МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО Пензенская ГСХА

В.В. Шумаев, А.В. Поликанов, А.В. Мачнев,
А.А. Орехов, Т.Г. Дорофеева, А.И. Зябиров

МЕТОДЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Пенза 2016

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФГБОУ ВО Пензенская ГСХА

В.В. Шумаев, А.В. Поликанов, А.В. Мачнев,
А.А. Орехов, Т.Г. Дорофеева, А.И. Зябиров

МЕТОДЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебное пособие
для обучающихся по направлению подготовки
35.04.06 – «Агроинженерия», 23.04.03 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов»

Пенза 2016

УДК 655.3.022.11
ББК ББК 30в6
М 54

Рецензент – доктор техн. наук, профессор кафедры «Механизация технологических процессов в АПК» Н.П. Ларюшин.

Печатается по решению методической комиссии инженерного факультета от 30 августа 2016 г., протокол № 11.

М54 Методы научных исследований: учебное пособие / В.В. Шумаев, А.В. Поликанов, А.В. Мачнев и др. – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – 245 с.

Учебное пособие предназначено для обучающихся по направлению подготовки 35.04.06 – «Агроинженерия», 23.04.03 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов». Учебное пособие состоит из двух разделов, содержит основные сведения по изучаемым разделам дисциплины, а также разбор задач с учетом профиля сельскохозяйственного высшего учебного заведения.

Учебное пособие может быть использовано обучающимися по направлению 35.04.06 – «Агроинженерия», 23.04.03 – «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Учебное пособие необходимо для оказания помощи обучающимся при подготовке к занятиям.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Исследование различных явлений или процессов математическими методами осуществляется с помощью математической модели. Математическая модель представляет собой формализованное описание исследуемого объекта посредством систем линейных, нелинейных или дифференциальных уравнений, систем неравенств, определенного интеграла, многочлена с неизвестными коэффициентами и т. д. Математическая модель должна охватывать важнейшие характеристики исследуемого объекта и отражать связи между ними.

После того, как математическая модель составлена, переходят к постановке вычислительной задачи. При этом устанавливают, какие характеристики математической модели являются исходными (входными) данными, какие – параметрами модели, а какие – выходными данными. Проводится анализ полученной задачи с точки зрения существования и единственности решения.

На следующем этапе выбирается метод решения задачи. Во многих конкретных случаях найти решение задачи в явном виде не представляется возможным, так как оно не выражается через элементарные функции. Такие задачи можно решить лишь приближенно. Под вычислительными (численными) методами подразумеваются приближенные процедуры, позволяющие получать решение в виде конкретных числовых значений. Для решения одной и той же задачи могут быть использованы различные вычислительные методы, поэтому нужно уметь оценивать качество различных методов и эффективность их применения для данной задачи.

Результаты расчета анализируются и интерпретируются. При необходимости корректируются параметры метода, а иногда математическая модель, и начинается новый цикл решения задачи.

1 МЕТОДОЛОГИЯ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

1.1 Развитие научного знания

1.1.1 Особенности научного знания

Наука – область человеческой деятельности, направленная на выработку и систематизацию объективных знаний о действительности.

Научная деятельность – это познавательная (когнитивная) деятельность, имеющая своей целью получение нового знания.

Научная деятельность имеет строго определенную структуру: субъект исследования, объект и предмет исследования, средства и методы исследования, результаты исследования.

Субъект исследования – это тот, кто исследует. Под субъектом исследования принято понимать не только отдельно взятого ученого, но и научные коллективы, научное сообщество.

Объект исследования – это та часть реальности, которая исследуется научным сообществом. Наука стремится познать весь мир в его многообразии, но в реальной практике познания речь может идти об определенной его сфере или срезе. Ученый всегда отдает себе отчет в том, что существует сфера непознанного, которая, как показывает практика научной деятельности, не сужается, а, напротив, расширяется. Образно говоря, чем больше мы знаем, тем глубже проникаем в сферу непознанного.

Предмет познания – это те свойства и закономерности, которые изучаются в объекте познания. Поэтому объект познания по своему объему и содержанию шире, чем предмет познания. Можно сказать, что объект познания – это определенная целостность, а предмет познания – часть этой целостности.

Наука – явление многоликое по своим основным признакам и характеристикам. Наука выступает как:

- особая форма общественного сознания;
- отрасль духовного производства;
- социальный институт;
- непосредственная производительная сила общества (на определенном этапе его развития).

Наука как форма общественного сознания. Есть целый ряд основных отличий научных знаний, обусловливающих их принципиальное преимущество перед знаниями, получаемыми в сфере обыденного, стихийно-эмпирического познания. Это:

1) систематизированность научных знаний, в отличие от стихийно-эмпирических, которые скорее, представляют конгломерат сведений, предписаний, рецептур деятельности и поведения, накопленных на протяжении исторического развития обыденного опыта;

2) специфические способы обоснования истинности научного знания (экспериментальный контроль за получаемым знанием и выводимость одних знаний из других, истинность которых уже доказана);

3) осознание метода, посредством которого исследуется объект. Чем дальше наука отходит от привычных вещей повседневного опыта, углубляясь в исследование «необычных» объектов, тем отчетливее проявляется необходимость в создании системы особых методов, и наряду со знаниями об объектах наука формирует знания о методах.

4) занятия наукой требуют особой подготовки познающего субъекта. В целях обыденного познания такая подготовка осуществляется автоматически, в процессе социализации индивида и включения его в различные сферы деятельности. При этом подготовка будущего исследователя включает в себя и усвоение определенной системы ценностных ориентаций и целевых установок, стимулирующих научный поиск и изучение все новых и новых объектов независимо от сегодняшнего практического эффекта получаемых знаний.

Итак, наука возникла как средство разрешения сложной гносеологической ситуации и преобразования природных и общественных явлений на основе познания их сущности. В свете этого становятся более зримыми две основные функции науки: а) познавательная функция, заключающаяся в проникновении в сущность вещей, и б) практически-действенная функция – участие науки в преобразующей деятельности человека и общества.

Но, с другой стороны, опасен и сциентизм – недооценка значения эмпирического знания и по отношению к историческому прошлому и по отношению к современному периоду производства знаний.

Наука как отрасль духовного производства. Целью и результатом духовного производства в этой специфической отрасли является получение научного знания, как итога предварительно осуществленного исследования. Научное знание выступает в виде понятий, законов и теорий.

Специфичность организации *науки как социального института* состоит в том, что организационной формой науки выступает научное сообщество.

Научное сообщество – это объединение ученых в единую социальную группу на основе специфических признаков:

- единые стандарты профессионального поведения – этос науки. Так, в научной среде запрещен плагиат. В научных трудах рекомендуется использовать ссылки, указывать авторство;
- общность образования;
- наличие научных положений, которые используются группой без разногласия;
- общие ценности.

Научное сообщество формируется под воздействием двух групп причин:

Во-первых, научные сообщества могут возникать под влиянием формальных причин, в частности, они могут создаваться посредством административных мер, приказов. Административными методами создаются также научные коллективы для выполнения конкретной работы или программы исследований. Например, создаются научные коллективы для проведения космических исследований или выполнения программы исследований в области нанотехнологий.

Во-вторых, научные сообщества могут формироваться под влиянием неформальных причин. Здесь объединяющим моментом выступает научная проблема, которая интегрирует ученых в группу единомышленников.

На неформальной основе формируются такие виды научных сообществ, как:

- исследовательская группа,
- научная традиция,
- научная школа.

Исследовательская группа – это научный коллектив, который демонстрирует высокую степень солидарности для достижения определенной научной цели. Как правило, данная группа немногочисленна, она характеризуется многолетним сотрудничеством, дружескими связями. Эта группа закалена на основе преодоления многочисленных трудностей, здесь сложились специфические образцы поведения, в том числе совместного отдыха.

Научная традиция – это совокупность навыков, мастерства, методологических предпочтений, которые разделяются учеными и передаются от поколения к поколению. Научные традиции могут существовать очень долго – десятки и даже сотни лет.

Научная школа – это вид научного сообщества, который предполагает наличие ученого, обладающего ярко выраженными качествами лидера, а также его учеников.

Лидер научной школы умеет открывать своим ученикам перспективы научного поиска, он в состоянии увлечь своих подопечных интересными идеями. Для лидера, возглавляющего научную школу, необходимо сочетание двух качеств:

а) интеллектуальные способности. Лидер видит дальше всех в своей области научного знания.

б) организаторские способности. Лидер умеет организовывать как коллективную работу, так и индивидуальную работу ученых.

По масштабу деятельности можно выделить научных лидеров различного уровня: лидер мирового уровня, лидер регионального уровня, лидер вузовского уровня.

Таким образом, научное сообщество – это своеобразный социальный институт, который включает в себя различные уровни организации:

- сообщество всех ученых мира.
- национальное научное сообщество.
- сообщество специалистов в той или иной области научного знания.
- научная группа, изучающая определенную научную проблему.

Научное сообщество как разновидность социального института формируется лишь в XVII в. до этого времени наука была делом ученых-одиночек.

Идеи Ф.Бэкона привели к появлению первых научных сообществ. В 1660 г. создается один из ведущих научных центров Европы – «Лондонское королевское общество», которое начинает издавать журнал «Философские записки» – один из первых научных журналов, в котором оценка результатов научного творчества становится нормой.

В конце XVII в., вслед за Лондонским королевским обществом, повсеместно создаются академии (Парижская академия наук (1666), Берлинская академия наук (1700), Петербургская академия наук (1724) и др.).

Наука как непосредственная производительная сила общества. Наука как подсистема более сложной системы «общество» испытывает на себе определяющее воздействие последней, и в первую очередь ведущей подсистемы общества – экономики, материального производства.

Эта определяющая зависимость может быть прослежена по следующим основным направлениям:

1. Зависимость науки, от производства, обусловленная своим содержанием, своей проблематикой. Каждая отрасль науки возникает в такой момент, когда не только накопились предпосылки для ее создания, но и обнаружилась жгучая общественная и, как правило, прежде всего, производственная потребность. Геометрия и алгебра были вызваны к жизни необходимостью измерять земельные площади, определять количественные пропорции в ремесле и архитектуре; астрономия родилась из потребностей земледелия (определение сроков сельскохозяйственных работ) и мореплавания; появление зачатков механики связано со строительством городов, храмов, гаваней. Эта определяющая зависимость сохраняется и сегодня: рождение кибернетики, биохимии и т.д. тоже стимулировалось необходимостью решения практических задач.

2. Зависимость науки от производства своей материально-технической базой, свидетельством чему современные лаборатории органического синтеза, синхрофазотроны и т.д.

В то же время наука, как и общественное сознание в целом, обладает относительной самостоятельностью. Это означает, что получая внешний импульс к развитию, «команду» на развитие от социальной системы в целом и ее подсистем, наука исполняет эту команду и развивается по своим собственным внутренним законам.

Наука (биологическая и медицинская), например, уже давно получила социальный заказ на открытие методов профилактики и лечения злокачественных опухолей. Но заказ этот до сих пор не выполнен, ибо существует «закон развития науки в запас», который гласит, что для решения любой научной задачи первоначально должен быть накоплен соответствующий запас знаний. Цитологией же еще не накоплен достаточный запас знаний о нормальной клетке, а без этого нельзя успешно решать фундаментальные и прикладные проблемы, связанные с клеткой аномальной, патологической.

Таким образом, обнаруживается собственная внутренняя логика развития науки, дающая себя знать и в тех случаях, когда наука отстает от потребностей практики, и в тех случаях, когда она их опережает. Поразительный пример: в условиях Древней Греции не могло быть и речи о практической потребности в паровой турбине, однако она была создана Героном. Из внутренней логики развития науки родились неэвклидовы геометрии, теория относительности Эйнштейна и т.д.

Взаимосвязь науки и производства прошла различные исторические этапы в своем развитии.

На первых этапах наука еще не могла оказывать сколько-нибудь значительного воздействия на развитие производства, она, как правило, шла рядом с производством или даже позади него, теоретически обобщая post factum эмпирически добытые технические новшества.

В XIX в. зарождается новый этап во взаимодействии науки и производства – наука превращается в непосредственную производительную силу общества.

Рубеж этих двух этапов лежит между изобретением паровой машины и открытием электричества. Изобретение паровой машины относится еще к первому этапу: сначала паровая машина была создана (причем создана самоучками-практиками), и, только впоследствии появилась теория паровых машин. Другое дело открытие электричества: сначала оно было открыто в лабораториях ученых и лишь, затем были найдены способы внедрения его в производство. Аналогичной является ситуация с открытием атомной энергии, синтеза высокомолекулярных соединений и их внедрением в производство. Таким образом, наиболее характерная черта нового исторического этапа взаимодействия науки и производства – опережение наукой производства, превращение науки в «отца» современных отраслей производства (энергетики, химии, электроники, ракетостроения, радиотехники).

Превращение науки в непосредственную производительную силу общества не означает появления какого-то четвертого элемента в структуре производительных сил наряду с предметом труда, орудиями труда и производителями материальных благ: речь идет о проникновении, внедрении достижений науки в каждый из указанных элементов.

Отличительными признаками науки являются:

- выявление глубинных, сущностных связей и отношений объективного мира, формулирование законов науки, в которых фиксируются эти связи и отношения, а также создание научных теории;
- общезначимость научного знания;
- предвидение, прогнозирование изменения объекта;
- строгая доказательность и обоснованность результатов, достоверность выводов;
- отсутствие ссылок на авторитет;
- непрерывное самообновление;
- наличие профессионально подготовленных кадров;
- наличие специального языка и методов исследования;
- строгая структурированность.

Функции науки:

- Мировоззренческая функция: на каждом историческом этапе развития человеческого общества наука формирует определенную картину мира и тем самым определяет мировоззрение человека.
- Интегративная функция науки заключается в объединении отдельных достоверных знаний о мире в целостную непротиворечивую систему.
- Гносеологическая функция науки направлена на выявление сущности и закономерности функционирования и развития природных и социальных явлений.
- Методологическая функция: наука создает различные методы и способы исследовательской деятельности.
- Прогностическая функция: на основе выявленных закономерностей изученных явлений наука способна объяснить перспективные тенденции развития природы и общества.

- Функция науки как непосредственной производительной силы, современная наука непосредственно связана с практикой, целью научных достижений является их практическая реализация; одновременно, практическая жизнь человека все более оказывается связанной и зависимой от научных достижений и открытий.

- Функция науки как социальной силы: на современном этапе развития человеческого общества научные достижения все чаще используются при разработке программ социального и экономического развития.

Научные дисциплины, образующие в своей совокупности систему науки в целом, весьма условно можно подразделить на три большие группы (подсистемы): естественные науки, общественные (гуманитарные) науки, технические науки.

Эти три группы различаются по своим предметам и методам. Резкой грани между этими подсистемами нет, ряд научных дисциплин занимает промежуточное положение.

Так, например, на стыке технических и общественных наук находится техническая эстетика, между естественными и техническими науками – бионика, между естественными и общественными науками – экономическая география.

Каждая из указанных подсистем, в свою очередь, образует систему разнообразным способом координированных и субординированных предметными и методическими связями отдельных наук, что делает проблему их детальной классификации крайне сложной и полностью не решенной до сегодняшнего дня.

По своей направленности, по непосредственному отношению к практике отдельные науки принято подразделять на фундаментальные и прикладные науки.

Задачей *фундаментальных наук* является познание законов, управляющих поведением и взаимодействием базисных структур природы, общества и мышления. Эти законы и структуры изучаются в «чистом виде», как таковые, безотносительно к их возможному использованию. Поэтому фундаментальные науки иногда называют «чистыми».

Непосредственная цель *прикладных наук* – применение результатов фундаментальных наук для решения не только познавательных, но и социально-практических проблем. Поэтому здесь критерием успеха служит не только достижение истины, но и мера удовлетворения социального заказа.

На стыке прикладных наук и практики развивается особая область исследований – разработки, переводящие результаты прикладных наук в форму технологических процессов, конструкций, промышленных материалов и т.п.

Научные революции, их сущность и типология. Само понятие «революция» свидетельствует о радикальных качественных изменениях в мире знания, о перестройке оснований науки.

Научная революция может протекать двояко: 1) вызывать трансформацию специальной картины мира без изменения идеалов и норм исследования, и 2) осуществлять радикальные изменения и в картине мира, и в системе идеалов и норм науки.

Выделяют четыре типа научных революций по следующим основаниям: 1) появление новых фундаментальных теоретических концепций; 2) разработка новых методов; 3) открытие новых объектов исследования; 4) формирование новых методологических программ.

Предпосылкой любой научной революции являются факты или та фундаментальная научная аномалия, которая не может быть объяснена имеющимися научными средствами и указывает на противоречия существующей теории. Когда аномалии, проблемы и ошибки накапливаются и становятся очевидными, развивается кризисная ситуация, которая и приводит к научной революции. В результате научной революции возникает новая объединяющая теория (или парадигма в терминологии Куна), обладающая объясняющей силой и устраняющая ранее имеющиеся противоречия.

Симптомами научной революции кроме явных аномалий являются кризисные ситуации в объяснении и обосновании новых фактов, борьба старого знания и новой гипотезы, острейшие дискуссии.

Научная революция – это не одномоментный акт, а длительный процесс, сопровождающийся радикальной перестройкой и переоценкой всех ранее имевшихся факторов. Изменяются не только стандарты и теории, но и средства исследования, открываются новые миры.

Научные революции могут быть представлены как многоуровневый процесс, различают три типа научных революций:

1) «мини-революции», которые относятся к отдельным блокам в удержании той или иной науки;

2) локальные революции, охватывающие конкретную науку в целом;

3) глобальные научные революции, которые захватывают всю науку в целом и приводят к возникновению нового видения мира.

