон -20 дБ/дек. Формирование низкочастотной и высокочастотной частей желаемой л.а.ч.х. может быть formalизовано для конкретных частных применений САУ. Варианты некоторых типовых л.а.ч.х. приведены на рис. 7.12.

Вариантам желаемых л.а.ч.х. соответствуют следующие системы (см. рис. 7.12):

1. Системы, приводимые к колебательному звену (технический оптимум). Желаемая л.а.ч.х. в этом случае имеет вид 1. Уравнения ее передаточной функции и частоты среза имеют вид

$$W(s) = \frac{K}{s(T_2 s + 1)}; \quad \omega_c = K. \quad (7.47)$$

Здесь $K = 1/aT_2$. При $a=2$ имеем технический оптимум, дающий перегулирование $\sigma = 4,3\%$. Минимально-возможное время переходного процесса $t_n = 9,5T_2$.

Подобная структура и приведенные соотношения соответствуют системам стабилизации (либо системе в целом, либо ее внутреннему контуру стабилизации).

2. Астатические системы 2-го порядка (кривая 2). Уравнения передаточной функции и частоты среза имеют вид

$$W(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s^2(T_2 s + 1)}; \quad \omega_c = K\tau. \quad (7.48)$$

Если в такой передаточной функции обеспечить $K = 1/8T_2$ и $\tau = 4T_2$, то показатели переходного процесса будут соответствовать симметричному оптимуму, при котором $\sigma = 43\%$, но при одинаковой с техническим оптимумом длительности переходного процесса по управлению отработка возмущающего воздействия будет минимальной и определяться постоянной времени T_2 . Подобные системы желательно использовать при сравнительно малых ускорениях задающих воздействий.

3. Астатические системы 1-го порядка (кривая 3). В этом случае уравнения передаточной функции и частоты среза имеют вид

$$W(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}; \quad \omega_c = K \frac{\tau}{T_1}. \quad (7.49)$$

Здесь $T_1 > \tau > T_2$ и T_1 определяет излом л.а.ч.х. на низких частотах ($\omega_{2n} = 1/T_1$).

Системы такого плана имеют больший запас устойчивости по фазе и меньшее перерегулирование ($\sigma < 30\%$).

4. Структуры статических САУ (кривая 4). Передаточная функция и частота среза определяются выражениями:

$$W(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{(T_0 s + 1)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \quad \omega_c = K \frac{\tau}{T_1 T_0}. \quad (7.50)$$

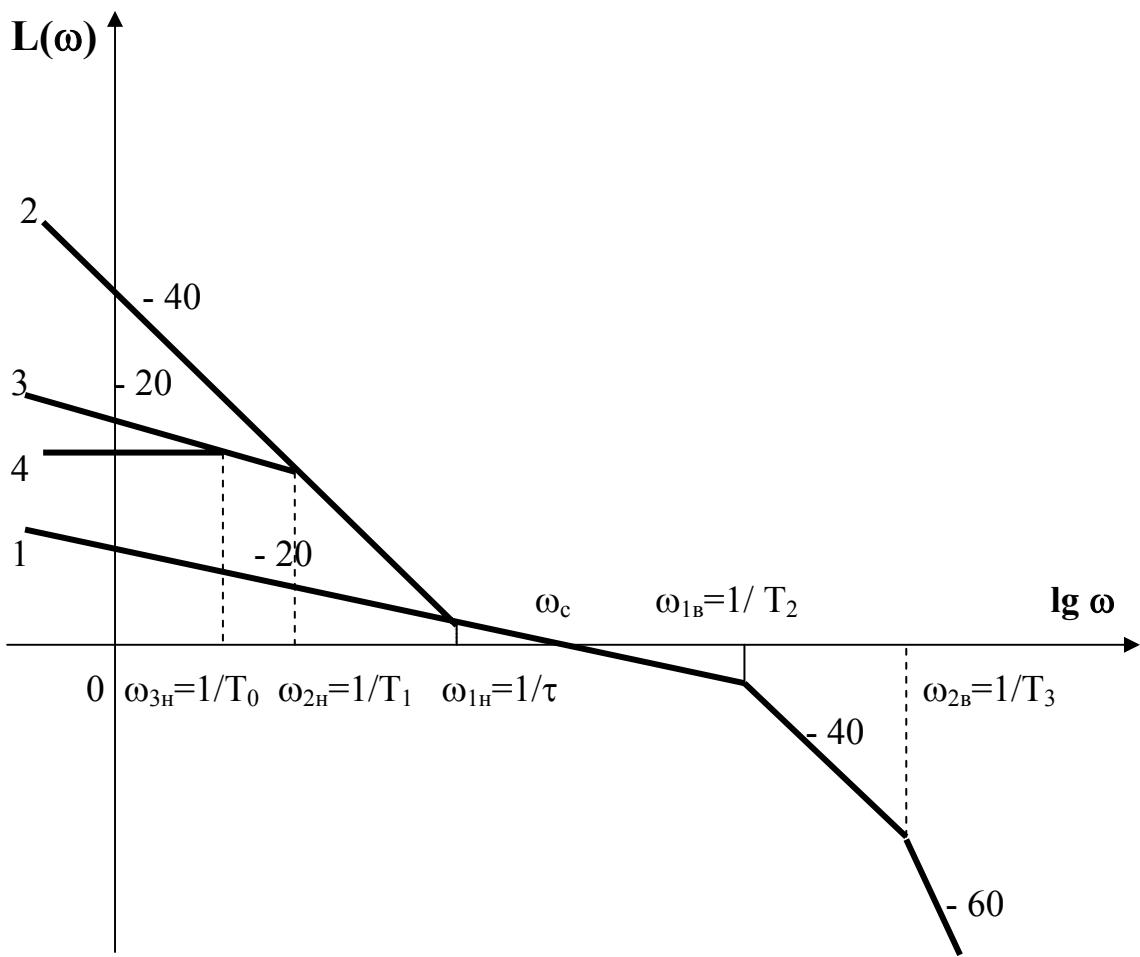


Рис. 7.12. Варианты типовых желаемых л.а.ч.х.

Такие структуры приемлемы для систем, не требующих повышенной точности отработки внешних воздействий.

При множестве возможных вариантов выбора параметров передаточных функций необходимо предварительно оценить частоту среза ω_c и допустимое перерегулирование σ .

Частота среза однозначно оценивается временем переходного процесса t_n и вычисляется по рекомендованным зависимостям:

если $\sigma < 5\%$, то $\omega_c = 4\pi/t_n$ при $\omega_{l_e} \geq 2\omega_c$.

Для $\sigma > 5\%$ связь частоты среза со временем переходного процесса нелинейна и определяется по графикам Соловникова, приводимым в учебниках по ТАУ.

Остальные параметры желаемой л.а.ч.х. рассчитывают по приближенным зависимостям:

$$\omega_c \geq \frac{2\pi}{t_n} \left(\frac{\sigma\% + 45}{20} - 2 \right) \geq \frac{0,314}{t_n} (\sigma\% + 5). \quad (7.51)$$

$$\omega_{l_e} \geq \omega_c \frac{M+1}{M} = \frac{1}{T_2} \quad \text{и} \quad \omega_{l_h} \leq \omega_c \frac{M-1}{M} = \frac{1}{\tau}, \quad (7.52)$$

где $M \approx 0,02(\sigma\% + 40)$.

Для желаемых л.а.ч.х. типа 1 принимают $M \approx 1$ и $\omega_{l_e} = 2\omega_c$.

Для желаемых л.а.ч.х. типа 2 принимают $\omega_{l_e} = 2\omega_c$ и $\omega_{l_h} = 0,5\omega_c$.

Без определения параметра M принимают $\omega_{l_e} \geq 2\omega_c$ и $\omega_{l_h} \approx 0,1\omega_{l_e}$. При этом $T_0 > T_1 > \tau > T_2 > T_3$.

Многоконтурные САУ, содержащие кроме главной обратной связи внутренние связи, наиболее распространены. Такие системы целесообразно оптимально синтезировать поконтурно, начиная с внутреннего и кончая внешним. Этот прием получил название *подчиненного* синтеза САУ.

ГЛАВА 8

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

8.1. Особенности нелинейных систем

Автоматическая система управления является *нелинейной*, если хотя бы один ее элемент описывается нелинейным уравнением.

Практически все реальные системы управления содержат один или несколько нелинейных элементов. Нелинейной характеристикой часто обладает и объект управления. Так, например, все электрические машины имеют нелинейную и неоднозначную зависимость магнитного потока от тока возбуждения. Индуктивности обмоток машины также зависят от токов.

Некоторые нелинейные элементы вводят в систему преднамеренно, чтобы улучшить качество управления. Такими нелинейностями являются, например, релейные управляющие устройства, обеспечивающие высокое быстродействие процесса управления. Применяются также нелинейные корректирующие устройства.

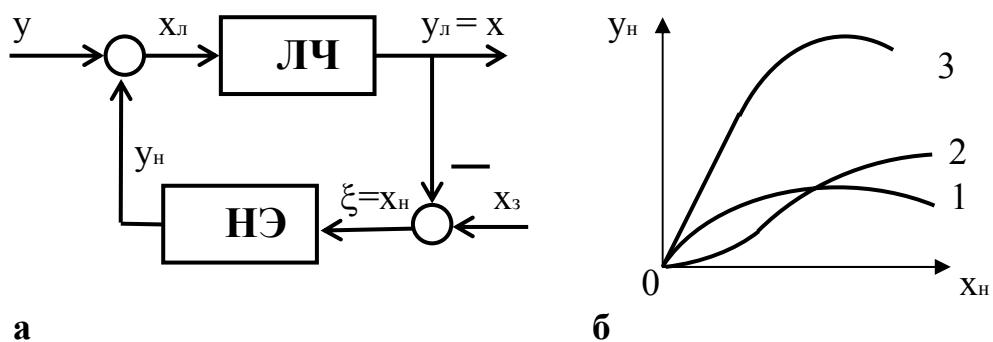


Рис. 8.1. Структурная схема нелинейной САУ (а) и характеристики НЭ (б)

Нелинейную САУ можно представить в виде соединения двух частей (рис. 8.1, а) – линейной части (ЛЧ), описываемой линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и нелинейного элемента (НЭ). Нелинейный элемент является безынерционным, и его входная x и выходная y величины связаны между собой нелинейными алгебраическими уравнениями. Если система содержит несколько нелинейных элементов, то ее в ряде случаев можно свести к рассматриваемому классу, заменив нелинейные элементы одним с результирующей статической характеристикой. Например, при параллельном, последовательном и встречно-параллельном соединении такая замена возможна. На рис. 8.1, б показана замена двух параллельно соединенных нелинейных звеньев со статическими характеристиками 1 и 2 одним звеном с характеристикой 3, полученной суммированием исходных характеристик по оси ординат.

Различают два вида нелинейных элементов: существенно нелинейные и несущественно нелинейные. *Нелинейность* считается *несущественной*, если ее замена линейным элементом не изменяет принципиальных особенностей системы и процессы в линеаризованной системе качественно не отличаются от процессов в реальной системе. Если такая замена невозможна, и процессы в линеаризованной и реальной системах сильно отличаются, то *нелинейность* является *существенной*.

Главная особенность существенно нелинейных систем заключается в том, что они не подчиняются принципу наложения, а форма и показатели переходного процесса зависят от величины и формы внешнего воздействия.

Другой важной особенностью динамики существенно нелинейных систем является зависимость условий устойчивости от величины внешнего воздействия. В связи с этим для нелинейных систем применяют понятия «устойчивость в малом», «устойчивость в большом», «устойчивость в целом».

Система *устойчива в малом*, если она устойчива только при малых начальных отклонениях. Система *устойчива в большом*, если она устойчива при больших начальных отклонениях. Система *устойчива в целом*, если она устойчива при любых отклонениях.

Специфической особенностью существенно нелинейных систем является также режим автоколебаний. *Автоколебания* - это устойчивые собственные колебания, возникающие из-за нелинейных свойств системы. Режим автоколебаний нелинейной системы принципиально отличается от колебаний линейной системы на границе устойчивости. В линейной системе при малейшем изменении ее параметров колебательный процесс становится либо затухающим, либо расходящимся. Автоколебания же являются устойчивым режимом и малые изменения параметров не приводят к их исчезновению.

Автоколебания в общем случае нежелательны, однако, в некоторых нелинейных системах они являются основным рабочим режимом.

Рассмотрим в качестве примера нелинейной системы автоматическую систему стабилизации напряжения с нелинейным управляющим устройством (рис. 8.2,а). Стабильное напряжение U_n на сопротивлении R_n поддерживается регулирующим транзистором T , работающим в ключевом режиме. Для сглаживания пульсаций тока и напряжения последовательно с нагрузкой включен LC-фильтр с нулевым диодом D . Управляющим устройством является триггер Шмитта, характеристика «вход-выход» которого приведена на рис. 8.2,б и имеет форму петли гистерезиса. На вход триггера Шмитта поступает разность задающего напряжения U_0 и напряжения обратной связи U_n . При достижении разности этих напряжений пороговых значений переключения триггера U_2 и U_1 последний изменяет состояние на своем выходе и через узел гальванической развязки переключает регулирующий транзистор поочередно в режимы отсечки и насыщения. Форма выходного напряжения системы стабилизации показана на рис. 8.2,в. Размах пульсаций ΔU выходного напряже-

ния определяется шириной зоны гистерезиса релейного элемента – триггера Шмитта.

