

Добрый день! Эту лекцию конспектируем и самостоятельно изучаем. Решаем № 1, 2, 3, 5(а, б) и 6 (а, б). Успехов!! На занятии (лекции) буду проверять задания.

І семестр. Лекция

Вопрос. Полярная система координат

Полярная система координат на плоскости определяется заданием некоторой точки O , исходящего из этой точки луча OP и масштаба для измерения длин. Точка O называется полюсом, а луч OP – полярной осью.

Поворот полярной оси OP вокруг полюса O против часовой стрелки считается положительным.

Полярными координатами произвольной точки M плоскости называются числа $\rho = |OM|$ и $\varphi = \angle POM$. ρ называется полярным радиусом, φ называется полярным углом (рисунок 1). Обозначение: $M(\rho; \varphi)$.

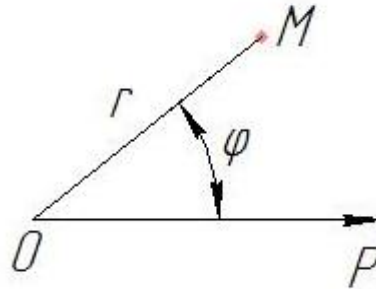


Рисунок 1

Для полюса O его полярный радиус $\rho = |OO| = 0$, а полярный угол определенного значения не имеет.

Если начало прямоугольной системы координат совместить с полюсом, а положительную полуось Ox – с полярной осью (рисунок 2), то формулы перехода от полярных координат к прямоугольным:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \quad (1)$$

а формулы перехода от прямоугольных координат к полярным:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}. \quad (2)$$

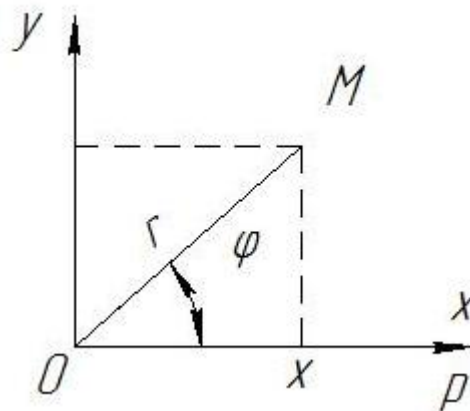


Рисунок 2

При нахождении угла φ нужно определить четверть, в которой расположена точка М. Будем считать $-\pi < \varphi \leq \pi$. Тогда

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } M \in I, IV \text{ ч.} \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } M \in II \text{ ч.} \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x}, & \text{если } M \in III \text{ ч.} \end{cases} \quad (3)$$

Пример. Построить в полярной системе координат спираль Архимеда $\rho = 2\varphi$.

Решение. Придавая φ значения (в радианах) от 0 до 2π через промежуток $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$, найдем значения ρ .

Таблица 1 – Значения функции $\rho = 2\varphi$

φ	0	$15^\circ = \frac{\pi}{12}$	$30^\circ = \frac{\pi}{6}$	$45^\circ = \frac{\pi}{4}$	$60^\circ = \frac{\pi}{3}$	$75^\circ = \frac{5\pi}{12}$
ρ	0	$\frac{\pi}{6} \approx 0,52$	$\frac{\pi}{3} \approx 1,05$	$\frac{\pi}{2} \approx 1,57$	$\frac{2\pi}{3} \approx 2,09$	$\frac{5\pi}{6} \approx 2,62$

φ	$90^\circ = \frac{\pi}{2}$	$105^\circ = \frac{7\pi}{12}$	$120^\circ = \frac{2\pi}{3}$	$135^\circ = \frac{3\pi}{4}$	$150^\circ = \frac{5\pi}{6}$	$165^\circ = \frac{11\pi}{12}$
ρ	$\pi \approx 3,14$	$\frac{7\pi}{6} \approx 3,67$	$\frac{4\pi}{3} \approx 4,19$	$\frac{3\pi}{2} \approx 4,71$	$\frac{5\pi}{3} \approx 5,24$	$\frac{11\pi}{6} \approx 5,76$
φ	$180^\circ = \pi$	$195^\circ = \frac{13\pi}{12}$	$210^\circ = \frac{7\pi}{6}$	$225^\circ = \frac{5\pi}{4}$	$240^\circ = \frac{4\pi}{3}$	$255^\circ = \frac{17\pi}{12}$
ρ	$2\pi \approx 6,28$	$\frac{13\pi}{6} \approx 6,81$	$\frac{7\pi}{3} \approx 7,33$	$\frac{5\pi}{2} \approx 7,85$	$\frac{8\pi}{3} \approx 8,38$	$\frac{17\pi}{6} \approx 8,90$
φ	$270^\circ = \frac{3\pi}{2}$	$285^\circ = \frac{19\pi}{12}$	$300^\circ = \frac{5\pi}{3}$	$315^\circ = \frac{7\pi}{4}$	$330^\circ = \frac{11\pi}{6}$	$345^\circ = \frac{23\pi}{12}$
ρ	$3\pi \approx 9,42$	$\frac{19\pi}{6} \approx 9,95$	$\frac{10\pi}{3} \approx 10,47$	$\frac{7\pi}{2} \approx 11,00$	$\frac{11\pi}{3} \approx 11,52$	$\frac{23\pi}{6} \approx 12,04$
φ	$360^\circ = 2\pi$					
ρ	$4\pi \approx 12,57$					

Отмечая в полярной системе координат точки $(\rho; \varphi)$ и соединяя их, построим спираль Архимеда (рисунок 3).