Глобальные революции в истории науки, в свою очередь, разделяются на четыре типа:

- научная революция XVII в., которая ознаменовала собой появление классического естествознания и определила основания развития науки на последующие два века. Все новые достижения непротиворечивым образом встраивались в общую галилеево-ньютонианскую картину мира;
- научная революция конца XVIII- первой половины XIX вв., приведшая к дисциплинарной организации науки и ее дальнейшей дифференциации;
- научная революция конца XIX- начала XX вв., характеризующаяся открытием теории относительности и квантовой механики, пересмотрела исходные представления о пространстве, времени и движении. Проникая в промышленность, технику и технологии благодаря компьютеризации и автоматизации, она приобрела характер научно-технической революции;
- научная революция конца XX в., внедрившая в жизнь информационные технологии, является предвестником глобальной четвертой научной революции.

Учитывая совокупность открытий, которые были сделаны в конце XX в., можно говорить, что мы на пороге глобальной научной революции, которая приведет к глобальной перестройке всех знаний о Вселенной.

1.1.2 Основные этапы исторического развития науки

Наука, являясь своеобразной формой духовного производства, не может быть представлена как нечто раз и навсегда данное, неизменное – она имеет свою историю, то есть прошлое, настоящее и будущее.

Вопрос о периодизации истории науки является дискуссионным. Согласно популярной периодизации в истории науки выделяют следующие периоды:

- доклассический период (выделяют этапы: преднаука, античная наука, средневековая наука);
- классический период (XVII - конец XIX вв.);
- неклассический период (конец XIX - первая половина XX вв.);
- постнеклассический период (последние десятилетия XX в. и по настоящее время).

Донаучные знания о мире отражены в мифологии. Характерной особенностью донаучного, мифологического отношения к миру является отсутствие представлений о разделении реального и нереального, объективного и субъективного, подлинного и мнимого – в нем все едино, слитно.

К преднауке относят богатые знания в области математики, геометрии, астрономии, медицины древневосточных цивилизаций – Египта, Месопотамии, Индии, Китая. Характерные черты преднауки:

- она не являлась самодостаточной деятельностью («наука ради науки», «познание ради познания») и служила решению прикладных задач, не поднимаясь до общетеоретических обобщений;
- монополия жрецов на знание (знания были своего рода профессиональной тайной), отсутствие демократического духа в обществе обусловили нерациональный, догматический характер древневосточной науки, превратив ее в эзотерическое, сакральное занятие, в священнодействие;
- несмотря на огромные успехи древневосточной мысли (древние египтяне и вавилоняне умели решать уравнения первой и второй степени, определять площади треугольников и четырехугольников, знали и владели формулами объемов пирамиды, конуса, цилиндра), знания не имели систематического характера.

Колыбелью подлинной науки считают античную Грецию периода наивысшего расцвета ее культуры – VI-IV вв. до н.э., а также римский период античности – III в. до н.э. - I в.н.э.

В отличие от Востока, где знания имели рецептурный характер, не были систематизированы, не имели текстового оформления, строго рационально-логического обоснования, в античной культуре начала развиваться «наука доказывающая».

Античные философы создали логику и диалектику, которые в Древней Греции стали важнейшими методами познания действительности. В те времена считалось, что именно созерцание и размышление, отвлечение от мирской суеты, обращение к самому себе и своей интуиции позволяет приобщиться к вечному и глубже познать законы Мироздания. Ее вниманием пользуются преимущественно вопросы отношения человека к превосходящим силам природы, понимание мира, строения материи, живых организмов и самого человека.

Исследователи выделяют три научные программы античности:

1. *Математическая программа* Пифагора (VI в. до н.э.) и Платона (427-348 г. до н.э.).

Пифагорейской школе удалось сформулировать два важнейших тезиса, которые легли в основу всей последующей науки:

- явления природы и ее законы наиболее четко и лаконично выражаются языком математики;

- количественные (числовые) отношения отражают гармонию и порядок мира, симметрию его частей, правильность их объединения и ритмичность движения.

2. В основе *корпускулярной* (лат. corpusculum – частица) атомистической программы лежат представления эпикурейской школы (Левкипп, Демокрит, Эпикур), которые позднее были изложены древнеримским поэтом и философом-материалистом Лукрецием Каром (I в. до н.э.) в его поэме «О природе вещей». По их мнению окружающий мир состоит из некой субстанции, которая существует вечно и независимо от человека. Сегодня ее называют – «материя».

Ядро этой программы составляет учение Демокрита (470-405 гг. до н.э.) об атомах. Вселенная состоит из пустоты и невидимых глазу атомов, которые являются первокирпичиками Мироздания. Атомы бесчисленны по количеству, разнообразию, формам и величинам. Мир *дискретен* (прерывен). Находясь в вечном движении, атомы сталкиваются, образуют единый вихрь, соединяются и разъединяются. При этом они образуют самые разнородные по свойствам тела и порождают все сложное – огонь, воду, воздух, землю.

Эпикур (34-270 гг. до н.э.) развил идеи Демокрита и дал им философское обоснование. Первоосновой любого учения он признавал логические умозаключения, считая, что таким путем можно получить новое знание о вещах даже при отсутствии данных непосредственного опыта.

Эпикур стремился вывести законы природы из самой же природы, представляя окружающий его мир зримым, ощущаемым, движущимся, вечно меняющимся, и в то же время непреходящим, остающимся единственной реальностью.

Он признавал что материя – это бесконечное множество движущихся атомов, но при этом пытался выяснить, что за сила движет ими, и какова конечная цель этого движения. Он считал, что мир – это нагромождение случайностей, и совершенно лишен какой-либо внутренней логики и внутреннего смысла. Размышляя над природой случайного, он создал учение об отклонениях атомов от прямолинейных путей, в результате которых происходят столкновения, и возникает вихревое движение, приводящее к образованию вещей. Случайность, по его мнению, лежит в природе самих вещей и носит объективный характер. Эта программа стала истоком корпускулярной традиции современной науки.

3. Завершающим этапом развития античной науки можно считать создание *континуальной* (лат. continuum – непрерывное) программы, объединившей в себе все достижения античности.

Ее основоположником был Аристотель (384-322 г. до н.э.). Его сочинения охватывают многие области знания: «Органон», «Метафизика», «Физика», «О возникновении животных», «О душе», «Этика», «Политика», «Риторика», «Поэтика». Он разработал первую систематику животных, сделал попытку создать единую картину мира.

В трактате «О душе» он утверждал, что всему материальному миру присуща некоторая внутренняя сущность – душа, которая имеет несколько уровней бытия. Самый низкий уровень души свойствен неживым объектам – камням, воде, воздуху. На следующем уровне находятся растения – травы, цветы и деревья; на следующем – насекомые, рыбы, животные. И на самом высоком уровне находится человек, душа которого бессмертна. В его представлениях находится место и Богу, который вращает небесную сферу, в центре которой находится Земля.

Свои воззрения на устройство природы он представил в книге «Физика», в которой изложил учение о четырех причинах существования мира – материи, форме, действии и цели, а также свои взгляды на взаимосвязь пространства, времени и движения. Занимая промежуточную позицию между Демокритом и Платоном, он считал, что материя существует вечно и образует в разных соединениях различные предметы. Все явления протекают во времени. Вместилищем предметов является пространство. Пространство неразрывно связано с телами. Пустоты или чистого места без тел не существует. Только тогда тело находится в пространстве, когда соприкасается с другими телами.

Мир непрерывен**.** Порядок и гармония мира по Аристотелю обусловлены целевой причиной движения и формой. Когда-то давно, под действием первотолчка материя пришла в вихревое движение, упорядочив ранее существовавший Хаос. Движение – это изменение вообще. Оно осуществляется борьбой противоположных качеств – тепла и холода, сухости и влажности. В мире нет ничего неизменного и случайного, развитие его во времени строго детерминировано. Его учение о событийности движения почти два тысячелетия господствовало в представлениях человечества. Этот взгляд стал истоком континуальной традиции современной науки.

Характер средневековой науки определяется всей системой теологического мировоззрения, элементами которого выступали универсализм, символизм, иерархизм, телеологизм.

Универсализм – стремление к всеобщему познанию, попытка охватить мир в целом, понять его как некоторое законченное целое, как всеединство. Обоснованием этой модели выступало представление о единстве космоса и человека. Знать, способен только тот, кто проник в суть божественного творения, поскольку оно универсально.

Символизм – будучи сотворенной, любая вещь лишается статуса онтологической основательности, и ее существование, как производное от верховного (божественного) плана, символично и является олицетворением скрытой за ней фундаментальной сущности.

Иерархизм – все вещи «видимые» обладают свойством воспроизводить «вещи невидимые», быть их символами, но не все в одинаковой мере. Мир – иерархия символов, которые подразделяются на «высшие» и «низшие». Так вода «благороднее» земли, воздух «благороднее» воды и т.д.

Телеологизм – истолкование явлений действительности как существующих по «промыслу Божию» для выполнения на Земле заранее предуготовленных ролей. Так, вода и земля служат растениям, которые более благородны и служат скоту. Логическим завершением телеологизма в средние века явился телеологический антропоцентризм.

Человек представляется в Средневековье существом двойственным: с одной стороны, он – венец творения, воплощение божеского, созданного по его образу и подобию, с другой он – плод искушений дьявола существо греховное.

Средневековье формирует взгляд на философию и науку как на «служанок» богословия, а весь мир оказывается заполненным таинственными символическими знаками, которые нужно уметь интерпретировать в соответствии с религиозными догмами. Молитвенное созерцание истины достигается лишь на основе смирения и любви. Задачи научного исследования направляются на достижение благодати и спасения. В науке господствовал схоластический метод – цитирование религиозных авторитетов и их толкование и обоснование.

В рамках средневековой схоластики реализовалось мощное развитие норм логического мышления. Именно с этим периодом связано формирование теоретических и операциональных оснований математической логики, внесен вклад в развитие теории высказывания и теории логического следования и пр. В целом с периодом схоластики связывают становление европейского стиля мышления и разработки категориального аппарата логики. Известными логиками того времени были Петр Испанский (1210-1277) и Раймонд Луллий (1235-1315).

Основная идея Средневековья, сформулированная Фомой Аквинским, состоит в том, чтобы философские науки, которые получают знание от разума, были дополнены наукой, священной и основанной на откровении (теология).

Средневековые ученые Аверроэс и др. в основном, выходцы из арабских университетов, называли свое знание натуральной магией – глубокое познание тайн природы. При этом магия понималась как знание скрытых сил и законов Вселенной без их нарушения и без насилия над Природой.

Эпоха Средневековья характеризуется увлечением алхимией (искусство выплавки металлов). Алхимия выполняет важную роль в качестве предпосылки экспериментального метода, поскольку оперирует с реальными веществами.

Наиболее известными представителями естествознания этого периода были Роджер Бэкон (1214-1292 гг.) и Уильям Оккам (1285-1349 гг.).

Р.Бэкон стремился создать энциклопедию наук, в которой кроме математики присутствовали физика, оптика, астрономия, алхимия, медицина, этика. Он считал аргументацию и эксперимент основными способами познания. Р.Бэкон подготовил век опытной науки, постоянно указывал на необходимость знания математики в научных исследованиях.

Английский философ и логик У. Оккам отстаивал идею независимости научных истин от богословия, их непосредственной связи с опытом. Оккам различает интуитивное знание (восприятие) и абстрактное (отвлеченное). Принцип Оккама («бритва Оккама») – не следует множить сущности без надобности, т.е. мысль о том, что каждый термин обозначает лишь определенный предмет, отсюда название его учения – терминизм.

Таким образом, особенность средневековой науки, заключается в том, что она выступает как совокупность правил в форме комментариев и как стремление к систематизации и классификации знаний.

У истоков становления опытной (экспериментальной) науки стоит Н. Коперник (1473-1543), создавший гелиоцентрическую систему. Суть его учения кратко сводится к утверждению о том, что Солнце, а не Земля (как это считал Птолемей) находится в центре мироздания и что Земля за сутки обращается вокруг своей оси, а за год – вокруг Солнца.

Основоположниками новоевропейской науки стали Г. Галилей (1564-1642), Р. Декарт (1596-1650), И. Кеплер (1571-1630), Ф. Бэкон (1561-1626).

Крупнейшая фигура классической науки – И. Ньютон (1642-1727). Его интересы в науке разнообразны. Но основные направления исследований Ньютона – математика, механика и оптика.

В 1687 г. выходит его знаменитое сочинение «Математические начала натуральной философии», в котором он определяет основные понятия механики – массу, силу, количество движения, пространство, время, развивает учение Галилея об относительности движения, открывает законы динамики и следствия из них – законы сохранения.

Для изучения природы движения Ньютон разрабатывает специальный математический аппарат – дифференциальное и интегральное исчисление.

Особое место в творчестве Ньютона занимает теория тяготения. Опираясь на многовековые наблюдения предшественников за движением планет Солнечной системы, на исследования Кеплера и Гюйгенса, он открывает закон всемирного тяготения.

Работы Ньютона стали фундаментом модели мира – механической картины, которая получила свою окончательную огранку к концу XVIII в. благодаря работам И.Бернулли (1667-1748), Д.Бернулли (1700-1782), Л.Эйлера (1707-1783), Ж.Лагранжа (1736-1813), Ж. Д'Аламбера (1717-1783), Г.Лейбница (1646-1716) и других.

Механистическая картина содержит следующие положения:

- Вселенная – совокупность огромного числа неделимых и неизменных частиц, перемещающихся в пространстве и времени, связанных между собой силами тяготения, передающимися от тела к телу через пустоту;

- все события жестко предопределены и подчинены законам классической механики, что дает возможность предопределять и предвычислять ход событий;

- элементарной единицей мира является атом, все тела состоят из абсолютно твердых, неделимых, неизменных корпускул – атомов;

- движение атомов и тел представляется как простое перемещение тел в пространстве и во времени. Свойства пространства и времени, в свою очередь, представлялись как неизменные и независящие от самих тел;

- природа представляется как большой механизм (машина), в котором каждая часть имеет свое предназначение и жестко подчиняется определенным законам.

Сутью данной картины мира является синтез естественно-научных знаний и законов механики, который сводил все разнообразие явлений и процессов к механическим.

Эта картина мира царствовала вплоть до XIX в.

По мере развития науки, различных ее областей (биологии, химии, геологии, самой физики) становился очевидностью факт, что механистическая картина мира не подходит для объяснения многих явлений.

Так, исследуя электрическое и магнитное поля, Фарадей (1791-1867) и Максвелл (1831-1879) обнаружили факт, согласно которому материю можно было представить не только как вещество (в соответствии с механистическим ее толкованием), но и как электромагнитное поле. Электромагнитные процессы не могли быть сведены к механическим, и потому напрашивался вывод: не законы механики, а законы электродинамики являются основными в мироздании.

В биологии Ж.Б. Ламарк (1744-1829) сделал потрясающее открытие о постоянном изменении и усложнении всех живых организмов в природе (и самой природы), провозгласив принцип эволюции, что также противоречило положению механистической картины мира о неизменности частиц мироздания и предзаданности событий.

Свое завершение идеи Ламарка нашли в эволюционной теории Ч.Дарвина (1809-1882), показавшего, что животные и растительные организмы являются итогом длительного развития органического мира, и вскрывшего причины этого процесса (чего не смог до него сделать Ламарк) – наследственность и изменчивость, а также движущие факторы – естественный и искусственный отбор. Позже многие неточности и допущения Дарвина были дополнены генетикой, объяснившей механизм наследственности и изменчивости.

Клеточная теория строения живых организмов также является одним из звеньев общей цепи открытий, подорвавших основы классической, механистической картины мира. В ее основе лежит идея: все живые растения и организмы, начиная от простейших и заканчивая самым сложным (человеческим), имеют общую единицу строения – клетку. Все живое обладает внутренним единством и развивается по единым законам (а не изолированно друг от друга).

Наконец, открытие закона сохранения энергии в 40-х годы XIX в. (Р.Майер (1814-1878), Д.Джоуль (1818-1889), Э.Ленц (1804-1865)) показало, что такие явления, как теплота, свет, электричество, магнетизм, также не изолированы друг от друга (как это представлялось раньше), а взаимодействуют, переходят при определенных условиях одно в другое и представляют собой не что иное, как разные формы движения в природе.

Так была подорвана механистическая картина мира с ее упрощенным представлением о движении как простом перемещении тел в пространстве и во времени, изолированных одно от другого, о единственно возможной форме движения – механической, о пространстве как «вместилище» вещества и о времени как неизменной константе, не зависящей от самих тел.

Неклассический период в развитии науки ознаменован целым каскадом научных открытий. Лишь некоторые из них:

1. Открытие элементарной частицы – электрона, входящей в структуру атома (Дж. Томпсон (1856-1940)), затем – положительно заряженной частицы – ядра внутри атома (Э.Резерфорд, (1871-1937)), на основе чего была предложена планетарная модель атома: вокруг положительно заряженного ядра вращаются электроны. Резерфорд также предсказал существование и еще одной элементарной частицы внутри атома – протона (что позже и было открыто). Эти открытия перевернули существующие до сих пор представления об атоме как об элементарной, неделимой частице мироздания, его «кирпичике».

2. Следующий ощутимый удар по классическому естествознанию нанесла теория относительности А.Эйнштейна (1879-1955), которая показала, что пространство и время не являются абсолютными, они неразрывно связаны с материей (являются ее атрибутивными свойствами), а также связаны движением между собой. Очень четко суть этого открытия охарактеризовал сам Эйнштейн в работе «Физика и реальность», где он говорит о том, что если раньше (имеется в виду время господства классической механики Ньютона) считали, что в случае исчезновения из Все-

ленной всей материи пространство и время сохранились бы, то теория относительности обнаружила, что вместе с материей исчезли бы и пространство, и время.

3. Поистине революционным было открытие М.Планком (1858-1947) квантов – дискретных частиц или порций, лежащих в основе процесса электромагнитного излучения. Теория квантов противоречила существующей волновой и электромагнитной природе света, разработанной Д. Максвеллом (1831-1879), которая в свое время (конец XIX в.) привела к необходимости смены механистической картины мира на электродинамическую.

Возникло противоречие в представлении о материи – или она непрерывна (волновая теория), или состоит из дискретных частиц (корпускул). Это противоречие разрешилось в 1924 г., когда физик Луи де Бройль (1892-1987) высказал гипотезу о том, что частицам материи присущи и свойства волны (непрерывность), и свойства дискретности (квантовость).