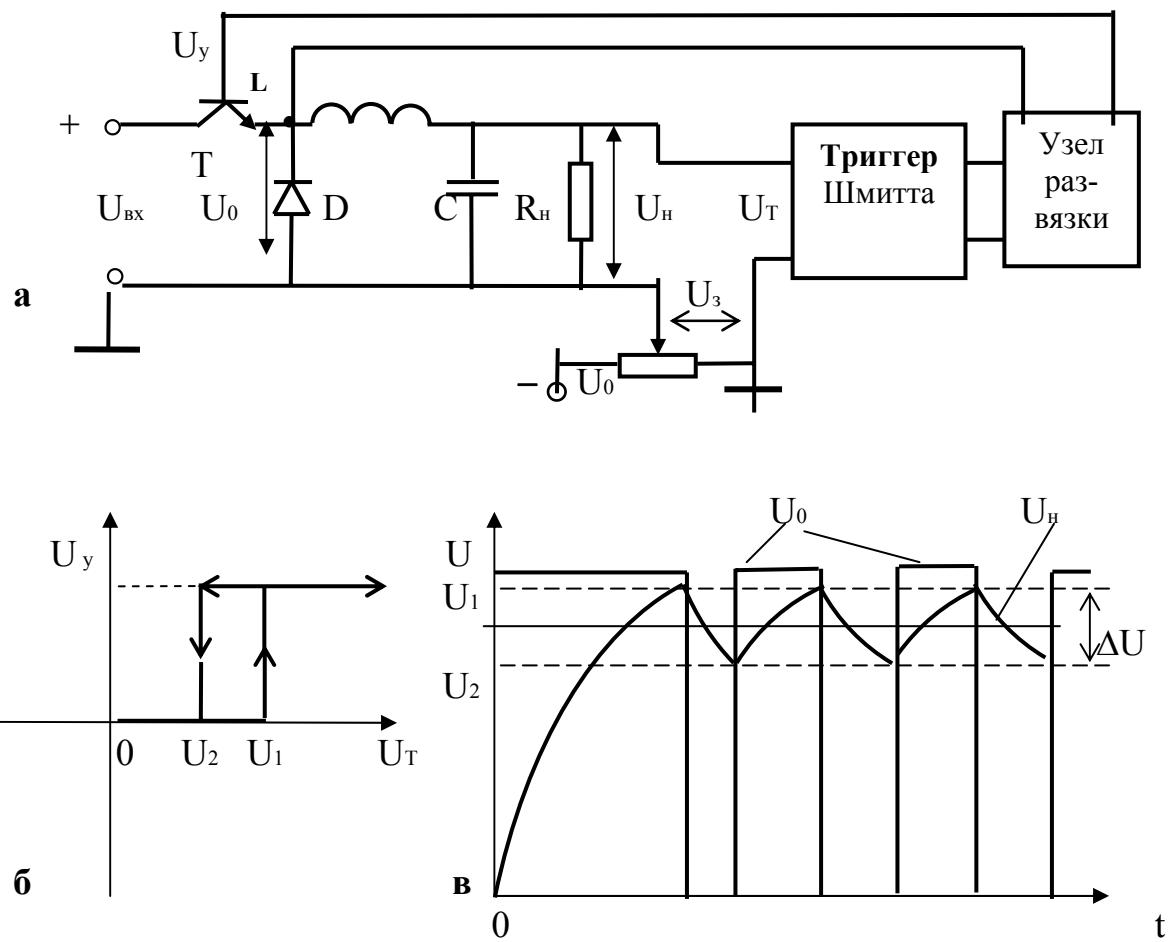


Рис. 8.2. Релейная система стабилизации напряжения

8.2. Типовые нелинейные элементы систем управления

Нелинейная часть САУ образована одним нелинейным элементом (рис. 8.1,а), выходная величина u_n которого может быть выражена как функция входной величины x_n и ее производной x'_n :

$$y_n = f(x_n, x'_n). \quad (8.1)$$

Простейшими нелинейными элементами являются *статические нелинейности*. У них выходная величина зависит от входной величины, причем эта зависимость строго однозначна. Примерами статических нелинейностей являются характеристики, показанные на рис. 8.3, а, б.

У *динамических нелинейностей* выходная величина зависит как от входной величины, так и от ее производной (рис. 8.3,в). Характеристика динамической нелинейности всегда неоднозначна.

Рассмотренные статические и динамические нелинейности относятся к классу нелинейностей с кусочно-линейными характеристиками.

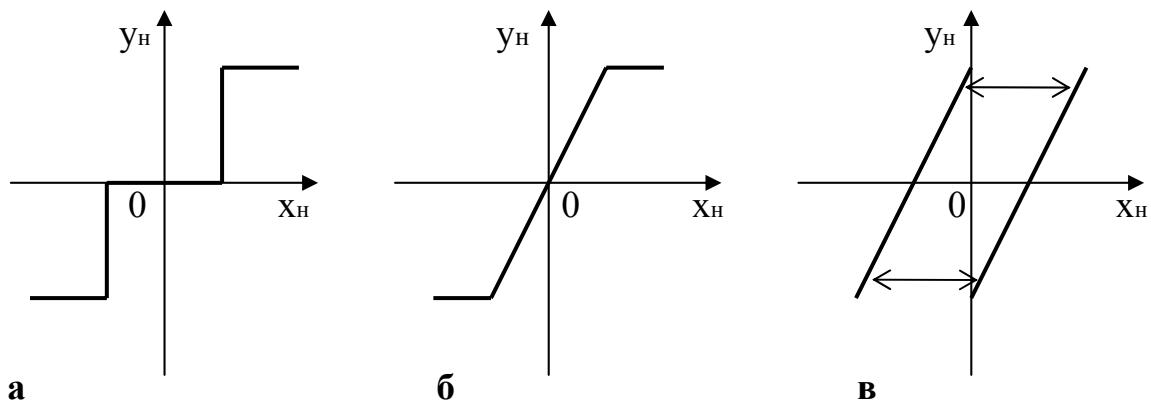


Рис. 8.3. Характеристики нелинейных элементов

В управляющих устройствах, наряду с релейными элементами, часто используются так называемые *особые нелинейности*: множительное звено, элементы с переменной структурой, элементы логического типа.

Для улучшения качества систем применяются управляющие устройства с переменной структурой, в которых специальный блок изменения структуры может включать в основной контур системы звенья с различными динамическими свойствами.

8.3. Метод фазовых траекторий

Метод фазовых траекторий представляет собой графо-аналитический способ исследования нелинейных систем. Сущность метода заключается в описании поведения систем при помощи наглядных геометрических представлений – фазовых портретов.

Свободное движение нелинейной динамической системы управления с одной управляемой величиной $x(t)$ в общем случае можно описать с помощью n дифференциальных уравнений первого порядка:

$$dx_j(t)/dt = f_j[x_1(t), x_2(t), \dots, x_j(t), \dots, x_n(t)], \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (8.2)$$

где $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, \dots , $x_{j+1}(t) = x_j'(t)$, $x_n(t) = x_{n-1}'(t)$ – фазовые переменные состояния.

Мгновенное состояние системы и ее дальнейшее поведение однозначно определены, если в данный момент времени $t = t_i$ известны значения всех n переменных x_j . Эти значения можно рассматривать как координаты точки $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ в n -мерном пространстве, которое называется *фазовым пространством*.

Точку с координатами $(x_1; x_2; \dots; x_n)$ называют *изображающей точкой*, а линию, по которой она перемещается при изменении состояния системы, - *фазовой траекторией*.

Конкретной группе начальных условий $x_1(0) = x_{10}; x_2(0) = x_{20}; \dots; x_n(0) = x_{n0}$ соответствует единственное решение системы (8.2) – определенная совокупность искомых функций времени $x_1(t); x_2(t); \dots; x_n(t)$. Поэтому каждой группе начальных условий соответствует только одна начальная точка и единственная фазовая траектория, а множеству групп начальных условий соответствует семейство траекторий, которое называется *фазовым портретом* системы.

Метод фазового пространства наиболее удобен для анализа систем второго порядка, так как фазовые траектории располагаются в одной плоскости – в фазовой плоскости переменных x_1 и x_2 . Фазовый портрет этих систем можно построить непосредственно по дифференциальному уравнению, не решая его.

Пусть описание системы представлено в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\left. \begin{array}{l} dx_1 / dt = f_1(x_1, x_2), \\ dx_2 / dt = f_2(x_1, x_2), \end{array} \right\} \quad (8.3)$$

где $x_1 = x$ – отклонение выходной величины или сигнала ошибки от уставившегося значения.

Если в качестве второй переменной состояния x_2 принята производная переменной $x_1 = x$, т.е. $x_2 = \dot{x}$, то всегда функция $f_1(x_1, x_2) = x_2$.

Разделив второе уравнение системы (8.3) на первое, можно получить уравнение фазовых траекторий в дифференциальной форме:

$$dx_2 / dx_1 = f_2(x_1, x_2) / x_2, \quad (8.4)$$

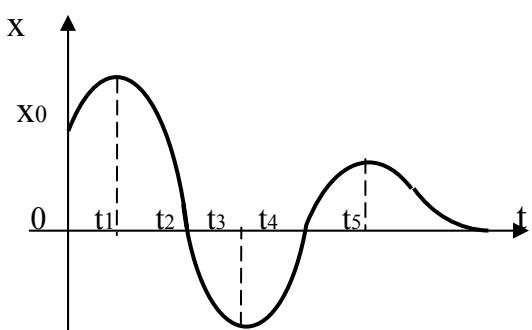
в котором независимой переменной является величина x_1 (не время t !), а зависимой – x_2 .

Разделяя далее переменные x_1 и x_2 и интегрируя уравнение (8.4), получаем уравнение фазовых траекторий в явном виде:

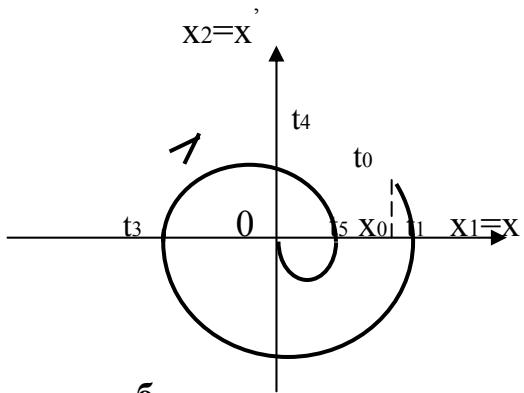
$$x_2 = F(x_1) + C_0, \quad (8.5)$$

где C_0 – постоянная интегрирования, зависящая от начальных условий.

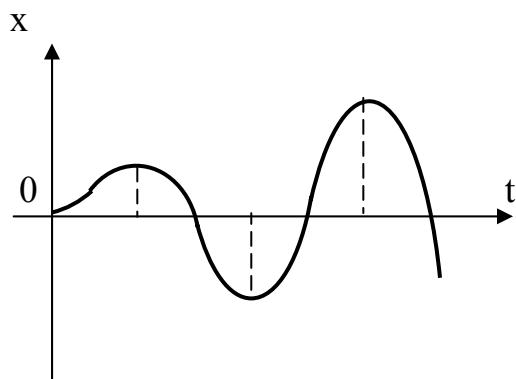
Рассмотрим характерные фазовые траектории (рис. 8.4,б,г,е) системы второго порядка, соответствующие затухающему, расходящемуся и незатухающему колебательным процессам (рис. 8.4,а,в,д).



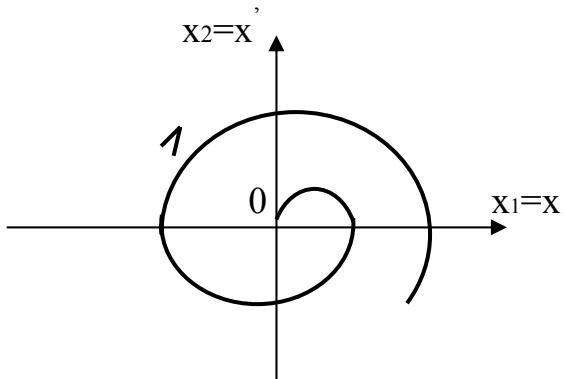
а



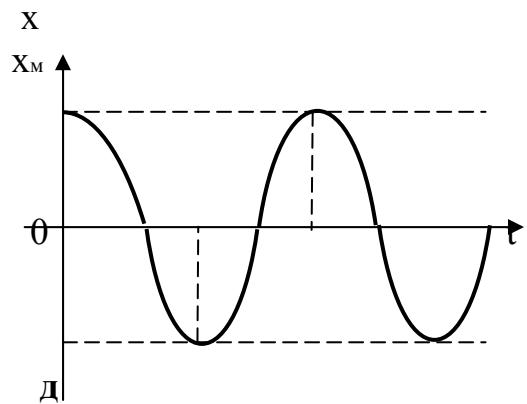
б



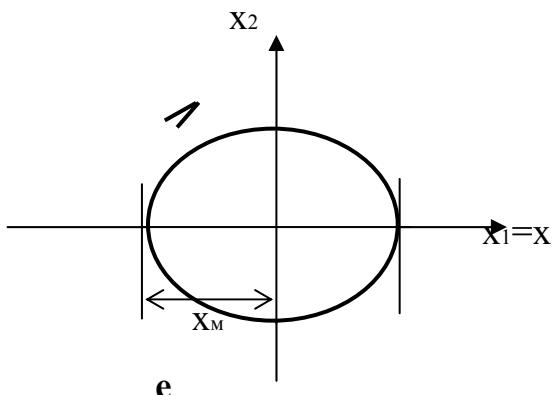
в



г



д



е

Рис. 8.4. Переходные процессы и фазовые траектории нелинейной системы

Моменты времени t_1, t_3, t_5 , когда кривые $x(t)$ достигают своих максимумов и минимумов, соответствуют пересечению фазовыми траекториями $x_1 = x$, а моменты прохождения кривыми $x(t)$ через нуль (t_2, t_4) – пересечению оси $x_2 = x$.

Самые важные для анализа нелинейных систем свойства фазовых траекторий заключаются в следующем:

1. Неустойчивому процессу соответствует фазовая траектория, удаляющаяся от начала координат.
2. Периодическому процессу соответствует замкнутая фазовая траектория, называемая предельным циклом.

Фазовый портрет нелинейной системы, обладающей кусочно-линейной или разрывной характеристикой, состоит из нескольких областей с различными фазовыми траекториями. Линии, отделяющие на плоскости одну область от другой, называются *линиями переключения*.

В точках пересечения фазовыми траекториями линий переключения происходит излом траекторий. Это происходит из-за смены правой части уравнения (8.4).

8.4. Метод гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации является приближенным методом исследования режима автоколебаний нелинейных систем. Этим методом можно определить условия возникновения и параметры автоколебаний как в системах второго порядка, так и в более сложных системах.

Метод заключается в замене существенно нелинейного элемента с характеристикой $f(x_n)$ эквивалентным линейным звеном с коэффициентом k_n . В замкнутой автоматической системе, работающей в режиме автоколебаний, условием эквивалентности служит равенство амплитуд и фаз выходного сигнала эквивалентного звена и первой гармоники выходного сигнала реального нелинейного элемента. При этом предполагается, что сигнал на входе нелинейного элемента является синусоидальным. Такое предположение справедливо во всех случаях, когда линейная часть системы достаточно инерционна и не пропускает высшие гармоники.

Пусть автоматическая система состоит из отдельных друг от друга линейной и нелинейной частей (см. рис. 8.1, а) и нелинейная часть описывается функцией (8.1). Предположим, что контур системы разомкнут (на выходе линейной части) и что на выходе нелинейного элемента действует синусоидальный сигнал

$$x_n(t) = x_{nm} \sin \omega t. \quad (8.6)$$

При этом на выходе нелинейного элемента будет возникать периодический сигнал $y_n(t)$, форма которого зависит от характера нелинейности и в общем случае существенно отличается от синусоидальной. Так, на выходе двухпозиционного реле без зоны нечувствительности (рис. 8.5, а) образуется периодический сигнал прямоугольной формы (рис. 8.5, б).