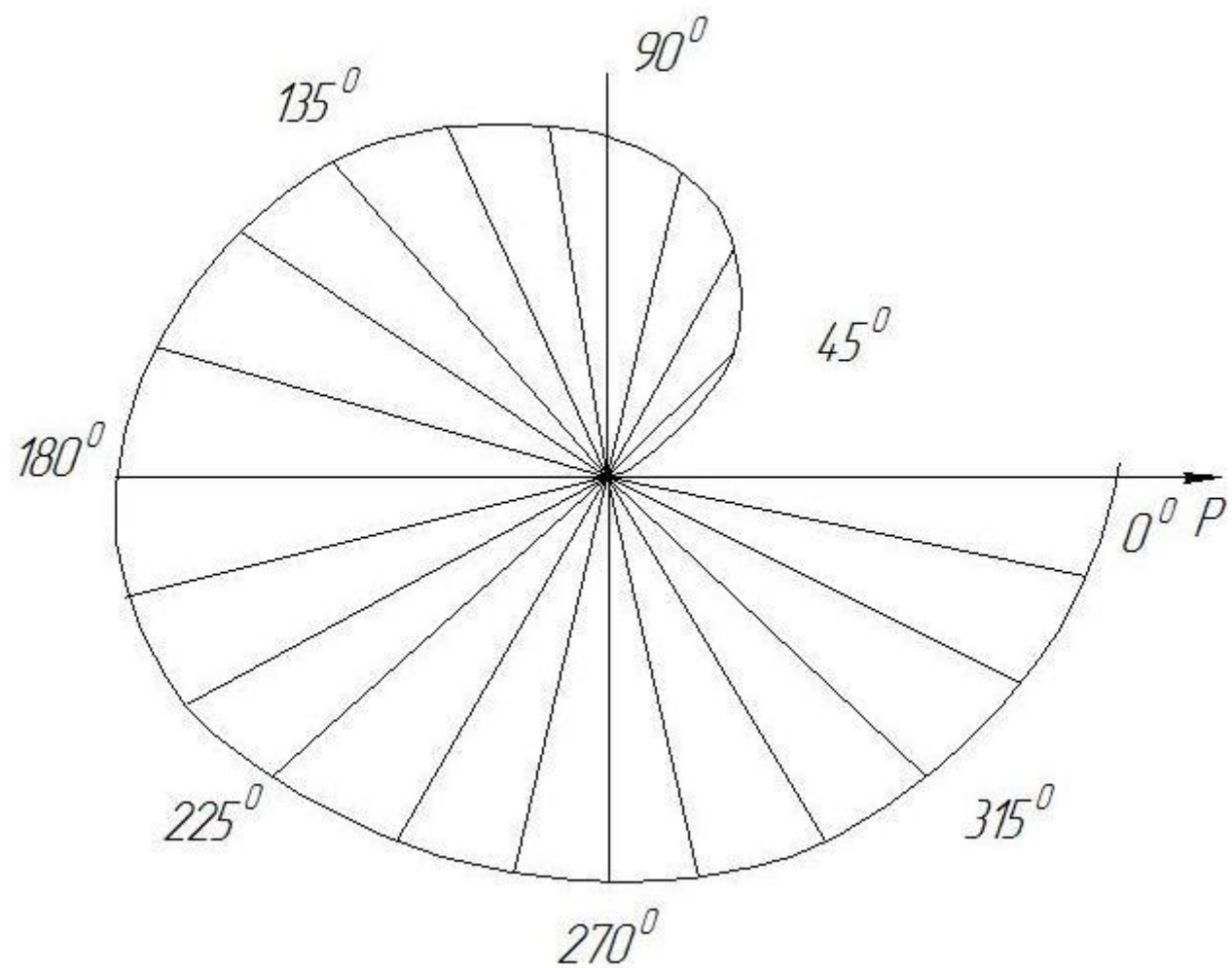


Рисунок 3

Вопросы

1. Как задается полярная система координат?
2. Что называется полярными координатами точки?
3. Как перейти от полярных координат точки к прямоугольным?
4. Как перейти от прямоугольных координат точки к полярным?
5. Какой вид имеет уравнение линии в полярной системе координат?
6. Какой вид имеет уравнение окружности в полярной системе координат?
7. Какой вид имеет уравнение кардиоиды?

Задания

1. В полярной системе координат $(\rho; \varphi)$ построить точки $A(3; 0)$, $B(2; \frac{\pi}{4})$, $A(3; \frac{\pi}{2})$, $A(2; \pi)$, $A(3; \frac{3\pi}{2})$.

2. Построить точки $A(-2; \frac{\pi}{2})$, $B(3; -\frac{\pi}{2})$, $C(-4; -\pi)$, $D(-3; \frac{2\pi}{3})$ в полярной системе координат.

3. Построить линию $\rho = 2 + 2\cos\varphi$.

4. Построить кривые:

- а) $\rho = 3 - 2\cos\varphi$;
- б) $\rho = 2 + \cos 3\varphi$;
- в) $\rho = 1 - \sin 3\varphi$.

5. Преобразовать к полярным координатам уравнения

ний:

- а) $x^2 - y^2 = a^2$;
- б) $x^2 + y^2 = a^2$;

в) $x^2 + y^2 = ax$;

г) $y = x$;

д) $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Ответ: а) $\rho^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}$;

б) $\rho = a$;

в) $\rho = a \cos \varphi$;

г) $\operatorname{tg} \varphi = 1$;

д) $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

6. Преобразовать к декартовым (прямоугольным) координатам уравнения линий и построить линии:

а) $\rho \cos \varphi = a$;

б) $\rho = 2a \sin \varphi$;

в) $\rho^2 \sin 2\varphi = 2a^2$;

г) $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

Ответ: а) $x = a$;

б) $x^2 + y^2 = 2ay$;

в) $xy = a^2$;

г) $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$.