Впоследствии эксперименты подтвердили эту гипотезу, и был открыт важнейший закон природы о том, что все материальные объекты обладают и корпускулярными, и волновыми свойствами.

В отличие от предсказуемого мира ньютоновской физики квантовая теория указала на невозможность, непредсказуемость поведения отдельной частицы. Этот вопрос затрагивает основы бытия: невозможно предсказать с помощью традиционной механики поведение отдельных вещей или личностей, можно определить лишь тенденцию.

Вместе с тем, значение указанных открытий заключается и в том, что стал очевидным факт: картина объективного мира определяется не только свойствами самого этого мира, но и характеристиками субъекта познания, его активностью, личной позицией, принадлежностью к той или иной культуре, зависит от взаимодействия познающего субъекта с приборами, от методов наблюдений и пр.

Перемены, привнесенные наукой XIX-XX вв., повлекли за собой целую серию технических изобретений. Если в начале XIX века на железных дорогах, фабриках, заводах использовался пар, уже в 30-е годы XIX в. ему на смену приходит электричество. Далее следовали электрический телеграф, телефон, автомобили, железобетонные конструкции – одним словом, наука тесно внедряется в производство, смыкается с техникой, что привело к разительным переменам в образе жизни развитых капиталистических стран.

Огромным достижением науки XIX в. является прорыв к вопросам о том, как устроена жизнь человеческого общества, подчиняется ли она неким объективным законам (как природа) или в ней действует стихия, субъективизм.

Внедрение техники в производство, усиление товарно-денежных отношений в странах Западной Европы поставили перед необходимостью выяснить причины, факторы, способствующие накоплению богатства нации. Так возникла классическая политэкономия (XVIII в., Адам Смит), в основе которой лежит идея о том, что источником богатства является труд, а регулятором экономических отношений – законы рынка. Адам Смит (1723-1790) утверждал, что в основе трудовых отношений лежат частные, индивидуальные интересы индивидов.

Позже, в 40-е гг. XIX в., немецкий философ К.Маркс (1818-1883) подверг критике классическую политэкономию и сумел вскрыть механизм капиталистической эксплуатации, создав теорию прибавочной стоимости.

И концепцию А.Смита, и учение К.Маркса можно рассматривать как первые научные подходы к изучению законов общественной жизни.

Научным подходом к изучению общества становится социология, основателем которой считают О.Конта (1798-1857). В отличие от предшествующих подходов к изучению общественных явлений (поиск причин) О.Конт предлагает к их изучению применить методы научного исследования – наблюдение и систематическое описание.

Влияние успехов естествознания проявило себя и в области гуманитарных наук (психологии, педагогики, истории, риторики, правоведения): требования применения методов науки (наблюдения, описания, эксперимента) распространяются и на эту сферу познания.

В качестве характерных черт *постнеклассического* периода выступают:

- *холизм* (целостный подход к миру). Его суть в том, что в качестве главного момента анализа берется не отдельная вещь, частный объект мира, а мир как целое. При этом законы целого определяют прямо и косвенно законы развития всех частей этой целостности. Ясно, что при этом анализ с неизбежностью выходит на исследование Космоса, Вселенной как наиболее общей реальной целостности;

- *эволюционизм*. Все явления мира рассматриваются как развивающиеся, причем прежде всего самораз- вивающиеся. Такое саморазвитие характерно для явлений микро-, макро- и мегамира, то есть для всего сущего. Одним из центральных направлений анализа при этом становится изучение глобального эволюционизма, активно исследуемого рядом французских авторов (Леруа, Тейяр де Шарден) и нашими российскими авторами, такими как В.И. Вернадский, Н.Н. Моисеев.

Суть этого явления в том, что в современных условиях уже невозможно автономное, нескоординированное развитие Природы и Общества, иначе это приведет к деградации природы и мировым катаклизмам. Человечество должно объединить усилия, чтобы биосфера (сфера живого) развивалась гармонично, постепенно превращаясь в ноосферу (сферу разума);

- *экологизм*, проявляющийся в гармоничном социально-регулируемом развитии природы, росте ее способности к самовоспроизводству;

- *гуманизм*, выражающийся в том, что именно человек становится главной ценностью и целью социального развития.

Среди организационных особенностей современной науки можно выделить в первую очередь следующее:

- науку все более привлекает не столько поиск абстрактной истины, сколько решение конкретных актуальных социально значимых проблем;

- в науке доминируют не столько узко дисциплинарные исследования, сколько междисциплинарные, решающие комплексные актуальные проблемы (например, рост безопасности существования общества и отдельных людей, глобальная информатизация связей, рост уровня и качества жизни людей и т. п.);

- осуществляется интеграция трех основных веток современной науки – естествознания, технического и социально-гуманитарного знания – при ведущей роли социально-гуманитарного. Основными технологиями современности при этом становятся технологии социальные, регулирующие разнообразные общественные взаимодействия;

- в связи с затрудненностью проведения реальных экспериментов (из-за высокого риска пробудить сверхмощные силы природы) в науке доминируют эксперименты компьютерные, логические.

Современная научная картина мира, как отмечают многие ученые, представляет собой прежде всего синтез учения о глобальном эволюционизме с синергетикой, что позволяет опи-сать мировое развитие как последовательную смену рождаю-щихся из хаоса структур, временно обретающих стабильность, но вновь стремящихся к хаотическому состоянию. В таком мире существенную роль играют разного рода случайности, которые могут резко изменить сценарии развития объектов.

Создателем синергетического направления и автором термина «синергетика» является профессор Штутгартского университета и директор Института теоретической физики и синергетики Герман Хакен.

Цель синергетики как науки – выявление закономерностей, которые управляют возникновением, структурированием и функционированием открытой системы.

Существуют несколько школ, в рамках которых развивается синергетический подход:

1. Школа нелинейной оптики, квантовой механики и статистической физики Германа Хакена.

2. Физико-химическая и математико-физическая Брюссельская школа Ильи Пригожина,

Эта школа, основные представители которой работают теперь в США, не пользуется термином «синергетика», а предпочитает называть разработанную ими методологию «теорией диссипативных структур».

В России свой вклад в развитие синергетики внесли: Н.Н. Моисеев, В.И. Арнольд, А.А. Самарский, С.П. Курдюмов, М.В. Волькенштейн, Д.С. Чернавский, С.П. Капица и др.

1.2 История науки

1.2.1 История науки в технике

Первым печатным трудом по сельскохозяйственным машинам в России была книга И.М. Комова «О земледельных орудиях», выпущенная в 1785 г. в Санкт Петербурге. Вслед за этой книгой Комов в 1788 г. выпустил в Москве монографию «О земледелии». Комов один из первых предложил двуслойную вспашку почвы и говорил об обязательности зяблевой вспашки. Настаивая на усиленном внедрении земледельческих орудий в отечественное сельское хозяйство, он вместе с тем говорит о тяжеловозе, самоходе, подав идею и о неколесном ходе для него.

Труды Комова наряду с трудами А.Т. Болотова и другими свидетельствуют о том, что, несмотря на большую отсталость сельского хозяйства России второй половины XVIII в., теоретические разработки русских ученых в области земледелия были весьма высоки.

Вместе с тем вплоть до конца XIX в. и первых лет XX в. вся литература сводилась к описанию устройства и способов применения выпускавшихся машин и орудий.

Создание новых и совершенствование выпускавшихся машин и орудий осуществлялось на ощупь, путем проб и ошибок – экспериментально, не разрабатывая новых теоретических положений о принципах работы машин.

Первые научные знания по механизации сельского хозяйства заложены основателем научного направления «земледельческая механика» академиком ВАСХНИЛ, почетным членом АН СССР, профессором В.П. Горячкиным (1868-1935 гг.).

Его научные труды в трех томах по теории и проектированию сельскохозяйственных машин и орудий (начиная от ручных и конных) трижды переиздавались в России и переведены на многие языки мира. Разработанные им положения, в одних случаях законченные, в других – в виде методов и схем, применяются и в наши дни, на них часто ссылаются отечественные и зарубежные исследователи, что говорит о всемирном значении научных заслуг В.П. Горячкина.

Он создал первую в России машиноиспытательную станцию, которая вскоре приобрела всемирную известность. По его инициативе на базе этой МИС были созданы Всесоюзный НИИ земледельческой механики и Всесоюзный НИИ механизации и электрификации сельского хозяйства, а также Московский государственный агроинженерной университет, который носит имя этого ученого.

В.П. Горячкин воспитал целую плеяду талантливых учеников, многие из которых стали видными организаторами отечественного сельскохозяйственного машиностроения, крупными учеными и педагогами. Это И.И. Артоболевский, Д.А. Арцыбашев, П.П. Бородин, И.И. Бобарыков, В.А. Желиговский, Н.Д. Лучинский, Б.А. Криль, С.В. Полетаев, В.П. Селезнев, Н.В. Щучкин и другие.

Большинство из них стали академиками ВАСХНИЛ – Всесоюзной академии сельскохозяйственных наук имени Ленина – высшее научно-исследовательское и координационно-методическое учреждение по водному, лесному и сельскому хозяйству СССР. В ее систему входили более 150 научных учреждений. Руководил академией наук президент.

25 июня 1929 г. выходит Постановление Совета народных комиссаров СССР «Об организации Всесоюзной академии сельскохозяйственных наук имени В. И. Ленина». Эта дата считается днем образования ВАСХНИЛ.

В 1949 г. академия была награждена орденом Ленина, а в 1979 г. – орденом Трудового Красного Знамени. ВАСХНИЛ имела зональные, региональные и отраслевые отделения.

В 1992 г. ВАСХНИЛ прекратила свое существование – в связи с распадом СССР. Свою последнюю сессию ВАСХНИЛ провела 4 февраля 1992 г., просуществовав 62 года, 7 месяцев и 10 дней.

В соответствии с Указом Президента Российской Федерации от 30 января 1992 г. «О Российской Академии сельскохозяйственных наук» была создана новая Российская академия сельскохозяйственных наук (РАСХН) на базе уже имеющейся Всероссийской академии сельскохозяйственных наук и ВАСХНИЛ.

В Российской академии сельскохозяйственных наук научное обеспечение технической политики в сельском хозяйстве страны осуществляет Отделение механизации, электрификации и автоматизации. Это отделение:

- организует разработку фундаментальных проблем механики и процессов агроинженерных систем и агроэнергетики, обеспечения работоспособности и эффективного использования машинно-тракторных агрегатов,
- решает вопросы стратегии развития инженерно-технической сферы сельского хозяйства, формирования отечественной адаптированной к региональным условиям системы машинных технологий и техники для производства продукции растениеводства и животноводства.

История развития Отделения связана с именами академиков В.А. Кубышева, Г.Е. Листопада, Л.Г. Прищепа, Л.П. Кормановского, Н.В. Краснощекова, В.И. Сыроватки, Э.И. Липковича, Б.А. Рунова, Д.С. Стребкова, В.И. Черноиванова, И.А. Долгова, Г.М. Бузенкова, И.Ф. Бородина, В.М. Кряжкова, Н.М. Морозова, И.Е. Янковского и других ученых.

Сегодня в составе Отделения 21 академик и 14 членов-корреспондентов, 10 иностранных членов, 11 специализированных НИИ, крупнейшие из которых:

- Всероссийский НИИ механизации сельского хозяйства (ВИМ) – по машинным технологиям и технике для растениеводства;
- Всероссийский НИИ электрификации сельского хозяйства (ВИЭСХ) – по разработке научных основ прогноза и стратегии развития энергетики, электрификации и автоматизации сельскохозяйственного производства, применения нетрадиционных и возобновляемых источников энергии;
- Всероссийский НИПТИ механизации животноводства (ВНИИМЖ) – по машинным технологиям и технике для животноводства;
- Всероссийский НИТИ ремонта и эксплуатации машинно-тракторного парка (ГОСНИТИ) – по широкому спектру проблем технического сервиса машинно-тракторного парка.

Три института решают проблемы инженерно-технической системы регионов:

- Северо-Кавказского (Всероссийский научно-исследовательский и проектно-технологический институт механизации и электрификации сельского хозяйства – ВНИПТИМЭСХ),

- Северо-Западного (Северо-Западный научно-исследовательский институт механизации и электрификации сельского хозяйства – СЗНИИМЭСХ)

- Дальневосточного (Дальневосточный научно-исследовательский и проектно-технологический институт механизации и электрификации сельского хозяйства – ДальНИПТИМЭСХ).

Три института решают специальные проблемы, такие как:

- использование техники и нефтепродуктов (Всероссийский научно-исследовательский и проектно-технологический институт по использованию техники и нефтепродуктов в сельском хозяйстве – ВИИТиН),

- механизации льноводства и переработки лубяных культур (Всероссийский научно-исследовательский и проектно-технологический институт механизации льноводства – ВНИПТИМЛ),

- агрохимическое и материально-техническое обеспечение сельского хозяйства (Всероссийский научно-исследовательский институт механизации агрохимического и материально-технического обеспечения сельского хозяйства – ВНИМС).

В научно-методическом плане Отделение механизации, электрификации и автоматизации осуществляет творческую связь с Департаментом научно-технологической политики и образования Минсельхоза России, научными коллективами вузов сельхозмашиностроения, вузами агроинженерных университетов, факультетами инженерного профиля аграрных университетов и сельскохозяйственных академий Российской Федерации, а также с аналогичными отделениями аграрных академий многих зарубежных стран.

Под научным руководством ученых Отделения:

1. Производятся:

- почвообрабатывающие и почвообрабатывающее-посевные машины (Белгород, Орел, Ростов, Ставрополь, Саратов, Саранск, Челябинск и др.);

- кормоуборочная техника (Пермь, Новосибирск и др.);

- комплексы машин для послеуборочной обработки зерна и подготовки семян (Воронеж, Пермь, Киров и др.).

2. Разработаны технология и оборудование для нанесения нанокомпозитных покрытий при ремонте узлов машин, обеспе-

чивающие восстановление 100-процентного ресурса отдельных деталей.

3. Созданы новые технологии консервации сельскохозяйственных машин материалами на основе отходов нефтепродуктов и растительных масел.

4. Разработан алгоритм и программа по расчету транспортно-технологических процессов и перевозок сельскохозяйственных грузов, а также оригинальная методика для оценки вновь разрабатываемых технологических процессов перевозок сельскохозяйственных грузов с помощью сменных кузовов («Мультилифт»).

5. Координирует выпуск территориальными предприятиями новой конкурентоспособной техники для растениеводства и животноводства. Ее перечень составляет уже порядка 2000 наименований. По критерию «цена-качество» выпускаемая техника не уступает зарубежной и в большей мере адаптирована к российским условиям.

Это только часть разработок ученых Отделения. Важнейшей задачей является создание благоприятных условий для их творчества, особенно в плане пополнения и закрепления молодых научных кадров, также материально-технического обеспечения научного процесса.

Ученые Российской сельскохозяйственной академии совместно с Министерство сельского хозяйства Российской Федерации, Министерство промышленности и торговли Российской федерации и ведущими аграрными вузами разработали «Стратегию машинно-технологической модернизации сельского хозяйства России на период до 2020 года».

В документе:

- определены основные направления машинно-технологической модернизации сельского хозяйства на период до 2020 г.,

- приведен анализ земельных, технологических и машинных ресурсов сельскохозяйственного производства,

- рассмотрены базовые технологии производства продукции растениеводства и животноводства, тенденции их развития, освещены общие принципы формирования и основные этапы технологизации отрасли с учетом зональных особенностей,

- раскрыты структура и параметры машинно-тракторного парка нового поколения, призванного обеспечить кратное повышение производительности труда при выполнении соответствующих правовых и организационно-экономических мероприятий.

Новая парадигма перспективного развития сельского хозяйства включает:

- увеличение объемов производства темпами, опережающими рост населения;
- повышение естественного качества сельскохозяйственной продукции;
- органическое сельскохозяйственное производство, внедрение нанотехнологий;
- уменьшение числа применяемых невознобляемых источников энергии и увеличение объемов применения возобновляемых источников энергии;
- кратное уменьшение воздействия на окружающую среду;
- полную утилизацию и переработку побочных продуктов с.-х. производства;
- повсеместное внедрение почвозащитных технологий;
- вовлечение в севооборот деградированных земель;
- оптимальное орошение и мелиорацию земель;
- внедрение высокоадаптивных инженерных севооборотов;
- посев семян в гидрофильной оболочке;
- мульчирование почвы, использование солнечной и биоэнергии для получения электроэнергии;
- децентрализацию источников энергии;
- внедрение информационных технологий (глобального позиционирования и др.), роботизацию сельского хозяйства;
- укрупнение хозяйств, государственную поддержку и регулирование продуктовых процессов.

Из положений Стратегии следует, что в период 2015-2020 гг. намечено создать технические средства, реализующие новые сберегающие машинные технологии, а функционирование инженерно-технической системы в целом обеспечит технико-экономические параметры инновационного производства сельскохозяйственной продукции. Поэтому ставится задача создания интеллектуальной техники на базе качественно нового уровня развития науки и практических действий в сельском хозяйстве.

Все создаваемые технические средства, особенно сложные и высокопроизводительные, должны иметь высокую техническую и технологическую надежность.

Наука в агроинженерии должна обеспечить:

- управление продукционным процессом машинными агрегатами на базе ГИС-мониторинга состояния посевов и животных с передачей этой информации исполнительным агрегатам в режиме online;

- обеспечение высокого уровня эргономичности условий работы человека-оператора в мобильных технологических агрегатах; использование систем оказания помощи при выполнении работ, экспертных систем на базе информационно-компьютерных технологий для того, чтобы минимально возможные суточные затраты энергии человека приходились на возможно большую длительность смены;

- автоматизированное управление технологическими процесссами на основе спутникового и наземного позиционирования (в системе on-line); роботизация мобильных агрегатов (в том числе параллельное вождение) с целью существенного повышения эффективности использования времени смены;

- создание высокоэффективной развитой элементно-агрегатной базы для технических средств пятого поколения;

- создание ферм-автоматов для производства свинины, яиц, мяса птицы, молока;

- разработку информационных технологий в животноводстве и создание отраслевой компьютерной базы данных по каждому животному.