Уравнение (8.1) при синусоидальном воздействии можно записать в общем виде

$$y_n(t) = f[x(t), x'(t)] = f[x_{nm} \sin \omega t, x_{nm} \omega \cos \omega t]. \quad (8.7)$$

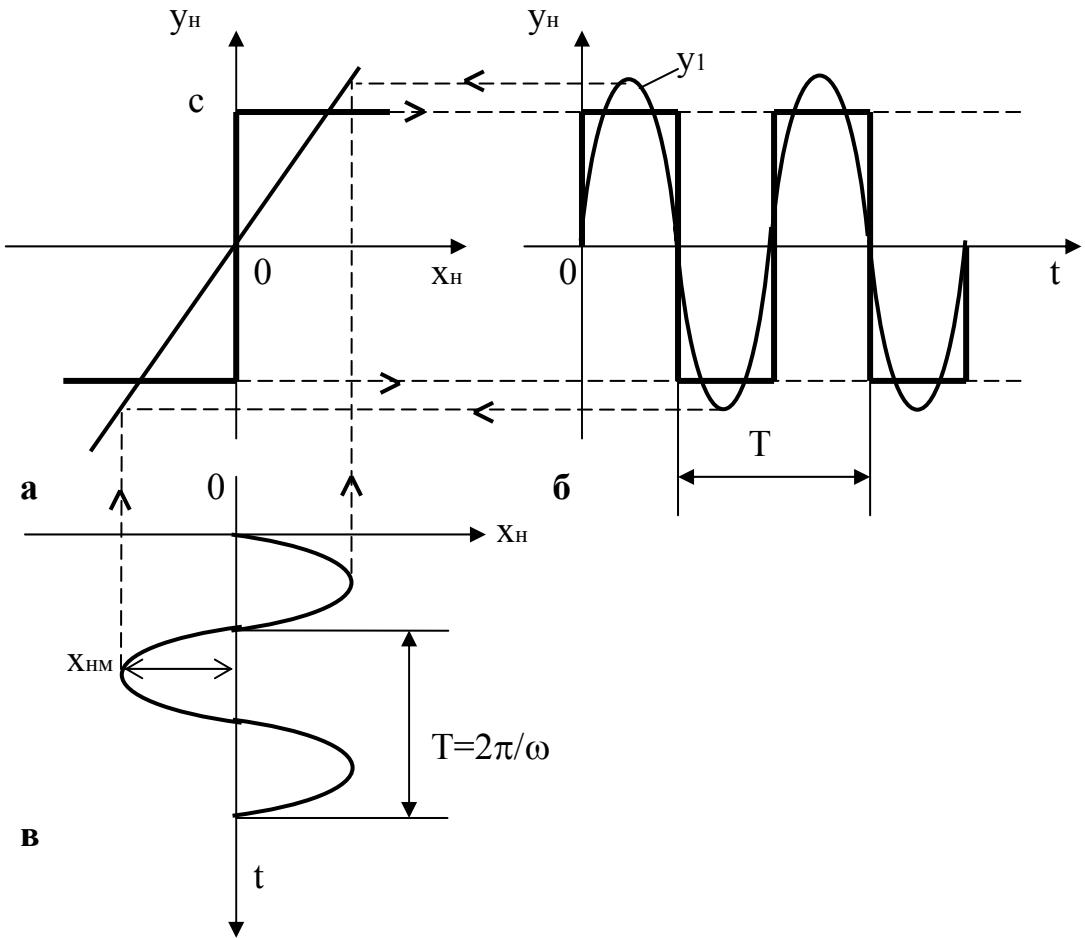


Рис. 8.5. Преобразование гармонического сигнала нелинейным элементом

Периодический сигнал на выходе нелинейного элемента может быть разложен в ряд Фурье и тем самым представлен суммой гармонических составляющих:

$$y_{nk}(t) = a_k \cos \omega k t + b_k \sin \omega k t = y_{km} \sin(\omega k t + \phi_k), \quad (8.8)$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются известными формулами, а параметры

$$y_{km} = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \phi_k = \arctg(a_k / b_k), \quad (k = 1, 2, \dots, \infty). \quad (8.9)$$

Для нелинейных элементов с кососимметричной относительно начала координат характеристикой характерно наличие постоянной составляющей $a_0/2$ и отсутствие всех коэффициентов четных гармоник, т.е. $a_{2k} = d_{2k} = 0$ и $y_{2km} = 0$.

При анализе замкнутой системы можно учитывать только первую гармонику и сигнал $y_n(t)$ на выходе элемента с кососимметричной характеристикой приближенно представить так:

$$y_h(t) \approx y_{h1}(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = y_{1m} \sin(\omega t + \phi_1). \quad (8.10)$$

Учитывая, что

$$\sin \omega t = x_h(t) / x_{hm}, \quad \cos \omega t = x_h'(t) / x_{hm}(t) / x_{hm} \omega \quad (8.11)$$

и вводя обозначения

$$q(x_{hm}) = b_1 / x_{hm}, \quad q_1(x_{hm}) = a_1 / x_{hm}, \quad (8.12)$$

можно вместо (8.10) записать

$$y_h(t) \approx q(x_{hm})x_h(t) + q_1(x_{hm})x_h'(t) / \omega \quad (8.13)$$

или в операторной форме

$$y_h(t) \approx q(x_{hm})x_h(t) + q_1(x_{hm})px_h(t) / \omega. \quad (8.14)$$

При выполнении указанных выше предпосылок нелинейное уравнение (8.7) может быть заменено линейным уравнением (8.13). Эта процедура называется *гармонической линеаризацией*, а коэффициенты $q(x_{hm})$ и $q_1(x_{hm})$ – *коэффициентами гармонической линеаризации*.

Гармоническая линеаризация принципиально отличается от обычной линеаризации, так как коэффициенты гармонически линеаризованного элемента непостоянны и зависят от амплитуды входного сигнала. Эквивалентная прямолинейная характеристика (рис. 8.5, а – тонкая линия) имеет различный наклон при разных амплитудах входного сигнала.

Применение современных программных моделирующих систем позволяет исследовать любые нелинейные системы значительно точнее и быстрее, чем рассмотренными методами.

8.5. Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем с помощью критерия Попова

Абсолютной устойчивостью называется устойчивость системы при любых начальных отклонениях для любой формы нелинейной характеристики, принадлежащей к одному из определенных классов. Нелинейности считаются одного класса, если их характеристики $f(x_h)$ находятся в секторе $[0, k_h]$ между осью абсцисс и прямой с угловым коэффициентом k_h (рис. 8.6, а). Крите-

рий Попова относится к частотным методам определения абсолютной устойчивости нелинейных систем.

Задача об исследовании абсолютной устойчивости возникает в связи с тем, что в некоторых случаях нелинейная характеристика звена является нестабильной и может быть охарактеризована только определенной областью.

Пусть известна частотная функция линейной части системы $W_L(j\omega)$ и задано значение параметра k , который является некоторым предельным параметром нелинейной характеристики $f(x_n)$, произвольно располагающейся в заданной области.

Необходимо определить, обеспечивается ли абсолютная устойчивость конкретной системы для любой характеристики $f(x_n)$, удовлетворяющей условиям:

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{f(x_n)}{x_n} \leq k & \quad \text{при} \quad x_n \neq 0, \\ f(0) = 0 & . \end{aligned} \quad (8.15)$$

В формулировке критерия используется понятие модифицированной а.ф.х.

Пусть линейная часть системы устойчива и имеет а.ф.х.

$$W_L(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (8.16)$$

Образуем из этой обычной а.ф.х. следующую видоизмененную а.ф.х., у которой мнимая часть получена умножением $Q(\omega)$ на ωT_m :

$$W_L^*(j\omega) = P(\omega) + j\omega T_m Q(\omega), \quad (8.17)$$

где $T_m = 1$ с – нормирующий множитель. Характеристика (8.17) и называется *модифицированной*.

Критерий абсолютной устойчивости равновесия нелинейной системы, удовлетворяющей вышеперечисленным требованиям, формулируется следующим образом:

для абсолютной устойчивости равновесия достаточно, чтобы модифицированная характеристика $W_L^(j\omega)$ не охватывала точку $(-1/k_n, 0)$ и через эту точку можно было провести прямую, не пересекающую характеристику $W_L^*(j\omega)$ (последняя лежит справа от прямой).*

На рис. 8.6, б показан случай, когда критерий устойчивости выполняется, а на рис. 8.6, в, г – случаи, когда не выполняется.

По наклону прямой Попова, “прижатой” к кривой $W_L^*(j\omega)$, можно судить о допустимом классе нелинейности: если прямая вертикальна, то нелинейность может быть только однозначной, а если она наклонена, то нелинейность может быть и однозначной и неоднозначной (с гистерезисом).

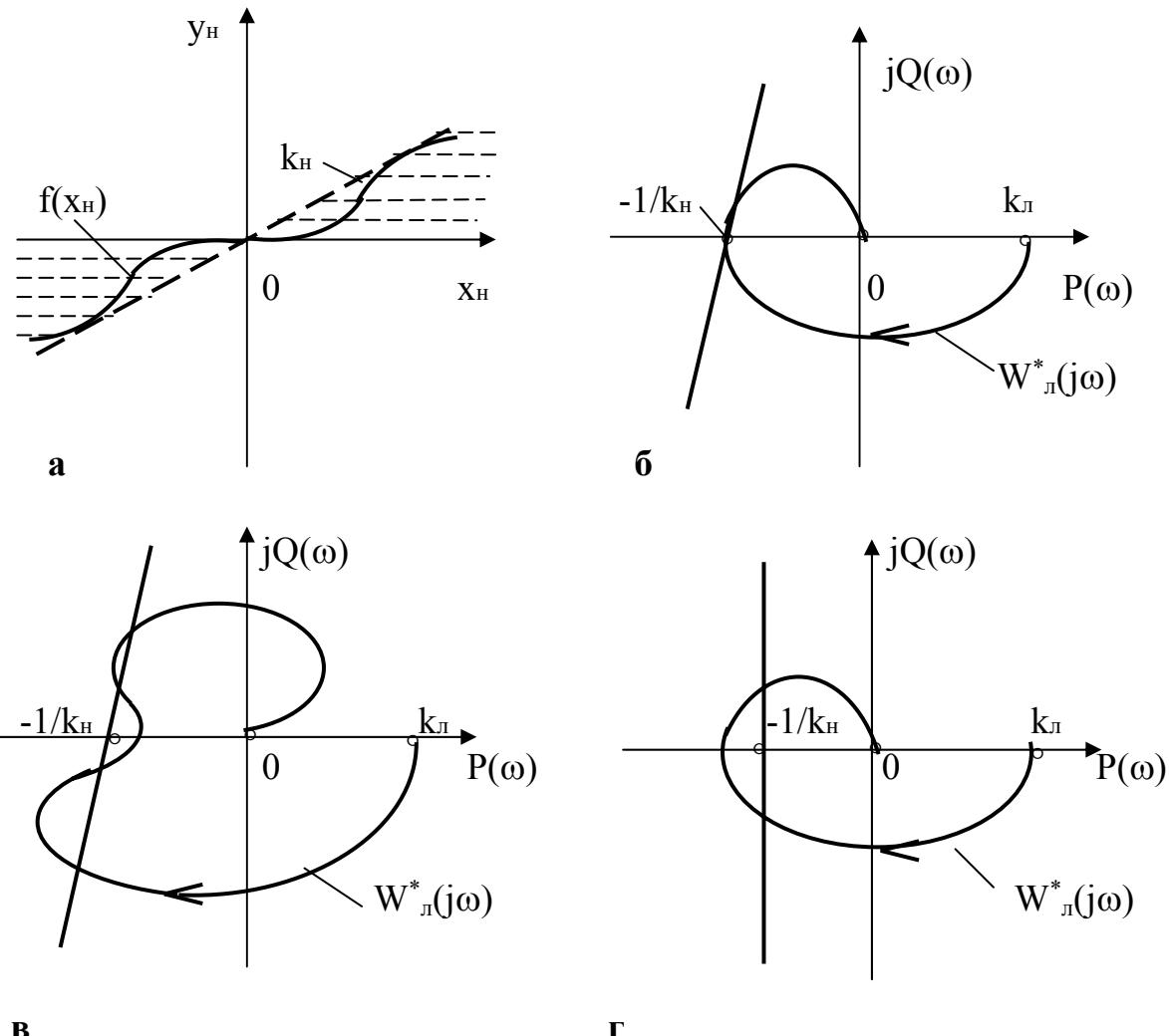


Рис. 8.6. Критерий абсолютной устойчивости Попова

Пример. Определить с помощью критерия Попова абсолютную устойчивость равновесия нелинейной системы, состоящей из трехпозиционного релейного элемента (рис. 8.7,а) с параметрами $b=1$, $c=8$ и линейной части:

$$W_l(j\omega) = k_l e^{-j\omega\tau} / (Tj\omega + 1) \quad (1)$$

с параметрами $k_l = 0,25$, $T = 10$ с.

Решение. Представим а.ф.х. (1) в виде

$$W_l(j\omega) = \frac{k_l(\cos \omega\tau - T\omega \sin \omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1} - j \frac{k_l(\sin \omega\tau + T\omega \cos \omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1}. \quad (2)$$

Соответствующая (2) модифицированная характеристика (рис. 8.7,б) описывается уравнением

$$W_n^*(j\omega) = \frac{k_n(\cos \omega\tau - T\omega \sin \omega\tau)}{T^2\omega^2 + 1} - j\omega \frac{k_n(\sin \omega\tau + T\omega \cos \omega\tau)}{T_2\omega^2 + 1}. \quad (3)$$

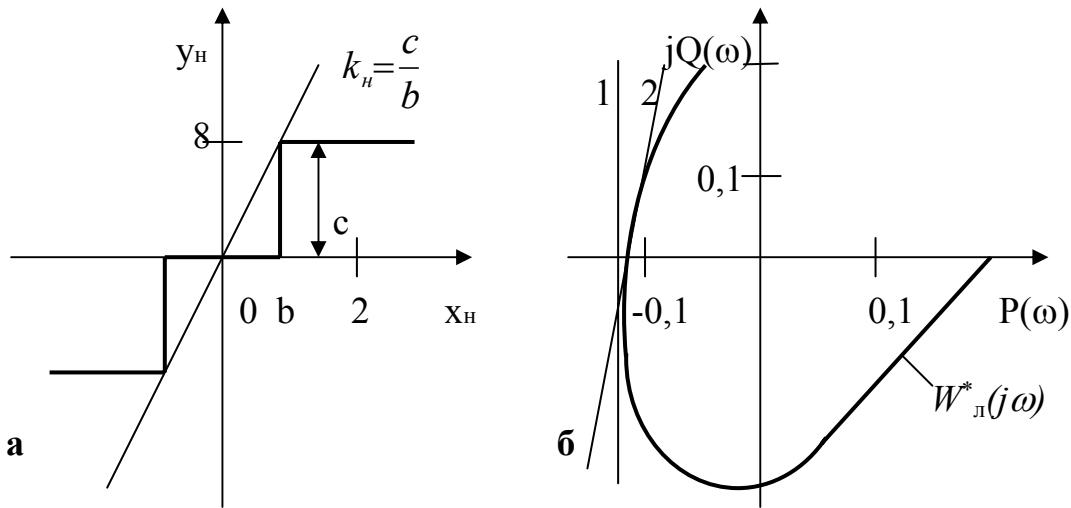


Рис. 8.7. Определение абсолютной устойчивости

Через точку c с абсциссой, равной $1/k_n = -0,125$, проведена прямая 1, которая не пересекается с кривой $W_n^*(j\omega)$. Следовательно, при заданных параметрах равновесие системы абсолютно устойчиво.

Для решения обратной задачи – определения допустимого по условию устойчивости равновесия значения зоны нечувствительности b проведем прямую 2, «прижатую» к характеристике $W_n^*(j\omega)$. Она пересекает действительную ось в точке с абсциссой $\approx 0,11$. Тогда допустимое значение для углового коэффициента $k_n \leq 1/0,11 \approx 9$, а для зоны нечувствительности $b \geq c/k_n \approx 0,9$.