В практике работы Российской Академии сельскохозяйственных наук установлено по основным научным направлениям периодически на конкурсной основе, присуждать золотые медали имени выдающихся отечественных ученых аграрной науки.

По профилю агроинженерной науки одна такая медаль посвящена основоположнику науки о сельскохозяйственных машинах академику Василию Прохоровичу Горячкину, другая – основоположнику науки по электрификации и автоматизации сельского хозяйства Игорю Александровичу Будзко.

Ученики и последователи В. П. Горячкина творчески развивают оставленное им большое научное наследие и, используя лучшие отечественные традиции, поднимают агроинженерную науку на более высокий уровень.

Золотой медали им. В.П. Горячкина удостоены: В.А. Желиговский (1971 г.), И.И. Артоболевский (1974 г.), П.И. Василенко (1977 г.), И.А. Будзко (1986 г.), Г.Е. Листопад (1989 г.), Н.И.Кленин (1992 г.), Н.В. Краснощеков (1995 г.), В.И. Черноиванов (1998 г.) и И.П. Ксеневич (2001 г.).

Желиговский Владислав Александрович. В трудах академика получили развитие методы проектирования и расчета сельскохозяйственных машин и орудий, представлены разработанные им приборы и приспособления для изучения технологических и физико-механических свойств обрабатываемых материалов, даны теоретические основы технологического расчета процесса резания их лезвием. Им опубликована работа по основам теории технологического процесса вспашки, где почва рассматривается как дисперсная среда, состоящая из трех фаз – твердой, жидкой и газообразной, выяснена роль каждой фазы в процессе деформации и крошения почвы плугами с различной формой их рабочей поверхности. Он создал, по существу, новую техническую дисциплину под названием «Механическая технология сельскохозяйственных материалов», состоящую из трех основных частей – учения о технологических процессах, учения о технологических свойствах сельскохозяйственных материалов и учения о рабочих органах сельскохозяйственных машин и орудий.

Особое место в трудах В.А. Желиговского занимают работы по механике качения колеса с образованием колеи, которые являются продолжением исследований академика В. П. Горячкина по кинематике колеса. Им впервые введены в расчет такие понятия, как момент устойчивости, движущий момент, транспортирующая способность колеса и др.

Академик В.А. Желиговский в течение многих лет организовывал и проводил научные конференции по земледельческой механике.

Золотая медаль им. В.П. Горячкина В.А. Желиговскому присуждена за развитие науки «Земледельческая механика» в 1971 г.

Артоболевский Иван Иванович. Академик И.И. Артоболевский был одним из первых учеников В.П. Горячкина. Под его влиянием он стал изучать проблемы теории машин и механизмов, разработал единую классификацию механизмов, которые разбил на пять семейств по признакам, обеспечивающим единые методы их исследования и проектирования, это легло в основу стройной научной базы для теории машин и механизмов, позволяющей значительно облегчить разработку общих методов их расчета. Его фундаментальная работа «Теория механизмов и машин», отличающаяся строгостью изложения, неоднократно переиздавалась в нашей стране и за рубежом.

В теории пространственных механизмов, изложенной в его монографии под таким же названием, он первым дал решение задачи об определении скоростей и ускорений общего вида пространственного семизвенного механизма. Эта монография – одна из первых в мировой литературе. Не случайно в 1967 г. Институт инженеров-механиков Великобритании наградил И.И. Артоболевского Золотой медалью имени Джеймса Уатта.

Золотой медалью имени В.П. Горячкина И.И. Артоболевский награжден за совокупность фундаментальных работ по проблемам земледельческой механики в 1974 г.

Василенко Петр Мефодиевич. Научные труды академика П.М. Василенко отличаются основательностью теоретических проработок вопросов земледельческой механики, а фундаментальные монографии по теории, расчету и проектированию сельскохозяйственных машин используются во многих странах мира. В таких трудах, как «Культиваторы», «Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин», «Автоматизация процессов сельскохозяйственного производства», даны теоретические основы совершенствования существующих и создания новых конструкций сельскохозяйственных машин.

Целый ряд конструкций посевных машин, культиваторов, свеклоуборочных, кукурузоуборочных машин, новых рабочих органов опрыскивателей и т.д. – результат его научных изысканий в свете дальнейшего развития научных идей В. П. Горячкина.

За многолетнюю работу по подготовке инженерных и научно-педагогических кадров, весомый вклад в развитие науки о механизации сельского хозяйства ему была присуждена Золотая медаль им. В. П. Горячкина в 1977 г.

Будзко Игорь Александрович. Научные труды академика И.А. Будзко относятся к сфере электрификации сельского хозяйства. В них он изложил результаты обширного цикла исследований режима работы систем сельского электроснабжения, на основе которых разработаны методы и устройства автоматического контроля, сигнализации, защиты и обнаружения мест повреждений в сети, повышающие надежность электроснабжения сельского хозяйства. Он опубликовал ряд учебников для студентов разного уровня современной системы образования. На оригинальные изобретения ему выдано более 100 авторских свидетельств. Его разработки внедрены практически во всех районных электросетях страны.

Золотая медаль им. В. П. Горячкина присуждена ему за цикл работ по электрификации сельского хозяйства в 1986 году.

Листопад Георгий Ефремович. Академик Листопад Г.Е. в своих трудах представил результаты научных исследований по широкому спектру инженерных проблем сельскохозяйственного производства. Совершенствование технологических и рабочих процессов машин в растениеводстве, применение вибрационных машин для уборки, сепарации зернового материала, метод их расчета, методы проектирования и эксплуатации технологических рабочих органов мобильных машин, использование дождевальной техники, система машин в земледелии – это лишь краткий перечень научных изысканий в свете дальнейшего развития идей В.П. Горячкина.

Он является одним из основоположников проблемы программирования урожая сельскохозяйственных культур (постановка, обоснование, разработка оптимального метода и производственная проверка). Все это опубликовано в трехтомнике «Программирование урожая» и ряде других научных статей, в том числе и в зарубежных изданиях, а также апробировано на научных конференциях по земледельческой механике, организатором и руководителем которых длительное время был Г.Е. Листопад.

Под его редакцией вышло в свет несколько изданий учебного пособия, которое широко используется в сельскохозяйственных вузах России и стран СНГ при изучении курса «Сельскохозяй-ственные машины» по программе двух инженерных специальностей.

Золотая медаль им. В.П. Горячкина ему присуждена в 1989 г. за серию работ по развитию земледельческой механики и научному обоснованию программирования урожая.

Кленин Николай Иванович. Профессор Н.И. Кленин (родился в 1930 г.), выходец из крестьянской семьи Рязанской области, в своих трудах в развитие идей В.П. Горячкина разработал закономерности изменения прочностных и деформационных параметров растений, плодов, почвы при высокоскоростном и вибрационном воздействии на них, теорию и расчет молотильных устройств комбайнов, теорию очеса семян льна, закономерности изменения энергетических показателей работы зерноуборочных, зерноочистительных и льноуборочных машин.

Он является автором около 200 научных работ, ряда вузовских учебников, более 40 изобретений и патентов, им подготовлены 2 доктора, 33 кандидата наук и многочисленный отряд инженеров сельскохозяйственного производства. Его научная деятельность отмечена правительственными на градами и избранием почетным доктором Венгерского университета в г. Гедель.

Золотая медаль им. В.П. Горячкина присуждена Н.И. Кленину в 1992 г. за цикл работ по созданию теории и методов расчета зерноуборочных комбайнов.

Краснощеков Николай Васильевич. В трудах академика Н.В. Краснощекова развиты научные основы воздействия деформаторов на почвенную среду, ее аэродинамики в закономерностях увлажнения почвы, которые позволили создать стройную систему проектирования техники для засушливого земледелия и новые типы рабочих органов машин. Засушливые регионы – зона трудовых ограничений, и Н.В. Краснощеков разработал и предложил для этих условий систему эффективного использования машинно-тракторных агрегатов. Результатом этих исследований стали новые формы производственных отношений и организации труда, выполнение работ на повышенных скоростях, введение инженерных воздействий в технологии производства растениеводческой продукции, что дает возможность в 2-3 раза интенсифицировать земледелие, повысить конкурентоспособность национального продовольствия.

Золотой медалью им. В.П. Горячкина Н.В. Краснощеков награжден в 1995 г. за цикл научных работ по механике почвозащитного земледелия, разработке адаптивных машин и способов их эффективного использования.

Черноиванов Вячеслав Иванович. Основные научные труды академика Черноиванова В.И. посвящены ремонту сложных сельскохозяйственных машин, организации и технологии восстановлению их деталей, перспективным направлениям развития технического сервиса в АПК Российской Федерации, разработке нормативно-технической документации, ресурсосберегающих технологий, ремонтно-технологического оборудования для технического сервиса машин, научным основам технической эксплуатации сельскохозяйственных машин.

Золотой медалью им В.П. Горячкина В.И. Черноиванов награжден в 1998 г. за цикл работ по развитию научных основ технического сервиса машин в АПК.

*Ксеневич Иван Павлович***.** Академик Ксеневич И.П. – видный ученый в области теории, создания, экономики и организации производства наземных тягово-транспортных систем и сельскохозяйственной техники. Он внес большой вклад в теорию создания и производство новой техники. Имеет научную школу по проблеме проектирования тракторов и сельскохозяйственных машин на основе блочно-модульного принципа и базовых конструкций. Является разработчиком принципа агрегатирования конструкции, теоретических основ проектирования параметрических рядов тракторов различного назначения и тяговых классов.

Золотой медалью им В.П. Горячкина И.П. Ксеневич награжден за цикл работ по современным проблемам прикладной механики мобильных машин в 2001 г.

Золотой медали имени И.А. Будзко. удостоены два человека: академик И.Ф. Бородин и академик Д.С. Стребков.

Бородин Иван Федорович. Академик Бородин И.Ф. – крупный ученый в области автоматизации и электротехнологий сельскохозяйственного производства. Его научные труды посвящены решению задач использования полупроводников в датчиках и устройствах автоматики сельскохозяйственных процессов, создания технических средств автоматизации и электропривода для сельского хозяйства, использования электромагнитных полей в сельском хозяйстве. Он является руководителем и разработчиком внедренных в сельскохозяйственное производство 68 регионов России способов и устройств для уничтожения сорняков, болезнетворных микроорганизмов и насекомых-вредителей в почве, а также в зерновых смесях и комбикормах; для предпосевной обработки семян СВЧ энергией с целью стимуляции семян и уничтожения вредных организмов на их поверхности; биоэлектрического метода диагностики зерна при хранении и определении жизнеспособности семян.

Золотой медалью им. И.А. Будзко Бородин И.Ф. награжден в 2000 г. за цикл исследований в области электрификации и автоматизации сельского хозяйства, выполненных в 1970-2000 гг., и их внедрение в сельскохозяйственную практику.

Стребков Дмитрий Семенович. Академик Стребков Д.С. – видный ученый в области электрификации сельскохозяйственного производства и возобновляемых источников энергии. Под его руководством и при непосредственном участии разработана технология производства солнечных элементов и модулей, которая внедрена на опытном производстве ВИЭСХ и на четырех конверсионных заводах.

Является одним из авторов резонансного метода передачи электрической энергии для электроснабжения сельскохозяйственных потребителей.

Золотой медалью им. И.А. Будзко Д.С. Стребков награжден в 2003 г. за цикл трудов по исследованию, разработке фотоэлектрических преобразователей солнечной энергии, отличающихся высоким КПД и эффективной технологичностью производства.

1.2.2 История развития техники

В современном сельскохозяйственном секторе невозможно представить себе выполняемые работы без техники или основного и вспомогательного оборудования для вспашки земель, обработки почвы, внесения удобрений, посева полей, уборки и последующей обработки и переработки урожая. Трактор, комбайн, мощный плуг, сеялка, борона, оборудованные склады для хранения зерна, фруктов, овощей, теплица – и все это оборудовано оборудованием для вентиляции, охлаждения / заморозки, подогрева, выгрузки / погрузки.

Еще немногим более ста лет назад каждое новое изобретение сельхозтехники было революционным, переворачивающим все представление о методах обработки почвы и культур, технологии выращивания сельскохозяйственных культур были почти, как и тысячелетия назад. Новым считалось применение удобрений (за исключением традиционного навоза, да и то далеко не везде), вывод новых сортов, приемы обработки земли, усовершенствованные плуги, бороны, сеялки.

Промышленность развивалась намного быстрей – там изобретались новые виды печей для выплавки металлов, механизмы, станки вначале на паровой тяге, потом и на электричестве.

Сельское хозяйство, поля, разбитые на отдельные крохотные участки ее владельцев, ограничивали творческую мысль изобретателей. Все сельскохозяйственные приспособления были рассчитаны на привод в движение лошадьми.

В середине XIX в. был изобретен локомобиль, который и пробовали применять для обработки земель и молотьбы. В обиходе их стали называть паровыми плугами или паровыми тракторами. Но по-настоящему применение получили только локомобили, использовавшиеся для молотьбы. Также с середины XIX в века начались использоваться искусственные удобрения, орошение полей и дренаж.

Крестьянам была недоступна покупка локомобилей, да и многие приемы обработки почвы, орошение, дренаж или они считали это лишней заботой.

С изобретением двигателя внутреннего сгорания ситуация в корне изменилась – начали появляться трактора, заменившие лошадь, и потом другие машины и оборудование, значительно ускорившие процессы обработки почвы, сбора и переработки урожая.

Владеть мелкими хозяйствами стало невыгодным – механизмы и машины стоили дорого и их возможно было применять только на больших площадях полей. Люди начали объединяться, кооперироваться. Сельские хозяйства начали укрупняться во всем мире.

Трактор и комбайн были придуманы в XIX в., но по-настоящему начали совершенствоваться и улучшаться только в середине XX в.

Колыбелью сельскохозяйственного машиностроения в России стала Москва. В 1802 г. на одном из заводов по Мясниковской улице Москвы был налажен выпуск веялок и другого сельскохозяйственного инвентаря.

Среди отечественных ученых весомый вклад в создание и совершенствование сельскохозяйственных машин внесли: Болотов А.Т., Бутентоп Н.А., Комов И.М, Мамин Я.В. и другие.

В настоящее время поступательное развитие сельскохозяйственной техники неразрывно связано с такими науками, как агрономия и экология, поскольку с каждым годом возрастает необходимость не только эффективного и интенсивного использования земель, но и крайне бережного отношения к природным ресурсам.

Основные направления развития сельскохозяйственной техники на современном этапе можно кратко охарактеризовать так:

- повышение пропускной способности, производительности и надежности агрегатов;
- снижение материалоемкости и энергоемкости конструкций;
- улучшение условий труда и безопасности работы;
- соответствие процессов, выполняемых агрегатами, природоохранным требованиям;
- применение компьютерных технологий в управлении сельскохозяйственной техникой, ремонте и регулировках;
- использование средств глобальной навигации GPS для повышения показателей качества и эффективности технологий.

Сельскохозяйственная техника является одной из самых наиболее часто совершенствуемых в угоду техническому прогрессу и потребностям сельхозпроизводства. Ежегодно ведутся научные и практические исследования, внедрение в производство новых образцов сельскохозяйственных машин, разрабатываются системы автоматического управления техникой, внедряются прогрессивные и ресурсосберегающие технологии.

Уже в наше время уровень развития мировой сельскохозяйственной техники настолько высок, что его можно сравнивать с уровнем развития космической и авиационной техники. Поля планеты бороздят сельскохозяйственные машины, способные поразить электронным интеллектом, совершенством форм, конструкций, и требующие от пользователя высокой технической грамотности.

Производители современной сельскохозяйственной техники. В современной России и странах ближнего зарубежья (входивших ранее в состав СССР) выпуском сельскохозяйственной техники и зерноуборочных комбайнов, а также различных комплектующих изделий, занимаются ОАО ПО «Красноярский завод комбайнов», «Гомсельмаш», «Ростсельмаш», майкопский редукторный завод «Зарем», Таганрогский комбайновый завод ОАО «ТКЗ» и многие другие предприятия различных форм собственности.

ОАО «ПО «Красноярский завод комбайнов» создано в 1941 г. на базе двух эвакуированных в ходе второй мировой войны заводов – Запорожского завода «Коммунар» и Люберецкого завода сельскохозяйственного машиностроения им. А.В. Ухтомского.

В последние годы на предприятии ведется разработка и производство комбайнов для уборки зерна, риса и кормов. Ежегодно происходит усовершенствование модельного ряда. Обновляется дополнительное оборудование, в производстве используются все более совершенные двигатели, другие узлы и агрегаты.

Основная продукция:

- зерноуборочные и кормоуборочные комбайны «АГРОМАШ - Енисей»;
- жатвенные части и уборочное оборудование;
- различные агрегаты для других видов техники.

Комбайны «АГРОМАШ – Енисей» эффективно работают практически во всех агроклиматических зонах и на полях различной урожайности, оптимальны для подавляющего большинства посевных площадей России, а после выхода в серию новых комбайнов география использования станет неограниченной. Сегодня комбайны «АГРОМАШ – Енисей», благодаря обширной дилерской сети продаются практически во всех регионах России, СНГ и других странах. «АГРОМАШ – Енисей» укрепил свои позиции на рынках Казахстана и Монголии.

За последние годы модельный ряд Красноярского завода комбайнов полностью обновился. В 2012 г. начато серийное производство инновационного комбайна 5-го класса «АГРОМАШ Енисей 5000».

Сельскохозяйственная техника с маркой «ПАЛЕССЕ» изготавливается на ПО «Гомсельмаш», а также на совместном предприятии «Брянсксельмаш» в г.Брянске с использованием машинокомплектов «Гомсельмаш», на совместных производствах в Удмуртии, Ульяновской и Амурской областях, Красноярском крае и других регионах России. Создано и успешно работает СП в г. Костанай (Казахстан) на базе ОАО «Агромашхолдинг» по производству зерноуборочных и кормоуборочных комбайнов.

В Китае в г. Харбин организовано изготовление кормоуборочных комбайнов КСК-600 и початкоуборочных комбайнов КПС-4 из машинокомплектов «Гомсельмаша», в Аргентине и Чехии работают филиалы компании. «Гомсельмаш» специализируется на выпуске техники: зерноуборочной, кормоуборочной, косилок, жаток, корнеплодоуборочной техники, початкоуборочных комбайнов, универсальных энергетических средств, машинных комплексов, почвоперерабатывающей техники и различного сельскохозяйственного оборудования.

Предприятие «Ростсельмаш» создано в 1929 г. в г. Ростове-на-Дону. Здесь выпускались такие известные комбайны, как «Нива», «Дон» и другая сельскохозяйственная техника. С 1992 г. предприятие было преобразовано в акционерное общество открытого типа, а с 2000 г. стало частным предприятием.

В настоящее время «Ростсельмаш» – это группа компаний, состоящая из 13 предприятий со сборочными производствами, расположенными в России, США, Канаде, Украине и Казахстане. Совокупный оборот более 1 млрд. долл. «Ростсельмаш» занимает прочные позиции в пятерке крупнейших мировых производителей сельхозтехники. Продукция этого концерна известна в мире под маркой «Rostselmash».

Таганрогский комбайновый завод ОАО «ТКЗ» – российское машиностроительное предприятие в Таганроге, образованное в 1915 г., как завод по производству патронов и снарядов, с 1933 г. производил запчасти для тракторов, а позднее – зерноуборочные комбайны:

- Комбайны зерноуборочные самоходные СК-6 «Колос»;
- Комбайны самоходные зерноуборочные двухбарабанные СК-6-II «Колос» (1971-1984);
- Комбайны самоходные полугусеничные рисозерноуборочные СКПР-6 «Колос» (1971-1979);
- Комбайны самоходные гусеничные рисоуборочные СКГД-6 «Колос» (1980-1984)
- Самоходные свеклоуборочные комбайны КС-6Б;
- Комбайны зерноуборочные КЗС-3 «Русь» (1993-2002).

Лидерами мирового производства современной сельскохозяйственной техники являются крупные зарубежные фирмы-производители – «Claas», «Krone» (Германия), «John Deere», «Case IH», «New Holland» (США), «Kuhn», «Lely» (Франция), «Pottinger» (Австрия), «Taarup» (Дания), «Kverneland», «Vicon» («Kverneland Group») и др. Как уже указывалось выше, в пятерку лидеров мирового производства сельхозмашин входит и «Ростсельмаш».

Мировое сельхозмашиностроение и агроинженерная наука – высокоинтегрированные и высокотехнологичные отрасли и в рамках современной глобализации, взаимной конкурентности стран оказывают активное влияние на развитие национальных отраслей сельхозмашиностроения, агроинженерных и научных организаций.

1.3 Структура научного знания

1.3.1 Эмпирическое знание

На эмпирическом уровне преобладает живое созерцание (чувственное познание), рациональный момент и его формы (суждения, понятия и др.) здесь присутствуют, но имеют подчиненное значение. Поэтому исследуемый объект отражается преимущественно со стороны своих внешних связей и проявлений, доступных живому созерцанию и выражающих внутренние отношения.

Сбор фактов, их первичное обобщение, описание наблюдаемых и экспериментальных данных, их систематизация, классификация и иная фактофиксирующая деятельность – характерные признаки эмпирического познания.

Любое научное исследование начинается со сбора, систематизации и обобщения фактов. Понятие «факт» имеет следующие основные значения:

- некоторый фрагмент действительности, объективные события, результаты, относящиеся либо к объективной реальности («факты действительности»), либо к сфере сознания и познания («факты сознания»);
- знание о каком-либо событии, явлении, достоверность которого доказана, т.е. синоним истины;
- предложение, фиксирующее эмпирическое знание, т.е. полученное в ходе наблюдений и экспериментов.

Второе и третье из названных значений резюмируются в понятии «научный факт». Последний становится таковым тогда, когда он является элементом логической структуры конкретной системы научного знания, включен в эту систему.

Собрание эмпирических фактов, как бы обширно оно ни было, без «деятельности ума» не может привести к установлению каких-либо законов и уравнений.

В понимании природы факта выделяются две крайние тенденции: фактуализм и теоретизм.

Если первый подчеркивает независимость и автономность фактов по отношению к различным теориям, то второй, напротив, утверждает, что факты полностью зависят от теории и при смене теорий происходит изменение всего фактуального базиса науки.

Научный факт, обладая теоретической нагрузкой, относительно не зависим от теории, поскольку в своей основе он детерминирован материальной действительностью.

Парадокс теоретической нагруженности фактов разрешается следующим образом. В формировании факта участвуют знания, которые проверены независимо от теории, а факты дают стимул для образования новых теоретических знаний. Последние в свою очередь – если они достоверны – могут снова участвовать в формировании новейших фактов, и т.д.

В научном познании факты играют двоякую роль:

- во-первых, совокупность фактов образует эмпирическую основу для выдвижения гипотез и построения теорий;

- во-вторых, факты имеют решающее значение в подтверждении теорий (если они соответствуют совокупности фактов) или их опровержении (если тут нет соответствия).

Расхождение отдельных или нескольких фактов с теорией не означает, что последнюю надо сразу отвергнуть. Только в том случае, когда все попытки устранить противоречие между теорией и фактами оказываются безуспешными, приходят к выводу о ложности теории и отказываются от нее.

Хотя любой факт, будучи детерминирован реальной действительностью, практикой, так или иначе концептуализирован, «пропитан» определенными теоретическими представлениями, однако всегда необходимо различать факты действительности как ее отдельные, специфические проявления, и факты знания как отражение этих проявлений в сознании человека.

Эмпирический опыт никогда не бывает слепым: он планируется, конструируется теорией, а факты всегда так или иначе теоретически нагружены.

1.3.2 Теоретическое знание

Теоретический уровень научного познания характеризуется преобладанием рационального момента – понятий, теорий, законов и других форм мышления.

Живое созерцание, чувственное познание здесь не устраняется, а становится подчиненным (но очень важным) аспектом познавательного процесса.

Теоретическое познание отражает явления и процессы со стороны их универсальных внутренних связей и закономерностей, постигаемых путем рациональной обработки данных эмпирического знания. Эта обработка осуществляется с помощью систем абстракций «высшего порядка» – таких как понятия, умозаключения, законы, категории, принципы и др.

На основе эмпирических данных здесь происходит мысленное объединение исследуемых объектов, постижение их сущности, «внутреннего движения», законов их существования, составляющих основное содержание теорий – «квинтэссенции» знания на данном уровне.

Важнейшая задача теоретического знания – достижение объективной истины во всей ее конкретности и полноте содержания.

Характерной чертой теоретического познания является его направленность на себя, внутринаучная рефлексия, т.е. исследование самого процесса познания, его форм, приемов, методов, понятийного аппарата и т.д. На основе теоретического объяснения и познанных законов осуществляется предсказание, научное предвидение будущего.

Мышление – осуществляющийся в ходе практики активный процесс обобщенного и опосредованного отражения действительности, обеспечивающий раскрытие на основе чувственных данных ее закономерных связей и их выражение в системе абстракций (понятий, категорий и др.).

Человеческое мышление осуществляется в теснейшей связи с речью, а его результаты фиксируются в языке как определенной знаковой системе, которая может быть естественной или искусственной (язык математики, формальной логики, химические формулы и т.п.).

Мышление человека – не чисто природное его свойство, а выработанная в ходе истории функция социального субъекта, общества в процессе своей предметной деятельности и общения, идеальная их форма.

Поэтому мышление, его формы, принципы, категории, законы и их последовательность внутренне связаны с историей социальной жизни, обусловлены развитием труда, практики. Именно уровень и структура последней обусловливают в конечном итоге способ мышления той или иной эпохи. Вместе с развитием практики, ее усложнением и внутренней дифференциацией изменяется и мышление, проходя определенные уровни.

Исходя из древней философской традиции, следует выделить два основных уровня мышления – рассудок и разум.

Рассудок – исходный уровень мышления. Это способность последовательно и ясно рассуждать, правильно строить свои мысли, четко классифицировать, строго систематизировать факты. Здесь сознательно отвлекаются от развития, взаимосвязи вещей и выражающих их понятий, рассматривая их как нечто устойчивое, неизменное. Главная функция рассудка – расчленение и исчисление. Рассудок – это обыденное повседневное житейское мышление или то, что часто называют здравым смыслом.

Разум (диалектическое мышление) – высший уровень рационального познания, для которого, прежде всего, характерны творческое оперирование абстракциями и сознательное исследование их собственной природы (саморефлексия).

Только на этом своем уровне мышление может постигнуть сущность вещей, их законы и противоречия, адекватно выразить логику вещей в логике понятий. Последние, как и сами вещи, берутся в их взаимосвязи, развитии, всесторонне и конкретно.

Главная задача разума – объединение многообразного вплоть до синтеза противоположностей и выявления коренных причин и движущих сил изучаемых явлений.

Процесс развития мышления включает в себя взаимосвязь и взаимопереход рассудка и разума. Наиболее характерной формой перехода первого во второй является выход за пределы сложившейся готовой системы знания на основе выдвижения новых – диалектических по своей сути – фундаментальных идей.

Формы мышления (логические формы) – способы отражения действительности посредством взаимосвязанных абстракций, среди которых исходными являются понятия, суждения и умозаключения. На их основе строятся более сложные формы рационального познания, такие как гипотеза, теория и другие, которые будут рассмотрены ниже.

Понятие – форма мышления, отражающая общие закономерные связи, существенные стороны, признаки явлений, которые закрепляются в их определениях (дефинициях).

Понятия выражаются в языковой форме – в виде отдельных слов или в виде словосочетаний, обозначающих классы объектов.

Выделение классов предметов и обобщение этих предметов в понятиях является необходимым условием познания законов действительности. Каждая наука оперирует определенными понятиями, в них концентрируются накапливаемые наукой знания.

В понятии может фиксироваться как один признак соответствующих предметов, так и несколько признаков. В зависимости от этого понятия называются простыми или сложными. Такое деление достаточно относительно. Кроме того, выделяют понятия абстрактные и конкретные, собирательные и несобирательные, абсолютные и относительные, положительные и отрицательные и т.п.

Суждение – форма мышления, отражающая отдельные вещи, явления, процессы действительности, их свойства, связи и отношения. Это мыслительное отражение, обычно выражаемое повествовательным предложением, может быть либо истинным, либо ложным.

В форме суждения выражаются любые свойства и признаки предмета, а не только существенные и общие (как в понятии).

Логическая структура суждения включает в себя три элемента: субъект, предикат и связку.

Субъект – это та часть суждения, в которой отражается предмет мысли, иначе говоря, то, о чем идет речь в данном суждении.

Предикат – та часть, которая отражает свойство предмета, т.е. то, о чем говорится в данном суждении.

Связка устанавливает между субъектом и предикатом суждения. Обычно она выражается словами «есть» или «не есть».

В зависимости от основания суждения подразделяются на простые и сложные; утвердительные и отрицательные; единичные, частные и общие; сравнимые и несравнимые, совместимые и несовместимые; суждения атрибутивные, отношения и существования и т.п.

Умозаключение – форма мышления посредством которой из ранее установленного знания (обычно из одного или нескольких суждений, называемых посылками) выводится новое знание (также обычно в виде суждения).

Важными условиями достижения истинного выводного знания являются не только истинность посылок (аргументов, оснований), но и соблюдение правил вывода, недопущение нарушений законов и принципов логики и диалектики.

Наиболее общим делением умозаключений является их деление на два взаимосвязанных вида: индуктивное движение мысли от единичного, частного к общему, от менее общего к более общему, и дедуктивное (силлогизмы), где имеет место обратный процесс.

Рациональное (мышление) взаимосвязано не только с чувственным, но и с другими – внерациональными – формами познания. Большое значение в процессе познания имеют такие факторы, как воображение, фантазия, эмоции и др.

Среди них особенно важную роль играет интуиция (внезапное озарение) – способность прямого, непосредственного постижения истины без предварительных логических рассуждений и без доказательств.

К числу основных компонентов теоретического знания относятся проблема, гипотеза, теория и закон.

Проблема – форма теоретического знания, содержанием которой является то, что еще не познано человеком, но что нужно познать. Иначе говоря, это знание о незнании, вопрос, возникший в ходе познания и требующий ответа.

Проблема не есть застывшая форма знания, а процесс, включающий два основных момента (этапа движения познания) – ее постановку и решение.

Правильное выведение проблемного знания из предшествующих фактов и обобщений, умение верно поставить проблему – необходимая предпосылка ее успешного решения.

Определяющее влияние на способ постановки и решения проблемы имеют, во-первых, характер мышления той эпохи, в которую формулируется проблема, и, во-вторых, уровень знания о тех объектах, которых касается возникшая проблема. Каждой исторической эпохе свойственны свои характерные формы проблемных ситуаций.

Наряду с теоретическими, существуют и практические проблемы.

Гипотеза – форма теоретического знания, содержащая предположение, сформулированное на основе ряда фактов, истинное значение которого неопределенно и нуждается в доказательстве. Гипотетическое знание носит вероятный, а не достоверный характер и требует проверки, обоснования.

Существуют различные виды гипотез. Характер гипотез определяется во многом тем, по отношению к какому объекту они выдвигаются. Так, выделяют гипотезы общие, частные и рабочие. Первые – это обоснованные предположения о закономерностях различного рода связей между явлениями. Общие гипотезы – фундамент построения основ научного знания. Вторые – это тоже обоснованные предположения о происхождении и свойства единичных фактов, конкретных событий и отдельных явлений. Третьи – это предположение, выдвигаемое, как правило, на первых этапах исследования и служащее его направляющим ориентиром, отправным пунктом дальнейшего движения исследовательской мысли.

В ходе доказательства выдвинутых гипотез:

- одни из них становятся истинной теорией,
- другие видоизменяются, уточняются и конкретизируются,
- третьи отбрасываются, превращаются в заблуждения, если проверка дает отрицательный результат.

Выдвижение новой гипотезы, как правило, опирается на результаты проверки старой, даже в том случае, если эти результаты были отрицательными.

Гипотеза является необходимым элементом естественнонаучного познания, которое обязательно включает в себя:

- собирание, описание, систематизацию и изучение фактов;
- составление гипотезы или предположения о причинной связи явлений;
- опытную проверку логических следствий из гипотез;
- превращение гипотез в достоверные теории или отбрасывание ранее принятой гипотезы и выдвижение новой.

Гипотеза является плодотворной, если может привести к новым знаниям и новым методам познания, к объяснению широкого круга явлений.

Говоря об отношении гипотез к опыту, можно выделить три их типа:

- гипотезы, возникающие непосредственно для объяснения опыта;
- гипотезы, в формировании которых опыт играет определенную, но не исключительную роль;
- гипотезы, которые возникают на основе обобщения только предшествующих концептуальных построений.

В современной методологии термин «гипотеза» употребляется в двух основных значениях:

- форма теоретического знания, характеризующаяся проблематичностью и недостоверностью;
- метод развития научного знания.

Как форма теоретического знания гипотеза должна отвечать некоторым общим условиям, которые необходимы для ее возникновения и обоснования и которые нужно соблюдать при построении любой научной гипотезы вне зависимости от отрасли научного знания. Такими непременными условиями являются следующие:

1. Выделяемая гипотеза должна соответствовать установленным в науке законам. Например, ни одна гипотеза не может быть плодотворной, если она противоречит закону сохранения и превращения энергии.

2. Гипотеза должна быть согласована с фактическим материалом, на базе которого и для объяснения которого она выдвинута. Иначе говоря, она должна объяснить все имеющиеся достоверные факты. Но если какой-либо факт не объясняется данной гипотезой, последнюю не следует сразу отбрасывать, а нужно более внимательно изучить прежде всего сам факт, искать новые – более лучшие и достоверные факты.

3. Гипотеза не должна содержать в себе противоречий, которые запрещаются законами формальной логики. Но противоречия, являющиеся отражением объективных противоречий, не только допустимы, но и необходимы в гипотезе.

4. Гипотеза должна быть простой, не содержать ничего лишнего, чисто субъективистского, никаких произвольных допущений, не вытекающих из необходимости познания объекта таким, каков он в действительности. Но это условие не отменяет активности субъекта в выдвижении гипотез.

5. Гипотеза должна быть приложимой к более широкому классу исследуемых родственных объектов, а не только к тем, для объяснения которых она специально была выдвинута.

6. Гипотеза должна допускать возможность ее подтверждения или опровержения: либо прямо – непосредственное наблюдение тех явлений, существование которых предполагается данной гипотезой либо косвенно – путем выведения следствий из гипотезы и их последующей опытной проверки (т.е. сопоставления следствий с фактами). Однако второй способ сам по себе не позволяет установить истинность гипотезы в целом, он только повышает ее вероятность.

Развитие научной гипотезы может происходить в трех основных направлениях:

- во-первых, уточнение, конкретизация гипотезы в ее собственных рамках;
- во-вторых, самоотрицание гипотезы, выдвижение и обоснование новой гипотезы. В этом случае происходит не усовершенствование старой системы знаний, а ее качественное изменение;
- в-третьих, превращение гипотезы как системы вероятного знания – подтвержденной опытом – в достоверную систему знания, т.е. в научную теорию.

Гипотеза как метод развития научно-теоретического знания в своем применении проходит следующие основные этапы:

1. Попытка объяснить изучаемое явление на основе известных фактов и уже имеющихся в науке законов и теорий. Если такая попытка не удается, то делается дальнейший шаг.

2. Выдвигается догадка, предположение о причинах и закономерностях данного явления, его свойств, связей и отношений, о его возникновении и развитии и т.п. На этом этапе познания выдвинутое положение представляет собой вероятное знание, еще не доказанное логически и не настолько подтвержденное опытом, чтобы считаться достоверным. Чаще всего выдвигается несколько предположений для объяснения одного и того же явления.