При $b < 0,9$ состояние равновесия системы будет неустойчивым.

В некоторых случаях использование нелинейных систем управления затруднено из-за наличия низкочастотных автоколебаний большой амплитуды. Устранить этот недостаток можно путем компенсации нелинейностей. При этом нелинейная система относительно некоторых входных сигналов может рассматриваться как линейная.

Простейшим способом устранения нелинейности является включение параллельно или последовательно с основной нелинейностью $\varphi(\sigma)$ компенсирующей нелинейности $\varphi^{-1}(\sigma)$, имеющей обратный характер. Тогда такое соединение нелинейных элементов образует эквивалентный линейный элемент и система станет линейной.

Применяется также вибрационная компенсация нелинейностей. Такая компенсация является наиболее распространенным способом линеаризации релейных систем. Вибрационная компенсация осуществляется высокочастотным периодическим сигналом.

ГЛАВА 9

ОСНОВЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ И ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Общие сведения о дискретных системах

В последние годы в связи с интенсивным развитием вычислительной техники в промышленной автоматике все большее применение получают дискретные системы управления. Основным элементом дискретной системы является управляющая вычислительная машина (УВМ), которая может использоваться либо в супервизорном режиме, либо в режиме прямого цифрового управления (ПЦУ). В супервизорном режиме УВМ вырабатывает задания локальным контурам регулирования, реализованным с помощью традиционных технических средств автоматики. При режиме ПЦУ контуры регулирования образуются самой УВМ.

В системе УВМ работает в так называемом режиме *разделения времени* – поочередно подключается к отдельным контурам регулирования (рис. 9.1). Для этого используются специальные коммутирующие устройства – мультиплексор МП и демультиплексор ДМП, которые одновременно подключают цифровое вычислительное устройство ЦВУ к датчику D и исполнительному устройству ИУ 1-го контура. Периодичность подключения контуров к ЦВУ задается специальным устройством – таймером. Преобразование сигналов из аналоговой формы в цифровую, и наоборот, осуществляется аналого-цифровым преобразователем АЦП и цифро-аналоговым преобразователем ЦАП.

Таким образом, в системе с УВМ наряду с непрерывными сигналами y_l , x_l , u_l , действуют и дискретные сигналы u_l^* и y_l^* , представляющие собой последовательности электрических импульсов, а сама система управления поэтому относится к классу дискретных.

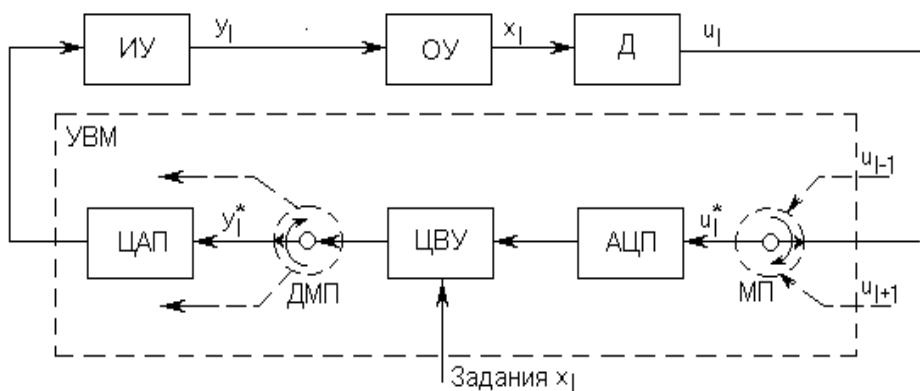


Рис. 9.1. Функциональная структура отдельного контура системы с УВМ

В дискретной системе управления один или несколько сигналов являются дискретными и представляют собой последовательность кратковременных импульсов. В состав дискретной системы наряду со звенями непрерывного действия входят элементы, преобразующие непрерывные сигналы в дискретные, и элементы, выполняющие обратное преобразование. Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называется *квантованием*.

Различают три вида квантования сигналов: по уровню; по времени; по уровню и времени (совместно). В зависимости от применяемого вида квантования все дискретные системы разделяют на три класса: релейные, импульсные и цифровые. В *релейных системах* квантование осуществляется только по уровню, в *импульсных* - по времени, а в *цифровых* – и по уровню и по времени.

Квантование по уровню заключается в фиксации вполне определенных дискретных значений непрерывного сигнала (рис. 9.2,а). При этом непрерывный сигнал (тонкая линия) заменяется ступенчато изменяющимся сигналом (жирная линия). Смежные дискретные значения отличаются друг от друга на постоянную величину Δx , называемую *интервалом квантования по уровню*. Переход с одного уровня на другой происходит в моменты времени, когда непрерывный сигнал достигает очередного фиксированного значения.

Квантование по времени заключается в фиксации мгновенных значений непрерывного сигнала в равностоящие друг от друга дискретные моменты времени (рис. 9.2,б). При этом квантованный по времени сигнал представляет собой так называемую *решетчатую функцию* – последовательность идеальных импульсов. Смежные моменты времени отличаются друг от друга на постоянную величину $\Delta t = T$, называемую *интервалом дискретности* (интервалом квантования по времени, периодом повторения).

При *совместном квантовании по уровню и по времени* (рис. 9.2,в) фиксируются дискретные по уровню значения, ближайшие к значениям непрерывного сигнала в дискретные моменты времени причем приоритетным является квантование по времени.

Квантование по уровню производится специальными элементами - квантователями. Простейшими квантователями являются двух- и трехпозиционные реле. Они квантуют непрерывный сигнал соответственно по двум и трем уровням. При достаточно большом числе уровней и малом интервале квантования, обеспечиваемых в УВМ, релейную систему можно приближенно рассматривать как непрерывную.

Квантование по времени осуществляется с помощью импульсного элемента. *Импульсный элемент* преобразует непрерывный входной сигнал в последовательность импульсов, амплитуда, длительность или период повторения которых зависят от значений входного сигнала в дискретные моменты времени. При этом преобразующее действие квантователя можно рассматривать как процесс *модуляции* последовательности одинаковых импульсов по

закону изменения входного непрерывного сигнала, а сам квантователь по времени - как импульсный модулятор.

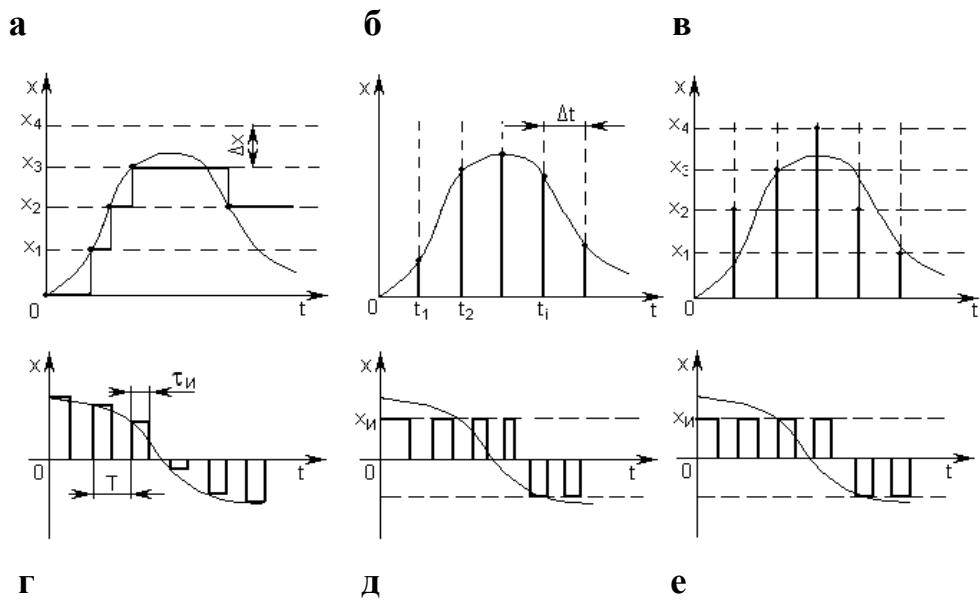


Рис. 9.2. Виды квантования и модуляции непрерывного сигнала

В зависимости от того, какой из параметров моделируемой последовательности импульсов следует закону изменения моделирующего сигнала $x(t)$, различают модуляции: амплитудно-импульсную (АИМ), широтно-импульсную (ШИМ) и частотно-импульсную (ЧИМ). При АИМ значениям моделирующего сигнала $x(t)$ пропорциональны амплитуды (высоты) импульсов x_u (рис. 9.2, г):

$$x_u \equiv x(t), T = \text{const}, \tau_u = \text{const}; \quad (9.1)$$

при ШИМ – длительности τ_u импульсов (рис. 9.2, д):

$$\tau_u \equiv x(t), x_u = \text{const}, T = \text{const}; \quad (9.2)$$

и при ЧИМ – частота ω_d импульсов (рис. 9.2, е):

$$\omega_d \equiv x(t), x_u = \text{const}, \tau_u = \text{const}, \quad (9.3)$$

где $\omega_d = 2\pi/T$ – частота дискретизации или частота повторения.

Совместное квантование сигналов по уровню и по времени в цифровых системах осуществляется при помощи АЦП. В АЦП, кроме квантования по уровню и по времени, происходит кодирование дискретных значений сигнала – представление их в виде последовательности чисел и запись в каком-либо цифровом коде.

Отметим, что при сравнительно большом шаге квантования по уровню цифровая система существенно нелинейна, а при достаточно малом шаге дискретностью по уровню можно пренебречь и рассматривать систему как линейную амплитудно-импульсную.

Дискретные системы управления с УВМ находят широкое применение в современной автоматике благодаря наличию следующих преимуществ перед непрерывными системами.

Дискретное управляющее устройство можно использовать для одновременного управления несколькими однотипными объектами. Для этого оно поочередно с периодом повторения T подключается к каждому объекту. Импульсные и цифровые элементы, входящие в дискретные системы управления, обеспечивают более высокую точность передачи и преобразования сигналов. Системы управления, скомплектованные из дискретных элементов, имеют, как правило, меньшие габаритные размеры, массу и стоимость. Они надежнее и лучше защищены от помех. Дискретные элементы более пригодны для агрегатно-блочного построения систем. Наконец, цифровые вычислительные устройства могут реализовать более сложные и более гибкие законы управления.

Далее рассмотрен наиболее распространенный вид дискретных систем – импульсные системы с АИМ, а также показано, что цифровые системы с УВМ (см. рис. 9.1) при определенных условиях могут анализироваться как импульсные с АИМ.

9.2. Функциональная и алгоритмическая структуры амплитудно-импульсной системы

В общем случае импульсный элемент может входить в состав любого функционального блока системы управления. Дискретный характер работы системы может быть обусловлен, например, использованием датчика периодического действия (различные анализаторы состава вещества). Но в большинстве случаев дискретность системы связана с наличием в ее контуре коммутирующих устройств МП и ДМП (см. рис. 9.1), которые периодически замыкают и разрывают цепь регулирования.

Рассмотрим типичную функциональную структуру импульсной системы (рис. 9.3,а). К такой структуре могут быть сведены почти все случаи включения импульсного элемента. Импульсные элементы ИЭ₁ и ИЭ₂, которые реально находятся в задатчике и обратной связи, могут быть учтены одним импульсным элементом ИЭ.

Импульсный элемент ИЭ, осуществляющий в системе квантование по времени, можно рассматривать как амплитудно-импульсный модулятор (рис. 9.4,а). Модулятор умножает несущий сигнал – последовательность одинаковых импульсов, поступающих с генератора импульсов ГИ, на модулирующий сигнал – входной непрерывный сигнал $x(t)$. Образующийся при

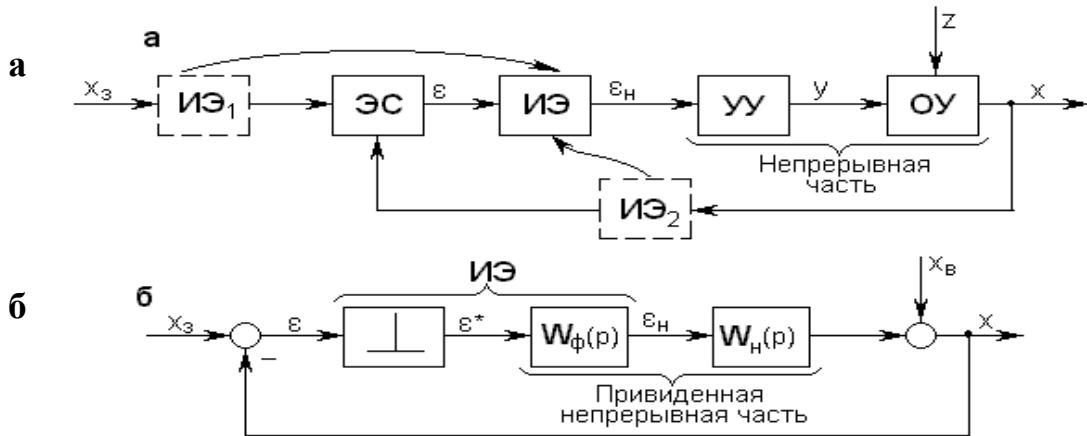


Рис. 9.3. Структуры амплитудно-импульсной системы управления:
а - функциональная, б - алгоритмическая

этом на выходе дискретный сигнал $x_u(t)$ представляет собой последовательность импульсов, амплитуды которых равны или пропорциональны мгновенным значениям непрерывного сигнала.

Для упрощения анализа системы с АИМ целесообразно реальный импульсный элемент ИЭ заменить эквивалентным последовательным соединением идеального импульсного элемента ИИЭ и формирующего элемента ФЭ (рис. 9.4,б). *Идеальный импульсный элемент* преобразует непрерывный сигнал $x(t)$ в последовательность мгновенных равностоящих друг от друга импульсов, площади которых равны значениям входного сигнала в дискретные моменты времени. *Формирующий элемент* или демодулятор образует из мгновенных импульсов такие импульсы, которые по форме совпадают с импульсами на выходе реального импульсного элемента.

Реакция формирующего элемента на единичный импульс, т.е. на дельта-функцию, есть не что иное, как весовая функция $w_\phi(t)$ этого элемента.

Поэтому, согласно известному соотношению, передаточная функция формирующего элемента

$$W_\phi(p) = \int_0^\infty w_\phi(t) e^{-pt} dt, \quad (9.4)$$

где $w_\phi(t) = w_u(t)$ – функция, описывающая импульс на выходе реального импульсного элемента при действии на входе дельта-функции.