3. Оценка основательности, эффективности выдвинутых предположений и отбор из их множества наиболее вероятного для обоснованности гипотезы.

4. Развертывание выдвинутого предположения в целостную систему знания и дедуктивное выведение из него следствий с целью их последующей эмпирической проверки.

5. Опытная, экспериментальная проверка выдвинутых из гипотезы следствий. В результате этой проверки гипотеза либо «переходит в ранг» научной теории, или опровергается, «сходит в научной сцены». Однако следует иметь в виду, что эмпирическое подтверждение следствий из гипотезы не гарантирует в полной мере ее истинности, а опровержение одного из следствий не свидетельствует однозначно о ее ложности в целом. Эта ситуация особенно характерна для научных революций, когда происходит коренная ломка фундаментальных концепций и методов и возникают принципиально новые идеи.

Таким образом, решающей проверкой истинности гипотезы является в конечном счете практика во всех своих формах, но определенную (вспомогательную) роль в доказательстве или опровержении гипотетического знания играет и логический (теоретический) критерий истины. Проверенная и доказанная гипотеза переходит в разряд достоверных истин, становится научной теорией.

Теория – наиболее развитая форма научного знания, дающая целостное отображение закономерных и существенных связей определенной области действительности. Примерами этой формы знания являются классическая механика Ньютона, эволюционная теория Ч. Дарвина, теория относительности А. Эйнштейна, теория самоорганизующихся целостных систем (синергетика) и др.

Научная теория должна отвечать следующим критериям:

- не противоречить данным опыта, фактам;
- быть проверяемой на имеющемся опытном материале;
- отличаться «естественностью», т.е. «логической простотой» предпосылок;
- содержать наиболее определенные утверждения: это означает, что из двух теорий с одинаково «простыми» основными положениями следует предпочесть ту, которая сильнее ограничивает возможные априорные качества систем;
- не являться логически произвольно выбранной среди приблизительно равноценных и аналогично построенных теорий;
- отличаться изяществом и красотой, гармоничностью;
- характеризоваться многообразием предметов, которые она связывает в целостную систему абстракций;
- иметь широкую область своего применения с учетом того, что в рамках применимости ее основных понятий она никогда не будет опровергнута;
- указывать путь создания новой, более общей теории, в рамках которой она сама остается предельным случаем.

Любая теория – это целостная развивающаяся система истинного знания (включающая и элементы заблуждения), которая имеет сложную структуру и выполняет ряд функций.

В современной методологии науки выделяют следующие основные элементы структуры теории:

1) Исходные основания – фундаментальные понятия, принципы, законы, уравнения, аксиомы и т.п.

2) Идеализированный объект – абстрактная модель существенных свойств и связей изучаемых предметов.

3) Логика теории – совокупность определенных правил и способов доказательства, нацеленных на прояснение структуры и изменения знания.

4) Философские установки, социокультурные и ценностные факторы.

5) Совокупность законов и утверждений, выведенных в качестве следствий из основоположений данной теории в соответствии с конкретными принципами.

Теория (независимо от своего типа) имеет следующие основные особенности:

1. Теория – это не отдельные взятые достоверные научные положения, а их совокупность, целостная органическая развивающаяся система. Объединение знания в теорию производится, прежде всего, самим предметом исследования, его закономерностями.

2. Не всякая совокупность положений об изучаемом предмете является теорией. Чтобы превратиться в теорию, знание должно достигнуть в своем развитии определенной степени зрелости. А именно – когда оно не просто описывает определенную совокупность фактов, но и объясняет их, т.е. когда знание вскрывает причины и закономерности явлений.

3. Для теории обязательным является обоснование, доказательство входящих в нее положений: если нет обоснований, нет и теории.

4. Теоретическое знание должно стремиться к объяснению как можно более широкого круга явлений, к непрерывному углублению знаний о них.

5. Характер теории определяет степень обоснованности ее определяющего начала, отражающего фундаментальную закономерность данного предмета.

6. Структура научных теорий содержательно определена системной организацией идеализированных (абстрактных) объектов (теоретических конструктов). Высказывания теоретического языка непосредственно формулируются относительно теоретических конструктов и лишь опосредованно, благодаря их отношениям к внеязыковой реальности, описывают эту реальность.

7. Теория – это не только готовое, ставшее знание, но и процесс его получения, поэтому она не является «голым результатом», а должна рассматриваться вместе со своим возникновением и развитием.

К числу основных функций теории можно отнести следующие:

1. Синтетическая функция – объединение отдельных достоверных знаний в единую, целостную систему.

2. Объяснительная функция – выявление причинных и иных зависимостей, многообразия связей данного явления, его суще-

ственных характеристик, законов его происхождения и развития, и т.п.

3. Методологическая функция – на базе теории формулируются многообразные методы, способы и приемы исследовательской деятельности.

4. Предсказательная – функция предвидения. На основании теоретических представлений о «наличном» состоянии известных явлений делаются выводы о существовании неизвестных ранее фактов, объектов или их свойств, связей между явлениями и т.д. Предсказание о будущем состоянии явлений (в отличие от тех, которые существуют, но пока не выявлены) называют научным предвидением.

5. Практическая функция. Конечное предназначение любой теории – быть воплощенной в практику, быть «руководством к действию» по изменению реальной действительности.

Само понятие научности предполагает открытие законов, углубление в сущность изучаемых явлений, определение многообразных условий практической применимости законов.

Изучение законов действительности находит свое выражение в создании научной теории, адекватно отражающей исследуемую предметную область в целостности ее законов и закономерностей. Поэтому закон – ключевой элемент теории, которая есть не что иное, как система законов, выражающих сущность, глубинные связи изучаемого объекта (а не только эмпирические зависимости) во всей его целостности и конкретности, как единство многообразного.

В самом общем виде *закон* можно определить как связь (отношение) между явлениями, процессами, которая является:

- объективной, так как присуща, прежде всего, реальному миру, чувственно-предметной деятельности людей, выражает реальные отношения вещей;

- существенной, конкретно-всеобщей. Будучи отражением существенного в движении универсума, любой закон присущ всем без исключения процессам данного класса, определенного типа (вида) и действует всегда и везде, где развертываются соответствующие процессы и условия;

- необходимой, ибо, будучи тесно связан с сущностью, закон действует и осуществляется с «железной необходимостью» в соответствующих условиях;

- внутренней, так как отражает самые глубинные связи и зависимости данной предметной области в единстве всех ее моментов и отношений в рамках некоторой целостной системы;

- повторяющейся, устойчивой, так как «закон есть прочное (остающееся) в явлении», «идентичное в явлении», их «спокойное отражение». Он есть выражение некоторого постоянства определенного процесса, регулярности его протекания, одинаковости его действия в сходных условиях.

Любой закон не есть нечто неизменное, а представляет собой конкретно-исторический феномен. С изменением соответствующих условий, с развитием практики и познания одни законы сходят со сцены, другие вновь появляются, меняются формы действия законов, способы их использования и т.д.

Многообразие видов отношений и взаимодействий в реальной действительности служит объективной основой существования многих форм (видов) законов, которые классифицируются по тому или иному критерию (основанию):

- по формам движения материи можно выделить законы: механические, физические, химические, биологические, социальные (общественные);

- по основным сферам действительности – законы природы, законы общества, законы мышления;

- по степени их общности, точнее – по широте сферы и действия – всеобщие (диалектические, общие (особенные), частные (специфические);

- по механизму детерминации – динамические и статистические, причинные и непричинные; по их значимости и роли – основные и неосновные;

- по глубине фундаментальности – эмпирические и теоретические и т.д.

1.4 Методология и методы научного познания

1.4.1 Методология и метод

Любое научное исследование осуществляется с использованием определенной методологии и с помощью набора конкретных методов.

Под *методологией* понимают систему принципов и способов организации и построения теоретической и практической деятельности, а также учение об этой системе.

Методологию отличают повышенное внимание к конкретным методам достижения истинного и практически эффективного знания, а также направленность на внутренние механизмы, логику движения и организацию знания.

Методология как общая теория метода исторически формировалась в связи с необходимостью обобщения и дальнейшей разработки всех методов и приемов познавательного процесса. Она тесно связана с некими опорными философскими принципами, прямо или косвенно положенными в основу анализа. В связи с этим у разных групп деятелей науки в особые исторические периоды можно видеть разные методологические установки, принципы и нормы подхода к объектам науки.

В современной науке принято различать общую и частную методологию. В первой анализируются методы, общие для многих наук и для всей науки как особой системы знания, во второй – для отдельных групп наук.

В основе классификации уровней методологии лежит диалектика единичного, особенного и всеобщего:

- на уровне единичного фиксируются многообразные методы частных наук и отдельных дисциплин;
- на уровне особенного – междисциплинарные и общенаучные методы;
- на уровне всеобщего – философские методы, совокупность форм, способов и стилей мышления.

Метод (от греческого слова «методос» – путь к чему- либо) означает совокупность приемов и операций практического и теоретического освоения действительности.

Метод вооружает человека системой принципов, требований, правил, руководствуясь которыми он может достичь намеченной цели.

Владение методом означает для человека знание того, каким образом, в какой последовательности совершать те или иные действия для решения тех или иных задач, и умение применять это знание на практике.

В производственной деятельности очень многое зависит от инструментов и орудий деятельности, а прорыв в этой сфере ведет к крупнейшим преобразованиям общества.

Современное общество немыслимо без информационных технологий, без использования высокоточной техники и т.д. В научной деятельности в свое время изобретение телескопа и микроскопа привело к существенному прорыву.

Для современной научной деятельности, включающей в себя эмпирическую и теоретическую составляющие, все более значимыми становятся средства и методы теоретического исследования.

Традиционные методы исследования, такие, как наблюдение и измерение, дополняются методами моделирования, позволяющими существенно расширить горизонты познания, включив временную составляющую.

В случае наблюдения исследователь привязан к предмету исследования, моделирование снимает эту ограниченность, позволяя на основе моделей проследить его во времени и пространстве, тем самым получить более полную информацию.

Учение о методе начало развиваться еще в науке Нового времени. Ее представители считали правильный метод ориентиром в движении к надежному, истинному знанию.

Ф. Бэкон сравнивал метод со светильником, освещающим путнику дорогу в темноте, и полагал, что нельзя рассчитывать на успех в изучении какого-либо вопроса, идя ложным путем.

Философ стремился создать такой метод, который мог бы быть «органоном» (орудием) познания, обеспечить человеку господство над природой. Таким методом он считал индукцию, которая требует от науки исходить из эмпирического анализа, наблюдения и эксперимента с тем, чтобы на этой основе познать причины и законы.

Р. Декарт методом называл «точные и простые правила», соблюдение которых способствует приращению знания, позволяет отличить ложное от истинного. Он говорил, что уж лучше не помышлять об отыскивании каких бы то ни было истин, чем делать это без всякого метода, особенно без дедуктивно-рационалистического.

Существенный вклад в методологию внесли немецкая классическая (особенно Гегель) и материалистическая философии (особенно К. Маркс), достаточно глубоко разработавшие диалектический метод – соответственно на идеалистической и материалистической основах.

Проблемы метода и методологии занимают важное место в современной западной философии, особенно в таких ее направлениях и течениях, как философия науки, позитивизм и постпозитивизм, структурализм и постструктурализм, аналитическая философия, герменевтика, феноменология и в других.

1.4.2 Классификация методов

Многообразие видов человеческой деятельности обусловливает многообразный спектр методов, которые могут быть классифицированы по самым различным основаниям (критериям). Прежде всего, следует выделить:

- методы духовной, идеальной (в том числе научной) деятельности;
- методы материальной (практической) деятельности.

Что касается методов науки, то оснований их деления на группы может быть несколько.

1) в зависимости от роли и места в процессе научного познания:

- формальные и содержательные;
- эмпирические и теоретические,
- фундаментальные и прикладные,
- исследования и изложения.

2) по содержанию изучаемых наукой объектов:

- методы естествознания
- методы социально-гуманитарных наук.

3) выделяют также:

- качественные и количественные методы,

- однозначно-детерминистские и вероятностные,
- методы непосредственного и опосредованного познания,
- оригинальные и производные и т. д.

В структуре общенаучных методов и приемов чаще всего выделяют три уровня:

- методы эмпирического исследования;
- методы теоретического познания;
- общелогические методы и приемы исследования.

Методы эмпирического исследования.

1. *Наблюдение* – целенаправленное пассивное изучение предметов, опирающееся в основном на данные органов чувств. В ходе наблюдения мы получаем знания не только о внешних сторонах объекта познания, но и – в качестве конечной цели – о его существенных свойствах и отношениях.

Наблюдение может быть непосредственным и опосредованным различными приборами и другими техническими устройствами. По мере развития науки оно становится все более сложным и опосредованным.

Основные требования к научному наблюдению:

- однозначность замысла (что именно наблюдается);
- возможность контроля путем либо повторного наблюдения, либо с помощью других методов (например, эксперимента).

Важным моментом наблюдения является интерпретация его результатов – расшифровка показаний приборов и т.п.

2. *Эксперимент* – активное и целенаправленное вмешательство в протекание изучаемого процесса, соответствующее изменение исследуемого объекта или его воспроизведение в специально созданных и контролируемых условиях, определяемых целями эксперимента. В его ходе изучаемый объект изолируется от влияния побочных, затемняющих его сущность обстоятельств и представляется в «чистом виде».

Основные особенности эксперимента:

а) более активное (чем при наблюдении) отношение к объекту исследования, вплоть до его изменения и преобразования;

б) возможность контроля за поведением объекта и проверки результатов;

в) многократная воспроизводимость изучаемого объекта по желанию исследователя;

г) возможность обнаружения таких свойств явлений, которые не наблюдаются в естественных условиях.

Виды (типы) экспериментов весьма разнообразны.

Так, по своим функциям выделяют:

- исследовательские (поисковые),
- проверочные (контрольные),
- воспроизводящие эксперименты.

По характеру объектов различают физические, химические, биологические, социальные и т.п.

Существуют эксперименты качественные и количественные. Широкое распространение в современной науке получил мысленный эксперимент – система мыслительных процедур, проводимых над идеализированными объектами.

3. *Сравнение* – познавательная операция, выявляющая сходство или различие объектов (либо ступеней развития одного и того же объекта), т.е. их тождество и различия. Оно имеет смысл только в совокупности однородных предметов, образующих класс. Сравнение предметов в классе осуществляется по признакам, существенным для данного рассмотрения. При этом предметы, сравниваемые по одному признаку, могут быть несравнимы по-другому.

Сравнение является основой такого логического приема, как аналогия, и служит исходным пунктом сравнительно-исторического метода. Его суть – выявление общего и особенного в познании различных ступеней (периодов, фаз) развития одного и того же явления или разных сосуществующих явлений.

4. *Описание* – познавательная операция, состоящая в фиксировании результатов опыта (наблюдения или эксперимента) с помощью определенных систем обозначения, принятых в науке.

5. *Измерение* – совокупность действий, выполняемых при помощи определенных средств с целью нахождения числового значения измеряемой величины в принятых единицах измерения. Следует подчеркнуть, что методы эмпирического исследования никогда не реализуются «вслепую», а всегда «теоретически нагружены», направляются определенными концептуальными идеями.

Методы теоретического исследования.

1.*Формализация* – отображение содержательного знания в знаково-символическом виде (формализованном языке). Последний создается для точного выражения мыслей с целью исключения возможности для неоднозначного понимания.

При формализации рассуждения об объектах переносятся в плоскость оперирования со знаками (формулами), что связано с построением искусственных языков (язык математики, логики, химии и т.п.).

Именно использование специальной символики позволяет устранить многозначность слов обычного, естественного языка. В формализованных рассуждениях каждый символ строго однозначен. Формализация служит основой для процессов алгоритмизации и программирования вычислительных устройств, а тем самым и компьютеризации не только научно-технического, но и других форм знания.

Главное в процессе формализации состоит в том, что над формулами искусственных языков можно производить операции, получать из них новые формулы и соотношения. Тем самым операции с мыслями о предметах заменяются действиями со знаками и символами.

Формализация, таким образом, есть обобщение форм различных по содержанию процессов, абстрагирование этих форм от их содержания. Она уточняет содержание путем выявления его формы и может осуществляться с различной степенью полноты. Все более углубляющаяся формализация содержания знания никогда не достигает абсолютной полноты, ибо никогда не прекращается развитие (изменение) предмета познания и знаний о нем. Это означает, что формализация внутренне ограничена в своих возможностях. Доказано, что всеобщего метода, позволяющего любое рассуждение заменить вычислением не существует.

2. *Аксиоматизация* – способ построения научной теории, при котором в ее основу кладутся некоторые исходные положения – аксиомы (постулаты), из которых все остальные утверждения этой теории выводятся из них чисто логическим путем, посредством доказательства.

Для вывода теорем из аксиом (и вообще одних формул из других) формулируются специальные правила вывода. Следовательно, доказательство в аксиоматическом методе – это некоторая последовательность формул, каждая из которых есть либо аксиома, либо получается из предыдущих формул по какому-либо правилу вывода.

Аксиоматический метод – лишь один из методов построения уже добытого научного знания. Он имеет ограниченное применение, поскольку требует высокого уровня развития аксиоматизированной содержательной теории.

3. *Гипотетико-дедуктивный метод* – метод научного познания, сущность которого заключается в создании системы дедуктивно связанных между собой гипотез, из которых в конечном счете выводятся утверждения об эмпирических фактах. Тем самым этот метод основан на выведении (дедукции) заключений из гипотез и других посылок, истинностное значение которых неизвестно. А это значит, что заключение, полученное на основе данного метода, неизбежно будет иметь вероятностный характер.