Формирующий элемент является звеном непрерывного действия и его при анализе удобно объединять с непрерывной частью системы (рис. 9.3,б). Образующееся при этом соединение называется *приведенной непрерывной частью* системы. Передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W_{nh}(p) = W_\phi(p)W_n(p). \quad (9.5)$$

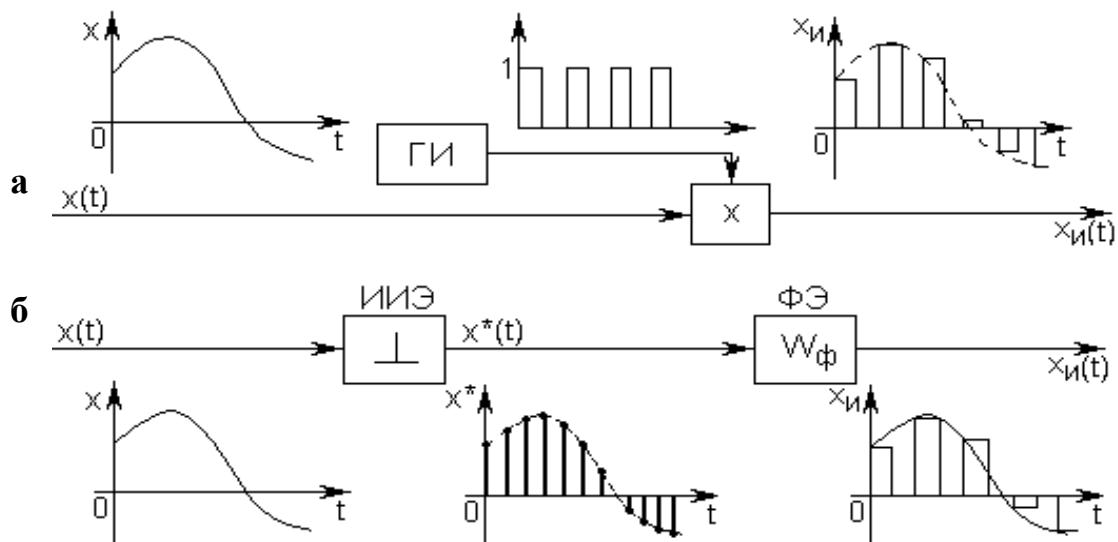


Рис. 9.4. Алгоритмическая структура импульсного элемента

В наиболее часто встречающемся случае, когда несущие импульсы имеют прямоугольную форму, формирующий элемент должен преобразовать единичную дельта-функцию в прямоугольный импульс с единичной высотой и длительностью $\tau_i = \gamma T$, где γ - скважность или относительная длительность. Такой импульс можно представить в виде разности двух ступенчатых функций, сдвинутых на время τ_i , т. е.

$$w_u(t) = 1(t) - 1(t - \tau_u). \quad (9.6)$$

Отсюда, согласно (9.4), передаточная функция формирующего элемента

$$W_\phi(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau_u} = \frac{1}{p} (1 - e^{-p\tau_u}). \quad (9.7)$$

Если длительность импульсов τ_u существенно меньше основных постоянных времени остальных звеньев непрерывной части системы, то формирующий элемент (9.7) может быть приближенно заменен безынерционным звеном $W_\phi(p) \approx \tau_u$.

При $\tau_u = T$ формирующий элемент (9.7) выдает в течение всего периода повторения T постоянный сигнал, равный значению входного сигнала в начале периода T . Поэтому в данном частном (но распространенном) случае формирующий элемент (9.7) называется *фиксирующим* или *запоминающим*. Передаточная функция фиксирующего элемента

$$W_\phi(p) = (1 - e^{-pT})/p. \quad (9.8)$$

Так как фиксацию мгновенного значения сигнала на постоянном уровне можно рассматривать как простейшую экстраполяцию – экстраполяцию полином нулевого порядка, то формирующий элемент в указанном частном порядке ($\tau_u = T$) называется также *экстраполятором нулевого порядка*.

В качестве простейшего примера рассмотрим последовательно соединенные квантователь по времени К и запоминающий элемент ЗЭ.

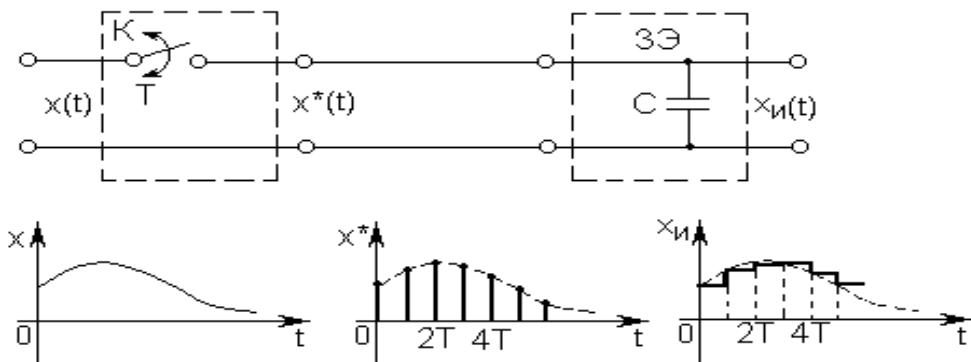


Рис. 9.5. Простейший квантователь и фиксатор

Так как квантователь по времени и запоминающий элемент являются важными частями дискретной системы, существенно влияющими на ее динамику, проанализируем их частотные свойства. Квантователь по времени или идеальный импульсный элемент можно рассматривать как генератор дополнительных гармоник, частота которых равна частоте дискретизации $\omega_d = 2\pi/T$. Спектр $X^*(j\omega)$ сигнала $x^*(t)$, квантованного по времени по принципу АИМ, равен следующей сумме смещенных спектров непрерывного входного сигнала $x(t)$:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - k\omega_d)], \quad (9.9)$$

где $X(j\omega)$ – спектр входного (квантуемого) сигнала (рис. 9.6, а). Очевидно, что при квантовании амплитуды всех гармоник уменьшаются в T раз. Это означает, что импульсный элемент эквивалентен по своим свойствам безынерционному звену с передаточным коэффициентом $1/T$.

В общем случае спектр $X^*(j\omega)$ существенно отличается от спектра $X(j\omega)$, он содержит как основную составляющую ($k = 0$), совпадающую с $X(j\omega)$, так и дополнительные составляющие ($k = \pm 1; \pm 2; \dots$), возникающие при квантовании.

Если ширина спектра квантуемого сигнала $\omega_x < \omega_d/2$, то дополнительные составляющие в основном диапазоне частот ($-\omega_d/2; +\omega_d/2$) не искажают форму спектра $X(j\omega)$ (рис. 9.6, б), т. е.

$$X^*(j\omega) \approx \frac{1}{T} X(j\omega), \quad (9.10)$$

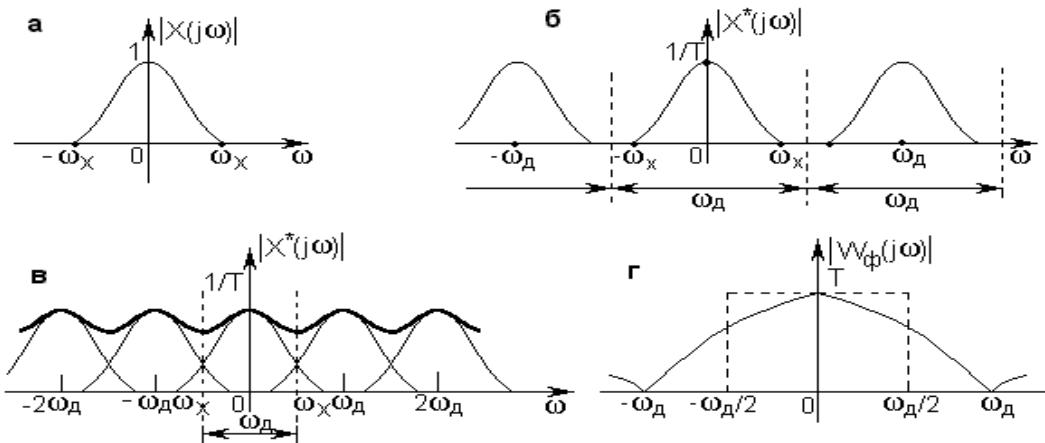


Рис. 9.6. Амплитудные спектры входного и выходного сигналов идеального квантователя и а. ч. х. фиксатора

но их наличие, тем не менее, приходится учитывать при восстановлении непрерывного сигнала по его дискретным значениям.

Если частота квантования недостаточно велика и $\omega_x > \omega_d/2$, то в основном диапазоне спектр $X(j\omega)$ искажается прилегающими составляющими с $k \neq 1$ (рис. 9.6,в).

Таким образом, на основе проведенных физических рассуждений можно сформулировать теорему о квантовании:

если непрерывный сигнал обладает спектром, ограниченным частотой ω_x , то его квантование по времени с частотой

$$\omega_d \geq 2\omega_x \quad (9.11)$$

не приводит к потере информации, т. е. сигнал однозначно и полностью представляется своими дискретными значениями, взятыми через интервал квантования:

$$\Delta t = T = 0,5 \frac{2\pi}{\omega_x}. \quad (9.12)$$

Строгое доказательство этой теоремы было дано советским ученым-радиохимиком В. А. Котельниковым в 1933 г. и американским математиком К. Шенноном в 1949 г.

Если сигнал $x(t)$ квантован в соответствии с условиями (9.11), (9.12) и его спектр $X(j\omega)$ в основной полосе ($-\omega_d/2; +\omega_d/2$) не искажен боковыми составляющими, то он может быть снова восстановлен в непрерывной форме при помощи формирующего элемента в виде идеального фильтра низкой

частоты с амплитудно-частотной характеристикой (рис. 9.6,г, штриховая линия):

$$|W_\phi(j\omega)| = \begin{cases} T \text{ при } |\omega| < \omega_0, \\ 0 \text{ при } |\omega| \geq \omega_0, \end{cases} \quad (9.13)$$

где $\omega_0 = 2\omega_x$.

Но такой фильтр физически нереализуем, поэтому на практике пользуются фиксатором (9.8), а. ч. х. которого

$$|W_\phi(j\omega)| = T \left| \frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega T / 2} \right| \quad (9.14)$$

существенно отличается от прямоугольной а. ч. х. (9.13). Очевидно, что такой реальный фиксатор несколько искажает исходный спектр $X(j\omega)$ в основной полосе и, кроме того, пропускает частично гармоники боковых составляющих с $\omega_x > \omega_0/2$.

При достаточно большой частоте повторения ($\omega_0 \gg \omega_x$) фиксатор (9.8) близок по своим свойствам к звену запаздывания

$$W_\phi(p) \approx T e^{-pT/2}, \quad (9.15)$$

и импульсную систему (см. рис. 9.3, а, б) можно рассматривать как чисто непрерывную, описываемую только передаточными функциями (9.5) и (9.15), но при этом эквивалентное звено запаздывания (9.15) ухудшает запас устойчивости системы.

Для упрощенного анализа динамики импульсной системы фиксатор (9.8) можно описывать приближенно передаточной функцией апериодического звена

$$W_\phi(p) \approx T / (Tp + 1), \quad (9.16)$$

которая тем точнее, чем больше частота квантования.

Заметим, что при определении минимально допустимой частоты квантования для замкнутой системы под частотой ω_x в выражениях (9.11) и (9.12) следует понимать частоту пропускания непрерывной части системы.

Так как обычно спектры входных сигналов и а. ч. х. системы убывают медленно и при конечных значениях ω_x не равны нулю (см. рис. 9.6, а), то на практике принимают частоту $\omega_0 = (5 - 10) \omega_x$, а ширину спектра ω_x определяют по 5 – 10%-ной зоне интенсивности спектра.

9.3. Математическое описание амплитудно-импульсной системы

Z – Преобразование. Математическое описание и анализ импульсной системы с амплитудной модуляцией существенно упрощаются, если все сигналы в системе (как в импульсной, так и в непрерывной части) рассматривать только в дискретные моменты времени $t = 0T; 1T; 2T; \dots; iT; \dots; \infty$. При этом каждый непрерывный сигнал $x(t)$ удобно представлять в виде *решетчатой функции* времени $x(iT)$ (см. рис. 9.2, б), значения которой определены только для дискретных моментов времени:

$$x^*(t) = x(iT) = x(t) \Big|_{t=iT}. \quad (9.17)$$

Между дискретными значениями аргумента t функция $x(iT)$ равна нулю.

Непрерывная функция $x(t)$ является огибающей для решетчатой функции $x(iT)$, и каждому конкретному сигналу $x(t)$ соответствует вполне определенный сигнал $x(iT)$.

При замене реальных непрерывных сигналов решетчатыми функциями часто удобнее переходить к относительному времени $\tilde{t} = t/T$, т. е. измерять время числом периодов квантования T . В этом случае относительный период $T = 1$, а решетчатая функция обозначается $x(i)$.

Последовательность неединичных импульсов, образующих решетчатую функцию на интервале $0 \leq iT \leq \infty$, можно представить в виде бесконечного ряда

$$x^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) \delta(t - iT), \quad (9.18)$$

где $\delta(t - iT)$ – смещенная дельта-функция, существующая только в моменты времени $t = iT$ и равная нулю при всех других значениях t .

Применим к сумме (9.18) преобразование Лапласа, учитывая при этом, что изображение суммы оригиналов равно сумме их изображений, а также, что, согласно теореме запаздывания, изображение смещенной дельта-функции равно e^{-piT} . Тогда изображение решетчатой функции (9.18) по Лапласу

$$X^*(p) = Z\{x^*(t)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) e^{-piT}. \quad (9.19)$$

Выражение (9.19) называется *дискретным преобразованием Лапласа*. Оно содержит трансцендентный сомножитель e^{-piT} , из-за которого изображения $X^*(p)$ и соответствующие передаточные функции становятся иррациональными функциями аргумента p , что создает определенные трудности при их использовании. Поэтому с целью получения передаточных функций импульсных систем в дробно-рациональной форме, свойственной непрерывным системам, целесообразна замена аргументов:

$$z = e^{pT}, \quad (9.20)$$

и тогда вместо (9.19) получают более удобное для практического использования преобразование

$$X(z) = Z\{x(iT)\} = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT)z^{-i}, \quad (9.21)$$

называемое z -преобразованием решетчатой функции (или дискретной последовательности) $x(iT)$.

Для большинства встречающихся в расчетах решетчатых функций z -преобразование может быть выполнено при помощи таблиц соответствия, которые приводятся в литературе по импульсным системам. В табл. 9.1 приведены z -изображения лишь некоторых функций времени, используемых далее в примерах.

Таблица 9.1.
 Z -изображения простейших функций времени

$x(t), (t \geq 0)$	$x(iT)$	$X(p)$	$X(z)$
$\delta(t)$	$\delta(iT)$	1	1
$1(t)$	$\sum_{i=0}^{\infty} \delta(iT) = \sum_{i=0}^{\infty} 1$	$1/p$	$z/(z-1)$
t	iT	$1/p^2$	$T_z/(z-1)^2$
t^2	$(iT)^2$	$2!/p^3$	$[T^2 z(z+1)]/(z-1)^3$
$e^{-\alpha t}$	$e^{-\alpha iT} = d^i, d = e^{-\alpha T}$	$1/(p+\alpha)$	$z/(z-d)$

Главное достоинство и удобство z -преобразования заключается в том, что сама запись z -изображения (9.21) указывает простой способ выполнения прямого и обратного преобразования:

- 1) чтобы по известной функции времени $x(t)$ найти ее z -изображение, необходимо лишь каждое дискретное значение $x(iT)$ умножить на z^{-i} , а затем свернуть получившийся степенной ряд в конечную сумму;
- 2) чтобы по известному изображению $X(z)$ найти соответствующий сигнал $x(t)$, необходимо представить изображение $X(z)$ в виде степенного ряда по убывающим степеням z^{-i} , получающиеся при этом числовые коэффициенты ряда есть дискретные значения $x(iT)$ сигнала $x(t)$.

Проиллюстрируем эти правила на простых функциях.

Пример 1. Найдем z -изображение единичной ступенчатой функции $x(t) = 1(t)$. Соответствующая ей последовательность идеальных импульсов

$$x(iT) = 1(iT), \quad i = 0; 1; \dots; \infty. \quad (1)$$

В соответствии с правилом 1 изображение

$$X(z) = 1z^0 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots. \quad (2)$$

Сумму бесконечного ряда (2) можно записать в компактной форме

$$X(z) = 1/(1-z^{-1}) = z/(z-1), \quad (3)$$

что и приведено в табл. 9.1.

Пример 2. Найдем функцию времени $x(t)$, изображение которой

$$X(z) = Tz/(z-1)^2. \quad (1)$$

Делением числителя на знаменатель выражение (1) можно представить в виде ряда

$$X(z) = 1Tz^{-1} + 2Tz^{-2} + 3Tz^{-3} + \dots. \quad (2)$$

В соответствии с правилом 2 значения решетчатой функции

$$x(1T) = 1T; \quad x(2T) = 2T; \quad x(3T) = 3T; \quad \dots. \quad (3)$$

или

$$x(iT) = iT, \quad (4)$$

откуда нетрудно установить, что

$$X(t) = t. \quad (5)$$

Полученное соответствие также приведено в табл. 9.1.

Свойства z -преобразования аналогичны свойствам обычного преобразования Лапласа. Приведем важнейшие из них.

1. Линейность:

$$Z\{a_1x_1(t) \pm a_2x_2(t)\} = a_1X_1(z) \pm a_2X_2(z). \quad (9.22)$$

2. Теорема о начальном значении оригинала

$$\lim_{i \rightarrow 0} x(iT) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z). \quad (9.23)$$

3. Теорема о конечном значении оригинала

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x(iT) = \lim_{z \rightarrow 1} [(z-1)/z]X(z). \quad (9.24)$$

4. Теорема о смещении аргумента оригинала (теорема запаздывания)

$$Z\{x(iT - lT)\} = X(z)z^{-l}. \quad (9.25)$$

Соотношение (9.25) означает, что умножение на z^{-l} соответствует задержке дискретного сигнала на l интервалов.

Перейдем к описанию передаточных свойств разомкнутых и замкнутых импульсных систем. Как и для обычных систем непрерывного действия, для

импульсных систем наиболее удобно использовать структурный метод и передаточные функции.

9.4. Характеристики типовой импульсной цепи

Введем понятие *типовой импульсной цепи*, в которую входит идеальный импульсный элемент (“ключ”) и непрерывная часть с передаточной функцией $W_h(p)$ (рис. 9.8). Рассмотрим динамику этой цепи, ее входной и выходной сигналы только в дискретные моменты времени iT (для чего на выходе цепи показан фиктивный квантователь, работающий синхронно с входным квантователем). Тогда передаточные свойства импульсной цепи можно характеризовать с помощью дискретной передаточной функции (д.п.ф.)

$$W(z) = Y(z)/X(z), \quad (9.26)$$

где $X(z)$ и $Y(z)$ – z -изображения входного и выходного сигналов цепи.

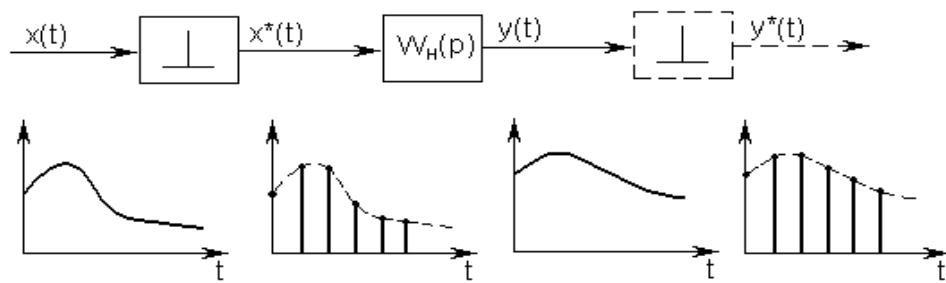


Рис. 9.8. Типичный участок импульсной системы

Д. п. ф. $W(z)$ импульсной цепи связана с весовой функцией $w(t)$ непрерывной части z -преобразованием:

$$W(z) = Z\{w(iT)\} = \sum_{i=0}^{\infty} w(iT)z^{-i}. \quad (9.27)$$

Непрерывная часть цепи задана обычно в виде передаточной функции $W(p)$, поэтому для отыскания функции $W(z)$ необходимо предварительно находить весовую функцию $w(t)$.

Так как в таблицах соответствия изображения по Лапласу и z -изображения обычно указываются рядом, то функцию $W(z)$ можно определить сразу по виду функции $W(p)$. Этому непосредственному переходу от $W(p)$ к $W(z)$ соответствует условная запись

$$W(z) = Z\{W(p)\}. \quad (9.28)$$

Если в типовой цепи после “ключа” стоит фиксатор (9.8), то д. п. ф. всей цепи может быть определена по формуле

$$\begin{aligned} W(z) &= Z \left\{ \frac{1 - e^{-pT}}{p} W_h(p) \right\} = (1 - z^{-1}) Z \left\{ \frac{W_h(p)}{p} \right\} = \\ &= \frac{z - 1}{z} Z \left\{ \frac{W_h(p)}{p} \right\} = \frac{z - 1}{z} Z \{h_h(t)\}, \end{aligned} \quad (9.29)$$

где $W_h(p)$ – передаточная функция непрерывной части (не включающей фиксатор).

Пример 3. Найдем д. п. ф. цепи, состоящей из “ключа” и инерционного звена первого порядка (без фиксатора на его входе):

$$W(p) = k_0/(T_0 p + 1). \quad (1)$$

Весовая функция звена

$$w(t) = (k_0/T_0) e^{-t/T_0} \quad (2)$$

или

$$w(iT) = (k_0/T_0) e^{-iT/T_0}. \quad (3)$$

Согласно табл. 9.1 д. п. ф. цепи

$$W(z) = Z \left\{ \left(k_0 / T_0 \right) e^{-iT/T_0} \right\} = \frac{k_0}{T_0} \frac{z}{z - e^{-iT/T_0}}. \quad (4)$$

Для сравнения приведем д. п. ф., полученную по формуле (9.37) для случая, когда на входе звена (1) включен фиксатор:

$$W(z) = k_0 (1 - e^{-T/T_0}) / (z - e^{-T/T_0}). \quad (5)$$

Способы получения д. п. ф. по формулам (9.26) – (9.28) являются точными, но их применение для реальных систем высокого порядка затруднительно. Поэтому в практических расчетах импульсных систем используют приближенные способы перехода от функций $W(p)$ к д. п. ф. $W(z)$. Эти способы основаны на замене производной по времени, фигурирующей в уравнении непрерывной части, так называемой первой разностью:

$$\frac{dy(t)}{dt} \approx \frac{\Delta y(t_i)}{\Delta t} = \frac{y(t_i) - y(t_{i-1})}{\Delta t}. \quad (9.30)$$

Подставляя разность (9.30) в дифференциальное уравнение непрерывного (аналогового) интегратора

$$dy(t)/dt = x(t), \quad (9.31)$$

можно получить разностное уравнение интегратора

$$y(iT) = y(iT - 1T) + Tx(iT), \quad (9.32)$$

которое легко записать в z -форме:

$$Y(z) = Y(z)z^{-1} + TX(z). \quad (9.33)$$

Отсюда д. п. ф. интегратора

$$W(z) = Y(z)/X(z) = T/(1 - z^{-1}) = Tz/(z - 1). \quad (9.34)$$

Учитывая, что обычная передаточная функция интегратора

$$W(p) = 1/p, \quad (9.35)$$

нетрудно получить одну из наиболее часто используемых формул приближенного перехода от передаточных функций непрерывной части (без учета фиксатора !) к д. п. ф.:

$$p = (z-1)/T_z. \quad (9.36)$$

Более точный переход от непрерывной системы к дискретной обеспечивает *подстановка Тастина*:

$$p = 2(z-1)/T(z+1). \quad (9.37)$$

Замена (9.36) соответствует приближенному (численному) интегрированию по методу прямоугольников, подстановка (9.37) – интегрированию трапеций.

При достаточно большой частоте дискретности, $\omega_d \gg \omega_n$, где ω_n – полоса пропускания непрерывной части системы, приближенные способы перехода, основанные на заменах (9.36) и (9.37), дают результаты, близкие к точным д. п. ф., а частотные свойства импульсной цепи эквивалентны свойствам непрерывной части с а. ф. х. $W_n(j\omega)/T$. Это условие эквивалентности обычно выполняется, если наибольшая постоянная времени непрерывной части больше периода квантования $T = \Delta t$.

Изложенные приемы математического описания импульсных систем с помощью z -изображений и соответствующих им разностных уравнений удобно использовать для цифрового моделирования чисто непрерывных сис-

тем на ЭВМ. Переход от обычных передаточных функций $W(p)$ к д. п. ф. $W(z)$ осуществляется аналогично – подстановками (9.36) и (9.37). Но если для цифрового моделирования используются точные д. п. ф., полученные по формуле (9.27) или по таблицам соответствия, то необходимо предварительно, перед переходом к разностному уравнению, найти д. п. ф. $W'(z)$, устанавливающую связь между огибающими входной и выходной дискретных последовательностей:

$$W'(z) = TW(z) . \quad (9.38)$$

Множителем T компенсируется ослабление сигналов, которое вносится реально квантователем в импульсной системе (и которое отсутствует в моделируемой непрерывной системе).

Любую д. п. ф., $W(z)$ или $W'(z)$, в общем случае можно представить в виде отношения полиномов переменной z :

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} = \frac{K(z)}{D(z)} \quad (9.39)$$

или

$$W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 z^{m-n} + b_1 z^{m-1-n} + \dots + b_m z^{-n}}{a_0 + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{K(z^{-1})}{D(z^{-1})} . \quad (9.40)$$

Передаточной функции (9.40) соответствует операторное уравнение динамики импульсной цепи в z -форме:

$$a_0 Y(z) + a_1 Y(z)z^{-1} + \dots + a_n Y(z)z^{-n} = b_0 X(z)z^{m-n} + b_1 X(z)z^{m-1-n} + \dots + b_m X(z)z^{-n} , \quad (9.41)$$

по которому легко получить разностное уравнение импульсной цепи (см. рис. 9.8) или моделируемой непрерывной системы:

$$a_0 y(iT) + a_1 y(iT - 1T) + \dots + a_n y(iT - nT) = b_0 x(iT + (m - n)T) + b_1 x(iT + (m - 1 - n)T) + \dots + b_m x(iT - nT) . \quad (9.41)$$

Разностные уравнения вида (9.41) обладают важным преимуществом перед обыкновенными дифференциальными уравнениями: разрешенные относительно $y(iT)$ они уже в самой своей записи содержат алгоритм решения.

Пример 4. Определим точную и приближенные д. п. ф. импульсной цепи, состоящей из “ключа”, фиксатора (9.8) и идеального интегратора

$$W_h(p) = k / p. \quad (1)$$

Согласно (9.37) и табл. 9.1 точная д. п. ф.

$$W(z) = \frac{z-1}{z} Z\left\{ \frac{k}{p^2} \right\} = \frac{z-1}{z} \frac{kTz}{(z-1)^2} = \frac{kT}{z-1}. \quad (2)$$

Подстановка (9.36) дает для рассматриваемой цепи с фиксатором следующую приближенную д. п. ф.

$$W(z) \approx W_h(p) \Big|_{p=(z-1)/Tz} = \frac{kTz}{z-1}, \quad (3)$$

а подстановка Тастина (9.37) – более сложную, но более точную д. п. ф.

$$W(z) \approx W_h(p) \Big|_{p=2(z-1)/T(z+1)} = \frac{kT(z+1)}{2(z-1)}. \quad (4)$$

9.5. Характеристики замкнутой импульсной системы

Для определения д. п. ф. замкнутой импульсной системы можно использовать правила структурных преобразований типовых соединений, но при этом следует помнить, что:

- 1) обычные правила структурных преобразований справедливы для импульсных систем, если каждая ветвь типового соединения представляет собой типовую импульсную цепь (см. рис. 9.8), состоящую из идеального квантователя (на входе цепи) и непрерывной части;
- 2) при иной структуре цепи и всего типового соединения эквивалентная д. п. ф. определяется более сложными правилами.

Для основной схемы одноконтурной импульсной системы (см. рис. 9.6, б) д. п. ф. по каналу $x_3 - x_1$

$$\Phi_{x_3}(z) = X(z) / X_3(z) = W(z) / (1 + W(z)) \quad (9.43)$$

и по каналу $x_3 - \mathcal{E}$

$$\Phi_{\mathcal{E}_3}(z) = E(z) / X_3(z) = 1 / (1 + W(z)), \quad (9.44)$$

где $W(z) = K(z)/D(z)$ – д. п. ф. разомкнутого контура, представляющего собой (в данной схеме) типовую импульсную цепь.

Характеристическое уравнение импульсной системы

$$1 + W(z) = 0 \quad (9.45)$$

или в развернутых формах

$$D(z) + K(z) = F(z) = 0, \quad (9.46)$$

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (9.47)$$

Пример 5. Определим характеристики замкнутой импульсной системы (см. рис. 9.6, б), разомкнутый контур которой соответствует цепи, рассмотренной в примере 4.

Подставляя точную д. п. ф. (9.37) в формулы (9.43) и (9.44), получим соответствующие д. п. ф. замкнутой системы:

$$\Phi_{x_3}(z) = X(z) / X_3(z) = kT / (z + Kt - 1); \quad (1)$$

$$\Phi_{\varepsilon_3}(z) = E(z) / X_3(z) = (z - 1) / (z + Kt - 1). \quad (2)$$

Характеристическое уравнение системы

$$z + kT - 1 = 0. \quad (3)$$

Найдем операторное уравнение динамики системы по каналу $x_3 - \varepsilon$. Разделив предварительно числитель и знаменатель д. п. ф. (9.66) на z , получаем

$$E(z) [1 + (kT - 1)z^{-1}] = X_3(z) [1 - z^{-1}] \quad (4)$$

Уравнению (9.68) соответствует разностное уравнение в рекуррентной форме (при $T = 1$):

$$\varepsilon(i) = (1 - kT) \varepsilon(i - 1) + x_3(i) - x_3(i - 1). \quad (5)$$

9.6. Основное условие и критерии устойчивости импульсных систем

Динамические свойства импульсных систем с амплитудной модуляцией во многом аналогичны динамическим свойствам непрерывных систем. Поэтому методы анализа таких импульсных систем являются аналогами соответствующих методов исследования непрерывных систем.