Общая структура гипотетико-дедуктивного метода:

а) ознакомление с фактическим материалом, требующим теоретического объяснения и попытка такового с помощью уже существующих теорий и законов. Если нет, то:

б) выдвижение догадки (гипотезы, предположения) о причинах и закономерностях данных явлений с помощью разнообразных логических приемов;

в) оценка основательности и серьезности предположений и отбор из множества из них наиболее вероятного;

г) выведение из гипотезы (обычно дедуктивным путем) следствий с уточнением ее содержания;

д) экспериментальная проверка выведенных из гипотезы следствий. Тут гипотеза или получает экспериментальное подтверждение, или опровергается. Однако подтверждение отдельных следствий не гарантирует ее истинности (или ложности) в целом. Лучшая по результатам проверки гипотеза переходит в теорию.

Разновидностью гипотетико-дедуктивного метода можно считать математическую гипотезу, где в качестве гипотез выступают некоторые уравнения, предоставляющие модификацию ранее известных и проверенных состояний. Изменяя последние, составляют новое уравнение, выражающее гипотезу, которая относится к новым явлениям.

Гипотетико-дедуктивный метод (как и аксиоматический) является не столько методом открытия, сколько способом построения и обоснования научного знания, поскольку он показывает каким именно путем можно прийти к новой гипотезе.

4. *Восхождение от абстрактного к конкретному* – метод теоретического исследования и изложения, состоящий в движении научной мысли от исходной абстракции («начало» – одностороннее, неполное знание) через последовательные этапы углубления и расширения познания к результату – целостному воспроизведению в теории исследуемого предмета.

В качестве своей предпосылки данный метод включает в себя восхождение от чувственно-конкретного к абстрактному, к выделению в мышлении отдельных сторон предмета и их «закреплению» в соответствующих абстрактных определениях.

Движение познания от чувственно-конкретного к абстрактному – это и есть движение от единичного к общему, здесь преобладают такие логические приемы, как анализ и индукция.

Восхождение от абстрактного к мысленно-конкретному – это процесс движения от отдельных общих абстракций к их единству, конкретно-всеобщему, здесь господствуют приемы синтеза и дедукции.

Такое движение познания – не какая-то формальная, техническая процедура, а диалектически противоречивое движение, отражающее противоречивое развитие самого предмета, его переход от одного уровня к другому в соответствии с развертыванием его внутренних противоречий.

Общелогические методы и приемы исследования.

1. *Анализ* – реальное или мысленное разделение объекта на составные части и *синтез* – их объединение в единое органическое целое. Этот метод играет очень важную роль в познавательном процессе и осуществляется на всех его ступенях.

2. *Абстрагирование* – процесс мысленного отвлечения от ряда свойств и отношений изучаемого явления, с одновременным выделением интересующих исследователя свойств.

3. *Обобщение* – процесс установления общих свойств и признаков предмета, тесно связано с абстрагированием.

4. *Идеализация* – мыслительная процедура, связанная с образованием абстрактных (идеализированных) объектов, принци-

пиально не осуществимых в действительности («точка», «идеальный газ», «абсолютно черное тело» и т. п.).

5. *Индукция* – движение мысли от единичного (опыта, фактов) к общему (их обобщению в выводах) и *дедукция* – восхождение процесса познания от общего к единичному.

6. *Аналогия* – прием познания, с помощью которого обнаруживают сходство нетождественных объектов в некоторых значимых сторонах и отношениях.

7. *Моделирование* – метод исследования определенных объектов путем воспроизведения их характеристик на другом объекте – модели, которая представляет собой аналог того или иного фрагмента действительности (вещного или мыслительного) – оригинала модели.

8. *Классификация* – разделение всех изучаемых предметов на какие-то группы в соответствии со значимыми для данного исследования признаками. Классификация предназначена для постоянного использования в какой-либо науке или области практической деятельности. Обычно в качестве оснований деления в классификации выбирают признаки, существенные для данных предметов, объектов.

9. *Системный подход* – совокупность общенаучных методологических принципов (требований), в основе которых лежит рассмотрение объектов как систем

10. *Структурно-функциональный (структурный) метод* строится на основе выделения в целостных системах их структуры – совокупности устойчивых отношений и взаимосвязей между ее элементами и их роли (функций) относительно друг друга

11. *Вероятностно-статистические методы* основаны на учете действия множества случайных факторов, которые характеризуются устойчивой частотой.

Таким образом, в научном познании функционирует сложная, динамичная, субординированная система многообразных методов разных уровней, сфер действия, направленности и т.п., которые всегда реализуются с учетом конкретных условий и предмета исследования.

Вопросы методологии естественнонаучного анализа и совокупность используемых методов анализа не выступают застывшими, раз и навсегда данными. Напротив, в разные исторические периоды и в разных научных контекстах на первый план выходят различные методологические принципы и разные группы методов. Отчасти это зависит от предпочтений конкретных деятелей науки, исследователей, ног в большей мере все же от существа стоящих перед исследователем задач, от специфики самих объектов научного анализа, использования учеными конкретных групп методов в рамках данного исследования.

2 МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДАННЫХ В НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

2.1 Элементы математической статистики

Математическая статистика - это раздел прикладной математики, в котором рассматриваются методы отыскания законов и характеристик случайных величин по результатам наблюдений и экспериментов.

Анализ статистических данных включает оценку вероятностей события, функции распределения вероятностей или плотности вероятностей, оценку параметров известного распределения, оценку связей между случайными величинами.

Математическая статистика опирается на теорию вероятностей и в свою очередь служит основой для разработки методов обработки и анализа статистических результатов в конкретных областях человеческой деятельности.

2.1.1 Выборка и ее распределение

2.1.1.1 Генеральная совокупность и выборка

Основными понятиями математической статистики являются генеральная совокупность и выборка.

Генеральная совокупность – это совокупность всех мысленно возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения с целью получения конкретных значений определенной случайной величины.

Генеральная совокупность может быть *конечной* или *бесконечной* в зависимости от того, конечна или бесконечна совокупность составляющих ее объектов.

Не следует смешивать понятие генеральной совокупности с реально существующими совокупностями. Например, на склад поступила продукция некоторого цеха за месяц, что является реально существующей совокупностью, которую нельзя назвать генеральной, поскольку выпуск продукции можно мысленно продолжить сколь угодно долго.

Выборкой (выборочной совокупностью) называется совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности.

Выборка должна быть *репрезентативной (представительной)*, то есть ее объекты должны достаточно хорошо отражать свойства генеральной совокупности.

Выборка может быть *повторной*, при которой отобранный объект (перед отбором следующего) возвращается в генеральную совокупность, и *бесповторной*, при которой отобранный объект не возвращается в генеральную совокупность.

Применяют различные способы получения выборки.

1) *Простой отбор* – случайное извлечение объектов из генеральной совокупности с возвратом или без возврата.

2) *Типический отбор,* когда объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из ее «типической» части.

3) *Серийный отбор* – объекты отбираются из генеральной совокупности не по одному, а сериями.

4) *Механический отбор* - генеральная совокупность «механически» делится на столько частей, сколько объектов должно войти в выборку и из каждой части выбирается один объект.

Число N объектов генеральной совокупности и число n объектов выборки называют объемами генеральной и выборочной совокупностей соответственно. При этом предполагают, что $N >> n$ (значительно больше).

2.1.2. Вариационные ряды

Полученные различными способами отбора данные образуют выборку, обычно это множество чисел, расположенных в беспорядке. По такой выборке трудно выявить какую-либо закономерность их изменения (*варьирования*).

Для обработки данных используют операцию *ранжирования*, которая заключается в том, что результаты наблюдений над случайной величиной, то есть наблюдаемые значения случайной величины располагают в порядке возрастания.

Пример 1. Дана выборка : $2,4,7,3,1,1,3,2,7,3$

Проведем ранжирование выборки : $1,1,2,2,3,3,3,4,7,7$.

После проведения операции ранжирования значения случайной величины объединяют в группы, то есть группируют так, что в каждой отдельной группе значения случайной величины одинаковы. Каждое такое значение называется *вариантом.* Варианты обозначаются строчными буквами латинского алфавита с индексами, соответствующими порядковому номеру группы x_i , y_j ,... . Изменение значения варианта называется *варьированием.*

Последовательность вариантов, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*.

Число, которое показывает, сколько раз встречаются соответствующие значения вариантов в ряде наблюдений, называется *частотой* или *весом варианта* и обозначается n_i, где i - номер варианта.

Отношение частоты данного варианта к общей сумме частот называется относительной частотой или *частостью* (*долей*) соответствующего варианта и обозначается $p_i^* = \left(\dfrac{n_i}{n}\right)$ или $p_i^* = \dfrac{n_i}{\sum\limits_{i=1}^{m} n_i}$, где m - число вариантов. Частость является статистической вероятностью появления варианта x_i. Естественно считать частость p_i^* аналогом вероятности p_i появления значения x_i случайной величины X .

Дискретным статистическим рядом называется ранжированная совокупность вариантов (x_i) с соответствующими им частотами (n_i) или частостями (p_i^*).

Дискретный статистический ряд удобно записывать в виде таблицы 1.

Таблица 1 – Дискретный статистический ряд

x_i	1	2	3	4	7
n_i	2	2	3	1	2
$\frac{n_i}{n}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$\sum_{i=1}^{5} n_i = 10 ;$$

$$\sum_{i=1}^{5} p_i^* = 1.$$

Характеристики дискретного статистического ряда:

1. *Размах варьирования* $R = x_{max} - x_{min}$.

2. *Мода* $\left(M_0^*\right)$ - вариант, имеющий наибольшую частоту (в примере 1. $M_0^* = 3$).

3. *Медиана* $\left(M_e^*\right)$ - значение случайной величины, приходящееся на середину ряда.

Пусть n - объем выборки.

Если $n = 2k$, то есть ряд имеет четное число членов, то $M_e^* = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$. Если $n = 2k+1$, то есть ряд имеет нечетное число членов, то $M_e^* = x_{k+1}$. (в примере 1. $M_e^* = 3$).

Если изучаемая случайная величина X является непрерывной или число значений ее велико, то составляют *интервальный статистический ряд.*

Сначала определяют число интервалов m, в зависимости от объема выборки, с помощью табл.2.

Таблица 2 –

Объем выборки	25-40	40-60	60-100	100-200	более 200
Число интервалов	5-6	6-8	7-10	8-12	10-15

Затем определяют длину частичного интервала h:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{m},$$

где h - шаг ; m - число интервалов .

Более точно шаг можно рассчитать с помощью формулы Стерджеса:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3{,}322\, lg\, n},$$

число интервалов $m \approx (1 + 3{,}322\, lg\, n)$.

Если шаг окажется дробным, то за длину интервала берут ближайшее целое число или ближайшую простую дробь (обычно берут интервалы одинаковые по длине, но могут быть интервалы и разной длины).

За начало первого интервала рекомендуется брать величину

$$x_{нач} = x_{min} - \frac{h}{2},$$

а конец последнего должен удовлетворять условию

$$x_{кон} - h \le x_{max} < x_{кон}.$$

Промежуточные интервалы получают, прибавляя к концу предыдущего интервала шаг.

Просматривая результаты наблюдений, определяют сколько значений случайной величины попало в каждый конкретный интервал. При этом в интервал включают значения, большие или равные нижней границе интервала, и меньшие – верхней границы.

В первую строку таблицы статистического распределения вписывают частичные промежутки

$$[x_0, x_1), [x_1, x_2), \ldots, [x_{m-1}, x_m).$$

Во второю строку статистического ряда вписывают количество наблюдений n_i (где $i = \overline{1,m}$) попавших в каждый интервал; то есть частоты соответствующих интервалов.

При вычислении интервальных частостей округление результатов следует производить таким образом, чтобы сумма частостей была равна 1.

Иногда интервальный статистический ряд, для простоты исследований, условно заменяют дискретным. В этом случае серединное значение i-го интервала принимают за вариант x_i, а соответствующую интервальную частоту n_i - за частоту этого варианта.

2.1.3. Эмпирическая функция распределения

Пусть получено статистическое распределение выборки и каждому варианту из этой выборки поставлена в соответствие его частость.

Эмпирической функцией (функцией распределения выборки) называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x частость события $\{X < x\}$,

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n - объем выборки, n_x - число наблюдений, меньших x $(x \in R)$.

При увеличении объема выборки частость события $\{X < x\}$ приближается к вероятности этого события. Эмпирическая функция $F^*(x)$ является оценкой интегральной функции $F(x)$ в теории вероятностей.

Функция $F^*(x)$ обладает теми же свойствами, что и функция $F(x)$:

1. $0 \le F^*(x) \le 1$;
2. $F^*(x)$ -неубывающая функция;
3. $F^*(-\infty) = 0$, $F^*(+\infty) = 1$.

Пример 2. Построить эмпирическую функцию и ее график по данным таблицы 1

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \textit{при} \quad x \le 0; \\ 0{,}2 \quad \textit{при} \quad 0 < x \le 2; \\ 0{,}4 \quad \textit{при} \quad 2 < x \le 3; \\ 0{,}7 \quad \textit{при} \quad 3 < x \le 4; \\ 0{,}8 \quad \textit{при} \quad 4 < x \le 10; \\ 1 \quad \textit{при} \quad x > 10; \end{cases}$$

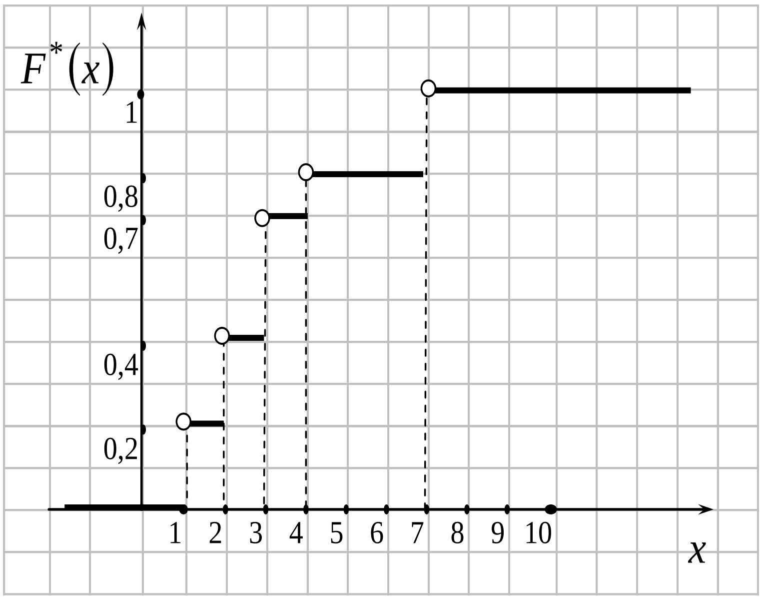


Рисунок 1 – График эмпирической функции

2.1.4. Эмпирическая плотность распределения

Для интегральной функции распределения $F(x)$ справедливо приближенное равенство:

$$F(x+\Delta)-F(x)\approx f(x)\cdot\Delta x,$$

где $f(x)$- дифференциальная функция распределения (функция плотности вероятности).

Выборочным аналогом функции $f(x)$ считать функцию:

$$f^*(x)=\frac{F^*(x+\Delta x)-F^*(x)}{\Delta x},$$

где $F^*(x+\Delta x)-F^*(x)$ - частость попадания наблюдаемых значений случайной величины X в интервал $[x;\, x+\Delta x)$.

Таким образом, значение $f^*(x)$ характеризует плотность частости на этом интервале.

Пусть наблюдаемые значения непрерывной случайной величины представлены в виде интервального вариационного ряда.

Полагая, что p_i^* - частость попадания наблюдаемых значений в интервал

$$[a_i;\, a_i+h),$$

где h - длина частичного интервала, выборочную функцию плотности $f^*(x)$ можно задать соотношением

$$f^*(x)=\begin{cases} 0\ , при\quad x<a_1, \\ \dfrac{p_i^*}{h}\ , при\quad a_i \le x \le a_{i+1},\ i=1,2,\dots m, \\ 0\ , при\quad x>a_{m+1}, \end{cases}$$

где a_{m+1} - конец последнего m- го интервала.

Так как функция $f^*(x)$ является аналогом распределения плотности случайной величины, площадь область под графиком этой функции равна 1.

2.1.5. Графическое изображение статистических данных

Статистическое распределение изображается графически с помощью полигона и гистограммы.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_i, n_i); *полигоном частостей* – с координатами (x_i, p_i^*), где $p_i^* = \dfrac{n_i}{n}$, $i=\overline{1,m}$.

Полигон служит для изображения дискретного статистического ряда.

Полигон частостей является аналогом многоугольника распределения дискретной случайной величины в теории вероятностей.

Гистограммой частот (частостей) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основания которых расположены на оси Ox и длины их равны длинам частичных интервалов (h), а высоты равны отношению:

$\dfrac{n_i}{h}$ - для гистограммы частот;

$\dfrac{n_i}{n \cdot h}$ - для гистограммы частостей.

Гистограмма является графическим изображением интервального ряда.

Площадь гистограммы частот равна n, а гистограммы частостей равна 1.

Можно построить полигон для интервального ряда, если его преобразовать в дискретный ряд. В этом случае интервалы заменяют их серединными значениями и ставят в соответствие интервальные частоты (частости). Полигон получим, соединив отрезками середины верхних оснований прямоугольников гистограммы.

Пример 3. Дана выборка значений случайной величины X объема 20:

12, 14, 19, 15, 14, 18, 13, 16, 17, 12
18, 17, 15, 13, 17, 14, 14, 13, 14, 16

Требуется: построить дискретный вариационный ряд; найти размах варьирования R, моду M_0, медиану M_e; построить полигон частостей.

1) Ранжируем выборку : 12, 12, 13, 13, 13, 14, 14, 14, 14, 14, 15, 15, 16, 16, 17, 17, 17, 18, 18, 19.

2) Находим частоты вариантов и строим дискретный вариационный ряд (таблица 3)

Таблица 3 – Расчёт значений к примеру 3

Значения вариантов x_i	12	13	14	15	16	17	18	19	
Частоты n_i	2	3	5	2	2	3	2	1	$\sum_{i=1}^{8} n_i = 20$
Частости $p_i^* = \frac{n_i}{n}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{5}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\sum_{i=1}^{8} p_i = 1$

3) По результатам таблицы 3 находим:

$$R = 19 - 12 = 7, \quad M_0 = 14, \quad M_e = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{14+15}{2} = 14{,}5$$

4) Строим полигон частостей.