Устойчивость импульсной системы управления, как и устойчивость непрерывной системы, определяется характером ее свободного движения. Импульсная система устойчива, если свободная составляющая переходного процесса $x_c(iT)$ с течением времени затухает, т. е. если

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_c(iT) = 0. \quad (9.47)$$

Свободная составляющая $x_c(iT)$ является решением однородного разностного уравнения

$$(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n) X(z) = 0. \quad (9.48)$$

Решение уравнения (9.71) при отсутствии у него одинаковых корней z представляет собой сумму

$$x_c(iT) = \sum_{k=1}^n C_k z_k^i, \quad (9.49)$$

где C_k – постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий; z_k – корни характеристического уравнения

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (9.50)$$

Из выражения (9.72) видно, что при $i \rightarrow \infty$ решение $x_c(iT)$ стремится к нулю лишь в том случае, если все корни z_k по модулю меньше единицы, т. е. если

$$|z_k| < 1, k = 1; 2; \dots; n. \quad (9.51)$$

Запись (9.74) выражает общее условие устойчивости:

для устойчивости импульсной системы необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения системы находились внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 9.9, а).

Если хотя бы один корень z_k располагается на окружности единичного радиуса, то система находится на границе устойчивости. При $|z_k| > 1$ система неустойчива.

Таким образом, единичная окружность в плоскости корней z_k является границей устойчивости и, следовательно, играет такую же роль, как мнимая ось в плоскости корней p_k (рис. 9.9, б). Этот вывод вытекает также из основной подстановки (9.20) метода z -преобразования. Действительно, пусть $p_k = \alpha_k \pm j\beta_k$. Тогда

$$z_k = e^{p_k T} = e^{\alpha_k T} e^{\pm j\beta_k T}, \quad (9.52)$$

и требование $|z_k| < 1$ сводится к неравенству

$$|e^{\alpha_k T}| < 1, \quad (9.53)$$

откуда следует известное в теории непрерывных систем условие устойчивости

$$\alpha_k < 0. \quad (9.54)$$

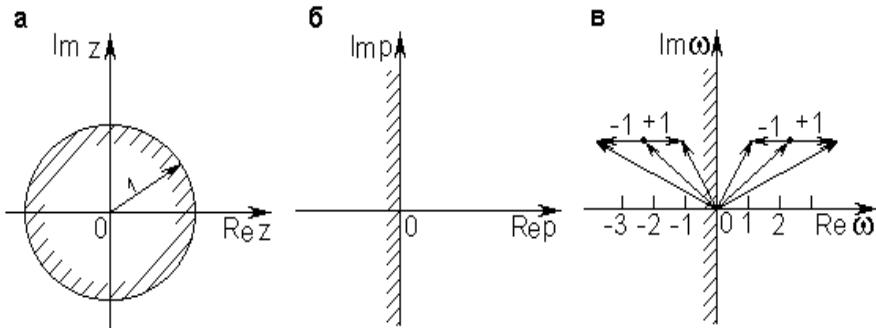


Рис. 9.9. Области устойчивости в плоскости корней

Для суждения об устойчивости импульсных систем можно использовать обычные критерии устойчивости линейных систем, но при этом приходится учитывать некоторые особенности импульсных систем. Так, для того чтобы применить критерий Гурвица, необходимо предварительно в уравнении (9.73) произвести замену переменной z на переменную ω путем подстановки:

$$z = (w + 1)/(w - 1) \quad (9.55)$$

и получить преобразованное характеристическое уравнение

$$a'_0 w^n + a'_1 w^{n-1} + \dots + a'_n = 0. \quad (9.56)$$

Корням уравнения (9.73), расположенным в плоскости корней внутри единичного круга (см. рис. 9.9,а), теперь будут соответствовать корни преобразованного уравнения (9.79), находящиеся в плоскости корней w_k слева от мнимой оси (рис. 9.9,в). Действительно, если $|z_k| < 1$, то модуль числителя в выражении (9.78) должен быть меньше модуля знаменателя, т. е. $|w_k + 1| < |w - 1|$. А это возможно лишь в том случае, если вектор w_k расположен в левой полуплоскости (см. рис. 9.9,в).

При использовании *критерия Михайлова* в характеристический полином $F(z)$ подставляют $z = e^{j\omega T}$, изменяют ω от 0 до π/T и в комплексной плоскости строят годограф вектора $F(e^{j\omega T})$. Импульсная система устойчива, если при возрастании ω от 0 до π/T характеристический вектор $F(e^{j\omega T})$ повернется против часовой стрелки на угол $n\pi$. Если годограф характеристического вектора проходит через начало координат, то система находится на границе устойчивости.

Годографы вектора $F(e^{j\omega T})$ для устойчивой и неустойчивой системы второго порядка показаны на рис. 9.10, а.

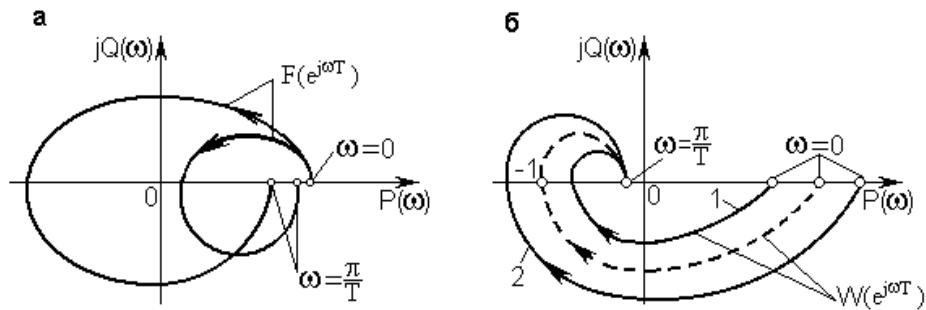


Рис. 9.10. Критерий Михайлова (а) и Найквиста (б)
для импульсной системы

Отметим, что импульсные системы второго и даже первого порядка, в отличие от непрерывных систем такого же порядка, могут быть неустойчивыми при положительных коэффициентах характеристического уравнения. Это объясняется тем, что фиксатор, содержащийся обычно в контуре импульсной системы, вносит дополнительное отставание по фазе.

Критерий Найквиста для импульсных систем формулируется так же, как и для непрерывных систем, система устойчива, если а. ф. х. $W(e^{j\omega T})$ устойчивого разомкнутого контура не охватывают точку $(-1; j0)$.

Характеристики устойчивой импульсной системы и неустойчивой системы, находящейся на границе устойчивости, показаны штриховыми линиями на рис. 9.10, б.

Устойчивость разомкнутого контура импульсной системы определяется устойчивостью ее непрерывной части, если последняя устойчива, то и весь контур (включая импульсный элемент) устойчив.

Следует иметь в виду, что, хотя импульсный элемент не влияет на устойчивость разомкнутого контура, он существенно влияет на устойчивость и качество замкнутой системы. При малых периодах повторения частотная характеристика разомкнутого контура совпадает с частотной характеристикой непрерывной части, и устойчивость импульсной системы полностью определяется свойствами непрерывной части. По мере увеличения периода повторения у большинства систем уменьшается предельный передаточный коэффициент и ухудшаются динамические свойства. Однако на некоторые структурно-неустойчивые непрерывные системы и на системы с запаздыванием, а. ф. х. которых заходит в правую полуплоскость, импульсный элемент оказывает стабилизирующее действие. Для таких систем рекомендуется период повторения T выбирать из условия

$$T \geq \pi/\omega_o, \quad (9.57)$$

где ω_o – частота, при которой а. ф. х. непрерывной части пересекает положительную мнимую ось $Q(\omega)$.

Пример 6. Определим с помощью критерия Гурвица предельное значение передаточного коэффициента импульсной системы, рассмотренной в примере 5.

Характеристическое уравнение системы

$$z + kT - 1 = 0. \quad (1)$$

После подстановки (9.76) уравнение принимает вид

$$kT\omega + 2 - kT = 0, \quad (2)$$

и для него условие устойчивости Гурвица заключается, как известно, в положительности коэффициентов, т. е.

$$a'_0 = kT > 0 \text{ и } a'_1 = 2 - kT > 0, \quad (3)$$

отсюда допустимые пределы изменения передаточного коэффициента

$$0 < k < 2/T. \quad (4)$$

9.7. Оценка качества импульсных систем

Качество импульсных систем управления характеризуется такими же показателями, как и качество непрерывных систем: точностью в установившихся режимах, длительностью и перерегулированием переходного процесса.

Длительность и перерегулирование оценивают непосредственно по переходной характеристике. Переходная характеристика импульсной системы строится гораздо проще, чем для непрерывной системы. Для этого записывают z -изображение выходной величины при единичном ступенчатом воздействии

$$X(z) = \frac{z}{z - 1} \Phi(z), \quad (9.58)$$

а затем по изображению находят оригинал – решетчатую функцию $x(iT)$.

В простых случаях функцию $x(iT)$ можно найти при помощи таблиц обратного z -преобразования, разложив предварительно изображение $X(z)$ на простые дроби.

В тех случаях, когда разложение на дроби связано с трудностями, целесообразно разложить функцию $X(z)$ в степенной ряд по отрицательным степеням z (делением числителя на знаменатель):

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z^{-i} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_l z^{-l} + \dots \quad (9.59)$$

Из определения z -преобразования (9.21) вытекает, что коэффициенты ряда (9.86) по степеням z^{-i} представляют собой значения переходной характеристики $h(t)$ в дискретные моменты времени $t = iT (i = 0; 1; 2; \dots)$, т. е.

$$c_0 = x(0); c_1 = x(T); c_2 = x(2T); \dots; c_l = x(lT) \dots \quad . \quad (9.60)$$

Импульсные системы обладают особенностью, так как переходные процессы в них могут заканчиваться за конечное число периодов T , равное порядку системы n . Условием получения конечной длительности переходного процесса является равенство всех (кроме первого) коэффициентов характеристического уравнения (9.46) нулю, т. е.

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0. \quad (9.61)$$

При этом характеристический полином системы имеет вид

$$F(z) = a_0 z^n, \quad (9.62)$$

а изображение выходной величины оказывается конечным рядом отрицательных степеней z :

$$X(z) = \frac{z}{z-1} \Phi(z) = \frac{z}{z-1} \frac{K(z)}{a_0 z^n} = c_0 + c_1 z^{-1} + \dots + c_n z^{-n}, \quad (9.63)$$

что соответствует переходному процессу с конечной длительностью $t_n = nT$.

При любом другом соотношении коэффициентов длительность переходного процесса больше nT . Поэтому процесс с конечной длительностью будет оптимальным по быстродействию.

Выполнение условия (9.88) достигается, как правило, введением в контур системы непрерывных и импульсных корректирующих устройств.

Точность импульсной системы оценивают по установившемуся значению сигнала ошибки (согласно теореме (9.32))

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{i \rightarrow \infty} \varepsilon(iT) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} E(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \Phi_\varepsilon(z) X_3(z). \quad (9.64)$$

При ступенчатом воздействии $x_3(t) = aI(t)$ установившаяся ошибка

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{1}{1 + W(z)} \frac{az}{z-1} = \frac{a}{1 + W(1)}. \quad (9.65)$$

Отсюда видно, что при ступенчатом воздействии ошибка будет равна нулю, если передаточная функция $W(z)$ разомкнутого контура имеет хотя бы один полюс, равный единице.

Аналогично можно показать, что при линейном воздействии ошибка равна нулю, если не менее двух полюсов равны единице.

Пример 7. Построим переходную характеристику системы, состоящей из “ключа”, фиксатора (9.8) и идеального интегрирующего звена.

Д. п. ф. разомкнутого контура такой системы

$$W(z) = kT/(z - 1). \quad (1)$$

Д. п. ф. системы по задающему воздействию

$$\Phi_{x3}(z) = kT/(z + kT - 1). \quad (2)$$

При единичном ступенчатом воздействии изображение входного сигнала

$$X(z) = \frac{z}{z - 1} \frac{kT}{z + kT - 1} \quad (3)$$

можно легко разложить на две дроби

$$X(z) = \frac{z}{z - 1} - \frac{z}{z - (1 - kT)} \quad (4)$$

и, пользуясь таблицами обратного z -преобразования, записать переходную функцию

$$x(iT) = 1(iT) - (1 - kT)^i. \quad (5)$$

Построенные по выражению (9.97) переходные процессы при $kT = 0,5$ (кривая 1), $kT = 1$ (кривая 2), $kT = 1,5$ (кривая 3) приведены на рис. 9.11.

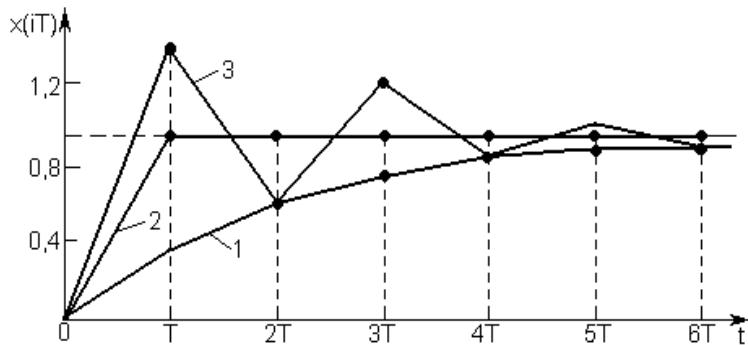


Рис. 9.11. Переходные процессы в импульсной системе

Очевидно, что при $kT = 1$ процесс оптимален, потому что перерегулирование равно нулю, длительность процесса минимальная.

При каждом конкретном значении параметра kT переходную функцию можно найти также путем разложения изображения $X(z)$ в степенной ряд (9.86). Например, при $kT = 1,5$ в результате деления числителя выражения (9.95) на знаменатель получим

$$X(z) = 1,5z^{-1} + 0,75z^{-2} + 1,125z^{-3} + 0,937z^{-4} + \dots \quad (6)$$

Коэффициенты этого ряда соответствуют ординатам колебательного переходного процесса на рис. 9.11 (кривая 3).

Пример 8. Определим для системы, рассмотренной в примере 1, установившееся значение ошибки при ступенчатом и линейном воздействии.

Передаточная функция систем для сигнала ошибки

$$\Phi_{\varepsilon_3}(z) = (z - 1)/(z + kT - 1). \quad (1)$$

Так как д. п. ф. разомкнутого контура $W(z)$ имеет полюс $z = 1$, то при ступенчатом воздействии установившаяся ошибка равна нулю.

При линейном воздействии $x(t) = at$ установившаяся ошибка

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} \frac{z-1}{z+kT-1} \frac{aTz}{(z-1)^2} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{aT}{z+kT-1} = \frac{a}{k}. \quad (2)$$

9.8. Структура и характеристики цифровой системы управления

Перспективным направлением в технике автоматического управления является использование цифровых вычислительных машин в режиме ПЦУ. При осуществлении этого режима УВМ включают непосредственно в контур автоматической системы управления. УВМ функционирует в реальном масштабе времени и в темпе хода технологического процесса вырабатывает управляющие воздействия, которые через исполнительные устройства передаются на управляемый объект. Одновременно УВМ выполняет функции задающего и сравнивающего устройства. В качестве УВМ, работающей в режиме ПЦУ, используются микроЭВМ и микропроцессорные цифровые регуляторы.

Рассмотрим типичную функциональную структуру одноконтурной цифровой системы управления (рис. 9.12, а). АЦП квантует непрерывный сигнал ε по уровню и по времени и представляет его в цифровом коде. При

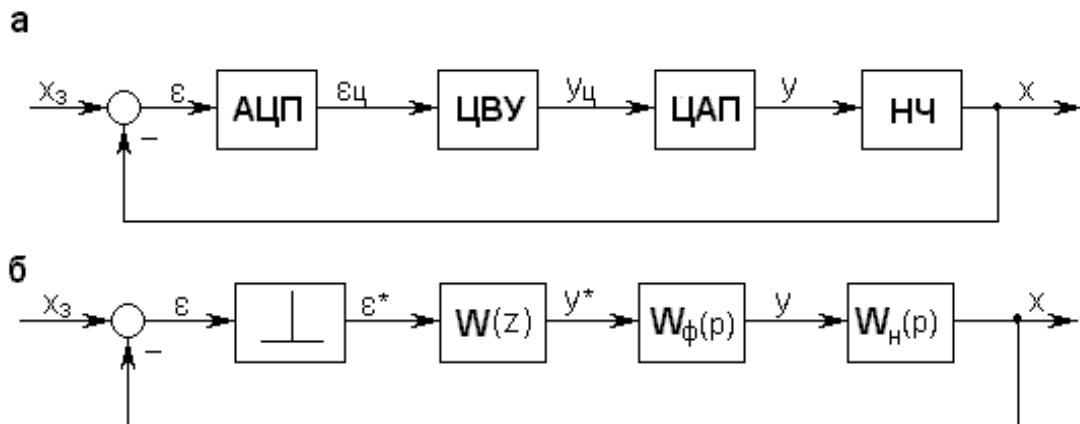


Рис. 9.12. Функциональная (а) и алгоритмическая (б) структуры цифровой системы управления

этом образуется последовательность чисел ε_u , записанных в определенной (обычно двоичной) системе счисления. Цифровое вычислительное устройство ЦВУ в соответствии с заложенным в него алгоритмом выполняет над числами арифметические и логические операции и с периодом повторения T , выдает в виде числа управляющий сигнал u_u , формирует непрерывное управляющее воздействие u .

Если непрерывная часть системы и алгоритм работы ЦВУ линейны, то рассматриваемую цифровую систему можно исследовать как амплитудно-импульсную. Для этого систему с ЦВУ заменяют эквивалентной импульсной системой. На алгоритмической схеме эквивалентной системы (рис. 9.1) АЦП условно представляют в виде идеального импульсного элемента, а сигналы ε_u и u_u , которые в действительности являются последовательностями чисел, заменяют соответствующими решетчатыми функциями ε^* и u^* . Квантование по уровню при этом не учитывается (так как шаг квантования обычно достаточно мал).

Период повторения T условного импульсного элемента определяется периодичностью опроса датчиков D отдельных контуров (см. рис. 9.1), т.е. с темпом ввода сигналов u_l в УВМ и вывода сигналов u_l из УВМ, который задается от специального таймера через входной и выходной коммутаторы (мультиплексор и демультиплексор). Время, затрачиваемое ЦВУ на вычисления, обычно мало по сравнению с периодом T , и его можно не учитывать.

Реализуемый в ЦВУ алгоритм преобразования входной последовательности чисел ε_u в выходную u_u на эквивалентной схеме представляют в виде соответствующей д. п. ф. $W_u(z)$, которая связывает между собой дискретные значения сигналов ε^* и u^* . Звено с передаточной функцией $W_u(z)$ называют *дискретным фильтром* или *цифровым регулятором*.

Преобразователю ЦАП в эквивалентной системе соответствует фиксирующий элемент $W_\phi(p)$, который в течение одного такта сохраняет мгновенное значение u^* .

Д. п. ф. цифровой системы (см. рис. 9.12, а), представленной в виде эквивалентной импульсной системы (см. рис. 9.12, б):

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{X(z)}{X_n(z)} = \frac{W_u(z) W_n(z)}{1 + W_u(z) W_n(z)} = \\ &= \frac{K_u(z) K_n(z)}{D_u(z) D_n(z) + K_u(z) K_n(z)} = \frac{K(z)}{F(z)}, \end{aligned} \quad (9.66)$$

где $W_n(z) = K_n(z)/D_n(z)$ – д. п. ф. приведенной непрерывной части, включающей объект, исполнительное устройство и фиксирующий элемент; $W_u(z) = K_u(z)/D_u(z)$ – д. п. ф. цифрового регулятора.

Благодаря большим вычислительным возможностям УВМ в цифровых системах можно реализовать сложные алгоритмы управления и обеспечить такие переходные процессы, которые недостижимы в непрерывных системах.

Рассмотрим один из возможных подходов к решению задачи синтеза оптимальной цифровой системы. Пусть необходимо получить переходный процесс конечной длительности $t_n = lT$. При этом правомерно потребовать, чтобы длительность соответствовала порядку уравнения неизменяемой части системы, который определяется, главным образом, объектом. Данное требование можно записать так:

$$l = n, \quad (9.67)$$

где n – порядок полинома $D_n(z)$ приведенной части. С учетом условия конечной длительности (9.88) найдем д. п. ф. в следующем виде:

$$\Phi(z) = K(z)/F(z) = K_u(z)K_n(z)/z^l \quad (9.68)$$

можно произвольно принять равным

$$K_u(z) = k_u = 1/k_n, \quad (9.69)$$

где $k_u = K_u(1)$, $k_n = K_n(1)$ – передаточные коэффициенты регулятора и приведенной части.

Так как д. п. ф. $W_n(z)$ приведенной части считается известной, то можно определить д. п. ф. ЦВУ:

$$W_u(z) = \frac{\Phi(z)}{1 - \Phi(z)} \frac{1}{W_n(z)} = \frac{D_n(z)/k_n}{z^l - K_n(z)/k_n}. \quad (9.70)$$

В общем случае д. п. ф. (9.105) представляет собой отношение полиномов

$$W_u(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_r z^{-r}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_s z^{-s}}. \quad (9.71)$$

Соответственно уравнение ЦВУ в операционной форме:

$$Y(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_s z^{-s}) = E(z)(b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_r z^{-r}) \quad (9.72)$$

Выполняя почленно обратное z -преобразование и учитывая теорему запаздывания (9.33), получаем рекуррентную формулу:

$$y(i) = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^r b_k \varepsilon(i - k) - \frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^s a_k y(i - k), \quad (9.73)$$

которая связывает текущее значение $y(i)$ дискретного управляющего воздействия с текущим и с предыдущими значениями сигнала ошибки, а также с предыдущими значениями управляющего воздействия.

Изложенный метод позволяет синтезировать импульсную систему, оптимальную по быстродействию. Оптимальный переходный процесс достигает

ся за счет выбора амплитуд управляющего воздействия на интервалах заданной продолжительности. В релейных системах, оптимальных по быстродействию, наименьшая длительность процесса достигается выбором моментов изменения знака постоянного по амплитуде управляющего воздействия.

Пример 9. Непрерывная часть цифровой системы (см. рис. 9.13, б) состоит из фиксатора (9.8) и двух последовательно соединенных идеальных интегрирующих звеньев:

$$W_n(p) = k / p^2. \quad (1)$$

Требуется определить алгоритм управления, обеспечивающий минимальную длительность переходного процесса при заданных $T = 10$ с и $k = 0,01 \text{ c}^{-2}$.

Д. п. ф. приведенной непрерывной части системы (см. табл. 9.1)

$$W_n(z) = \frac{z-1}{z} Z \{k / p^3\} = \frac{kT^2(z+1)}{2(z-1)^2}. \quad (2)$$

Очевидно, что в данном случае $l = n = 2$, $k_n = K_n(l) = 2kT^2$.

Оптимальная д. п. ф. цифрового регулятора согласно формуле (9.105)

$$W_u(z) = \frac{2(z-1)^2 / 2kT^2}{z^2 - kT^2(z+1) / 2kT^2} = \frac{1 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0,5z^{-1} - 0,5z^{-2}} = \frac{Y(z)}{E(z)}. \quad (3)$$

Отсюда рекуррентный алгоритм управления

$$y(i) = \varepsilon(i) - 2\varepsilon(i-1) + \varepsilon(i-2) + 0,5y(i-1) + 0,5y(i-2). \quad (4)$$

Он обеспечивает окончание переходного процесса за два периода.

В заключение отметим, что импульсные системы могут быть как линейными, так и нелинейными.

Динамику линейной импульсной автоматической системы можно рассматривать в виде реакции непрерывной части системы на серию импульсов, чередующихся с заданным периодом. Конечные значения переменных для предыдущего цикла являются начальными для последующего цикла и т.д. Зная закон изменения внешнего воздействия, приведенного ко входу импульсного элемента, можно определить форму импульсов, поступающих на вход непрерывной части системы, и рассчитать переходный процесс на всем промежутке регулирования. Однако этот метод не позволяет исследовать устойчивость системы в целом и оценить влияние параметров на динамику системы.

Для устранения указанного недостатка было предложено контролировать процесс регулирования не непрерывно во времени, а дискретно один раз за период, например, в момент начала каждого цикла. В связи с этим для исследования импульсных систем был применен аппарат дифференциально-разностных уравнений. В более позднее время для исследования импульсных автоматических систем используются дискретное преобразование Лапласа и частотный метод, позволяющий применять известные в линейной теории методы анализа.

Непрерывное регулирование при определенных условиях является границей импульсного регулирования. Если период квантования достаточно мал по сравнению с основными постоянными времени инерционных звеньев непрерывной части импульсной системы, то систему можно рассматривать с достаточной для практики точностью как непрерывную и применять к ней методы исследования непрерывных систем. Необходимость использования специальных методов исследования для импульсных систем возникает лишь в случае соизмеримости периода квантования и постоянных времени звеньев системы.

При приближении периода квантования к бесконечно малому значению естественно ожидать, что свойства импульсной системы будут приближаться к свойствам соответствующей непрерывной системы. Этот вопрос рассматривался ранее, когда приводилась теорема Котельникова-Шеннона.

При стремлении периода квантования к нулю передаточная функция разомкнутой импульсной системы стремится к передаточной функции непрерывной системы, состоящей из безынерционного усилителя и из непрерывной части импульсной системы. Следовательно, при исследовании эквивалентной непрерывной системы следует вместо импульсного элемента принять безынерционное звено.

Принцип импульсного регулирования можно применить для объектов с медленно протекающими процессами, что позволяет осуществить большие усиления и упростить аппаратуру, не изменяя при этом динамические свойства процессов по сравнению с непрерывным принципом. Кроме того, принцип импульсного регулирования позволяет также обосновать вибрационную линеаризацию релейных систем, поскольку наложение внешних колебаний высокой частоты превращает релейную систему в импульсную систему. В случае периода квантования $T < \pi / \omega_{cp}$ такая система будет вести себя как линейная непрерывная система.

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория автоматического управления. В двух частях. /Под ред. А.А. Воронова. – М.: Высшая школа, 1986. – 844 с.
2. Лукас В.А. Теория автоматического управления. – М.: Недра, 1990. – 416 с.
3. Имаев Д.Х., Ковальски З., Яковлев В.Б., Пошехонов Л.Б., Цапко Г.П. Анализ и синтез систем управления. Санкт-Петербург, Гданьск, Сургут, Томск, 1998. – 264 с.
4. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. – М.: Высшая школа, 1973. - 527 с.
5. Яшугин Е.А. Теория линейных непрерывных систем автоматического управления в вопросах и ответах. Справочное пособие. – Минск.: Высшая школа, 1986. - 256 с.
6. Башарин А.В., Новиков В.А., Соколовский Г.Г. Управление электроприводами: Учебное пособие для вузов. – Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1982. - 392 с.
7. Зайцев А.П., Митаенко А.Д. Моделирование линейных систем автоматического управления. Учебно-методическое пособие. – Томск.: Изд. ТПУ, 1999. - 44 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Основные понятия и определения	3
1.1. Автоматическое управление	3
1.2. Фундаментальные принципы управления	5
1.3. Основные виды автоматического управления	8
1.4. Основные законы регулирования	12
Глава 2. Математическое описание линейных элементов и систем управления.....	14
2.1. Линейные дифференциальные уравнения	14
2.2. Временные характеристики	17
2.3. Операционный метод и передаточная функция	20
2.4. Частотные характеристики	26
2.5. Векторно-матричная форма описания элементов	30
Глава 3. Типовые динамические звенья систем управления	34
3.1. Понятие типовых динамических звеньев	34
3.2. Безынерционное звено.....	34
3.3. Инерционные звенья первого порядка	36
3.4. Инерционные звенья второго порядка	38
3.5. Интегрирующие звенья	43
3.6. Дифференцирующие звенья	45
3.7. Звено запаздывания	47
Глава 4. Преобразование структурных схем. Статические режимы САУ.....	50
4.1. Получение передаточных функций одномерной системы по передаточным функциям звеньев	50
4.2. Статические режимы САУ	57
Глава 5. Устойчивость линейных САУ	60
5.1. Частотные критерии устойчивости	62
5.2. Критерий устойчивости Михайлова	63
5.3. Критерий устойчивости Найквиста	64
5.4. Алгебраический критерий устойчивости Гурвица	68
5.5. Построение областей устойчивости	70
Глава 6. Оценка качества процесса управления	74
6.1. Понятие качества процесса управления	74
6.2. Классификация внешних воздействий.	
Требования, предъявляемые к качеству процесса управления	75
6.3. Характер затухания переходного процесса	76
6.4. Максимальное отклонение управляемой переменной. Перерегулирование.	
Время переходного процесса	78
6.5. Корневые оценки качества	79
6.6. Оценки качества САУ по частотным характеристикам	80
6.7. Интегральные оценки качества	82
6.8. Связь показателей качества с параметрами приближенной модели	85
Глава 7. Синтез линейных систем управления	89
7.1. Основные понятия о синтезе САУ	89
7.2. Общие принципы синтеза алгоритмической структуры САУ	90
7.3. Структурно-параметрическая оптимизация систем без запаздывания	98

7.4. Частотный метод синтеза САУ	105
Глава 8. Нелинейные системы автоматического управления	109
8.1. Особенности нелинейных систем	109
8.2. Типовые нелинейные элементы систем управления	111
8.3. Метод фазовых траекторий	112
8.4. Метод гармонической линеаризации	115
8.5. Исследование абсолютной устойчивости нелинейных систем с помощью критерия Попова	117
Глава 9. Основы анализа линейных импульсных и цифровых систем управления	121
9.1. Общие сведения о дискретных системах	121
9.2. Функциональная и алгоритмическая структуры амплитудно-импульсной системы	124
9.3. Математическое описание амплитудно-импульсной системы	130
9.4. Характеристики типовой импульсной цепи	133
9.5. Характеристики замкнутой импульсной системы	137
9.6. Основное условие и критерии устойчивости импульсных систем	138
9.7. Оценка качества импульсных систем	142
9.8. Структура и характеристики цифровой системы управления	145
Литература.....	150

Александр Петрович Зайцев

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор технических наук, профессор
Р. Ф. Бекишев

Редактор О. М. Васильева

Подписано к печати
Формат 60x84/16. Бумага ксероксная.
Плоская печать. Усл. печ. л. 8,84. Уч.-изд. л. 8.
Тираж экз. Заказ . Цена свободная.
ИПФ ТПУ. Лицензия ЛТ №1 от 18.07.94.
Типография ТПУ. 634034, Томск, пр. Ленина, 30.