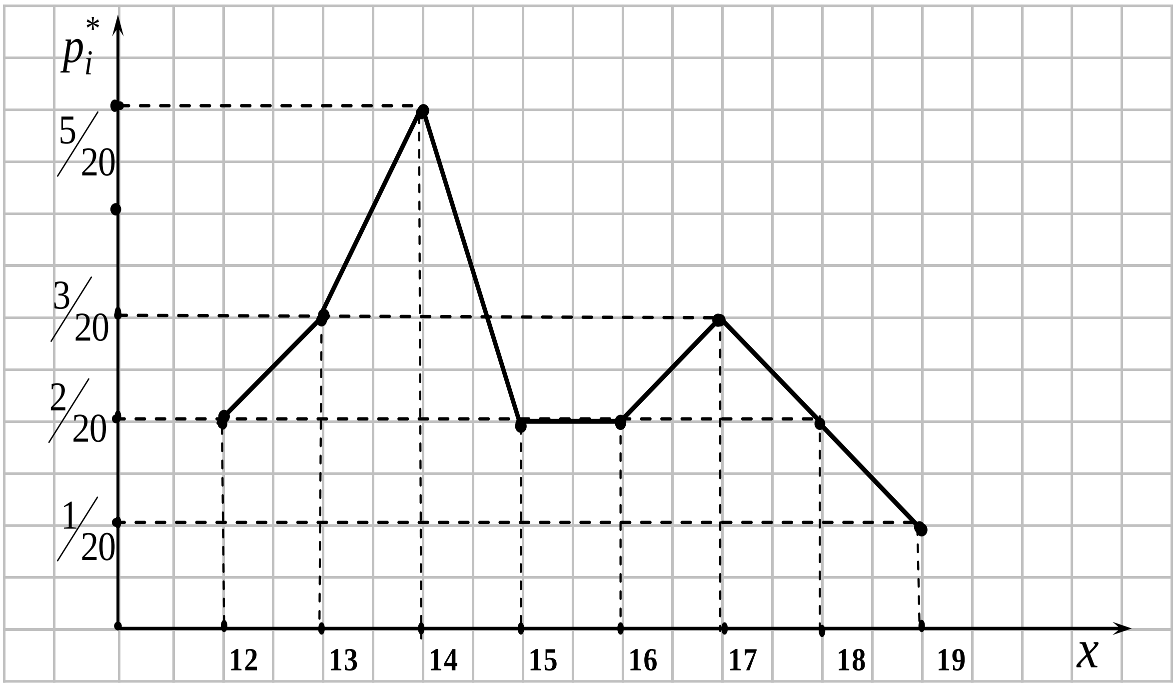


Рисунок 2 – Полигон частостей

Пример 4. Результаты измерений отклонений от нормы диаметров 50 подшипников дали численные значения (в мкм), приведенные в таблице 4.

Таблица 4 – Данные к примеру 4

-1,760	-0,291	-0,110	-0,450	0,512
-0,158	1,701	0,634	0,720	0,490
1,531	-0,433	1,409	1,740	-0,266
-0,058	0,248	-0,095	-1,488	-0,361
0,415	-1,382	0,129	-0,361	-0,087
-0,329	0,086	0,130	-0,244	-0,882
0,318	-1,087	0,899	1,028	-1,304
0,349	-0,293	0,105	-0,056	0,757
-0,059	-0,539	-0,078	0,229	0,194
0,123	0,318	0,367	-0,992	0,529

Для данной выборки: построить интервальный вариационный ряд; построить гистограмму и полигон частостей.

1. Строим интервальный ряд. По данным таблицы 4 определяем: $x_{min} = -1{,}76$; $x_{max} = 1{,}74$

Для определения длины интервала h используем формулу Стерджеса:

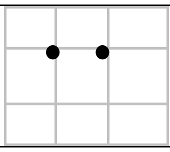
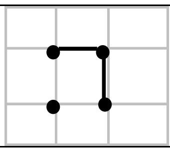
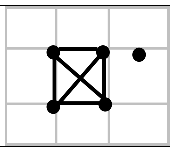
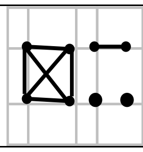
$$h=\frac{x_{max}-x_{min}}{1+3{,}322\,lg\,50}.$$

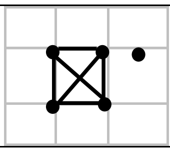
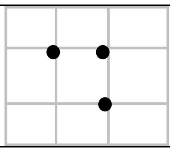
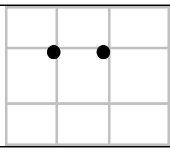
Число интервалов $m\approx 1+3{,}322\,lg\,50$.

$$h=\frac{x_{max}-x_{min}}{1+3{,}322\,lg\,50}=\frac{1{,}74-(-1{,}76)}{1+3{,}322\,lg\,50}\approx\frac{3{,}5}{1+3{,}322\,lg\,50}\approx\frac{3{,}5}{6{,}644}\approx 0{,}526$$

Примем h=0,6 , $m=7$.

Таблица 5 – Результаты расчёта

Интервалы	$[-2{,}06;-1{,}46)$	$[-1{,}46;-0{,}86)$	$[-0{,}86;-0{,}26)$	$[-0{,}26;\,0{,}34)$
Подсчет частот				
Частоты n_i	2	6	11	15
Частости p_i	$\frac{2}{50}$	$\frac{6}{50}$	$\frac{11}{50}$	$\frac{15}{50}$

Интервалы	$[0{,}34;\,0{,}94)$	$[0{,}94;1{,}54)$	$[1{,}54;\,2{,}14)$
Подсчет частот			
Частоты n_i	11	3	2
Частости p_i	$\frac{11}{50}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{2}{50}$

$\sum_{i=1}^{7} n_i=50$;

$\sum_{i=1}^{7} p_i=1$.

За начало первого интервала примем величину

$$x_{нач}=x_{min}-\frac{h}{2}=-1{,}76-0{,}3=-2{,}06.$$

Конец последнего интервала должен удовлетворять условию:

$$x_{кон}-h\le x_{max}<x_{кон}.$$

Действительно, $2{,}14-0{,}6\le 1{,}74<2{,}14$; $1{,}54\le 1{,}74<2{,}14$.

Строим интервальный ряд (таблица 5).

Вершинами полигона являются середины верхних оснований прямоугольников гистограммы.

Убедимся, что площадь гистограммы равна 1.

$$S = h \cdot \left(\frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_m}{n \cdot h} \right)$$

$$S = 0{,}6(0{,}07 + 0{,}2 + 0{,}37 + 0{,}5 + 0{,}37 + 0{,}1 + 0{,}07) = 0{,}6 \cdot 1{,}68 = 1{,}008 \approx 1$$

Строим гистограмму частостей.

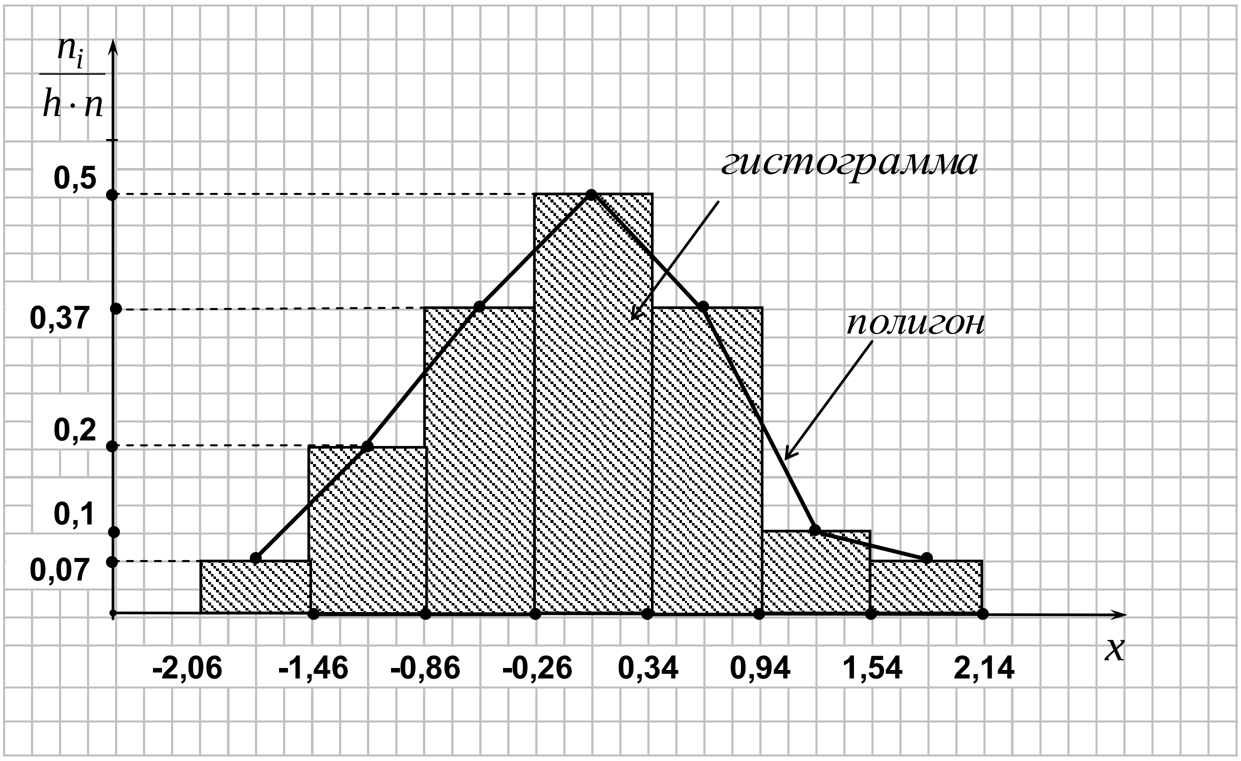


Рисунок 3 – Гистограмму частостей

2.1.6. Числовые характеристики выборки

2.1.6.1. Выборочное среднее. Выборочная дисперсия. Выборочное среднее квадратическое отклонение

В теории вероятностей определили числовые характеристики для случайных величин, с помощью которых можно сравнивать однотипные случайные величины. Аналогично можно определить ряд числовых характеристик и для выборки. Поскольку эти характеристики вычисляются по статистическим данным (по данным, полученным в результате наблюдений), их называют *статистическими характеристиками.*

Пусть дано статистическое распределение выборки объема n:

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	...	x_m
n_i	n_1	n_2	n_3	n_4	...	n_m

где m - число вариантов.

Выборочным средним $\overline{x_в}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i n_i .$$

Выборочное среднее можно записать и так: $\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i p_i^* ,$

где p_i^* - частость.

В случае интервального статистического ряда в качестве x_i берут середины интервалов, а n_i - соответствующие им частоты.

Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i \qquad \text{или} \qquad D_в = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot p_i^* .$$

Выборочное среднее квадратическое выборки определяется формулой:

$$\sigma_в = \sqrt{D_в} .$$

Особенность $\sigma_в$ состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах, что и данные выборки.

Если объем выборки мал ($n \le 30$), то пользуются *исправленной выборочной дисперсией*:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в .$$

Величина $S=\sqrt{S^2}$ называется *исправленным средним квадратическим отклонением.*

2.1.6.2. Выборочные начальные и центральные моменты. Асимметрия. Эксцесс.

Приведем краткий обзор характеристик, которые наряду с уже рассмотренными применяются для анализа статистических рядов и являются аналогами соответствующих числовых характеристик случайной величины.

Среднее выборочное и выборочная дисперсия являются частным случаем более общего понятия – *момента* статистического ряда.

Начальным выборочным моментом порядка l называется среднее арифметическое l - х степеней всех значений выборки:

$$\nu_l^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i^l \cdot n_i \quad \text{или} \quad \nu_l^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^l \cdot p_i^* .$$

Из определения следует, что начальный выборочный момент первого порядка: $\nu_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot n_i = \overline{x_в}$.

Центральным выборочным моментом порядка l называется среднее арифметическое l - х степеней отклонений наблюдаемых значений выборки от выборочного среднего $\overline{x_в}$:

$$\mu_l^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^l \cdot n_i \quad \text{или} \quad \mu_l^* = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^l \cdot p_i^* .$$

Из определения следует, что *центральный выборочный момент второго порядка* :

$$\mu_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}\left(x_i - \overline{x_в}\right)^2 \cdot n_i = D_в = \sigma_в^2 .$$

Выборочным коэффициентом асимметрии называется число A_s^*, определяемое формулой: $A_s^* = \dfrac{\mu_3^*}{\sigma_в^3}$.

Выборочный коэффициент асимметрии служит для характеристики асимметрии полигона вариационного ряда. Если полигон асимметричен, то одна из ветвей его, начиная с вершины, имеет более пологий «спуск», чем другая.

Если $A_s^* < 0$, то более пологий «спуск» полигона наблюдается слева; если $A_s^* > 0$ - справа. В первом случае асимметрию называют *левосторонней*, а во втором - *правосторонней*.

Выборочным коэффициентом эксцесса или *коэффициентом крутости* называется число E_k^*, определяемое формулой :

$$E_k^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_в^4} - 3.$$

Выборочный коэффициент эксцесса служит для сравнения на «крутость» выборочного распределения с нормальным распределением.

Коэффициент эксцесса для случайной величины, распределенной по нормальному закону, равен нулю.

Поэтому за стандартное значение выборочного коэффициента эксцесса принимают $E_k^* = 0$.

Если $E_k^* < 0$, то полигон имеет более пологую вершину по сравнению с нормальной кривой; если $E_k^* > 0$, то полигон более крутой по сравнению с нормальной кривой.

2.1.7. Вычисление числовых характеристик выборки

2.1.7.1. Упрощенный способ вычисления статистических характеристик вариационных рядов

При больших значениях вариантов и соответствующих им частот вычисление выборочного среднего, дисперсии и выборочных моментов по приведенным ниже формулам приводит к громоздким вычислениям.

В этом случае используют условные варианты u_i, определяемые по формулам: $u_i = \frac{x_i - c}{h}$, где числа c и h выбираются произвольно.

Чтобы упростить вычисления в качестве c выбирают вариант, который имеет наибольшую частоту или находится в середине ряда. Число c называется *«ложным нулем»*. В качестве h выбирают число равное длине интервала (в случае интервального ряда) или наибольший общий делитель разностей $(x_i - c)$.

Для вычисления числовых характеристик выборки составляем таблица 7.

Таблица 7 – Таблица для вычисления числовых характеристик

u_i	n_i	$u_i n_i$	${u_i}^2 n_i$	$u_i^3 n_i$	$u_i^4 n_i$	$(u_i+1)^4 n_i$
u_1	n_1					
$\vdots$	$\vdots$					
u_m	n_m					
	$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$	$\sum_{i=1}^{m} u_i n_i$	$\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i$	$\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i$	$\sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i$	$\sum_{i=1}^{m} (u_i+1)^4 n_i$

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{m} (u_i+1)^4 n_i = \sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i + 6\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i + 4\sum_{i=1}^{m} u_i n_i + n$$

С помощью сумм, полученных в нижней строке таблицы, находим условные моменты:

$$M_1^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i n_i, \qquad M_2^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i^2 n_i,$$

$$M_3^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i^3 n_i, \qquad M_4^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} u_i^4 n_i.$$

Числовые характеристики выборки вычисляем по формулам:

$$\overline{x_в} = M_1^* h + c \;; \quad D_в = \left(M_2^* - \left(M_1^*\right)^2 \right) \cdot h^2; \; \sigma_в = \sqrt{D_в};$$

$$A_s^* = \frac{\mu_3^*}{\sigma_в^3}; \quad E_k^* = \frac{\mu_4^*}{\sigma_в^4} - 3,$$

где – μ_3^* и μ_4^* находим по формулам:

$$\mu_3^* = \left(M_3^* - 3M_1^* M_2^* + 2\left(M_1^*\right)^3 \right) \cdot h^3,$$

$$\mu_4^* = \left(M_4^* - 4M_1^* M_3^* + 6\left(M_1^*\right)^2 \cdot M_2^* - 3\left(M_1^*\right)^4 \right) \cdot h^4.$$

Пример 5. Вычислить числовые характеристики выборки, рассмотренной в примере 4 (таблица 4), для которой построен интервальный ряд (таблица 5).

В качестве вариантов x_i возьмем середины интервалов. Перейдем к условным вариантам.

Вариант, значение которого 0,04**,** имеет наибольшую частоту и находится в середине ряда. Примем его за «ложный ноль» (начало отсчета).

Условные варианты найдем по формуле:

$$u_i = \frac{x_i - c}{h},$$

где $c = 0{,}04$**,** $h = 0{,}6$.

Составим расчетную таблицу 8 по форме таблицы 7.

Таблица 8 – Расчетная таблица.

x_i	n_i	u_i	$u_i \cdot n_i$	$u_i^2 \cdot n_i$	$u_i^3 \cdot n_i$	$u_i^4 \cdot n_i$	$(u_i + 1)^4 \cdot n_i$
-1,76	2	-3	-6	18	-54	162	**32**
-1,16	6	-2	-12	24	-48	96	**6**
-0,56	11	-1	-11	11	-11	11	**0**
0,04	**15**	0	0	0	0	0	**15**
0,64	11	1	11	11	11	11	**176**
1,24	3	2	6	12	24	48	**243**
1,84	2	3	6	18	54	162	**512**
$\sum$	**50**		**-6**	**94**	**-24**	**490**	**984**

Контроль:

$$\sum_{i=1}^{m}(u_i+1)^4 n_i=\sum_{i=1}^{m}u_i^4 n_i+4\sum_{i=1}^{m}u_i^3 n_i+6\sum_{i=1}^{m}u_i^2 n_i+4\sum_{i=1}^{m}u_i n_i+n=$$

$=490+4\cdot(-24)+6\cdot 94+4\cdot(-6)+50=984$. Расчеты проведены верно.

По данным таблицы 8 находим условные моменты:

$$M_1^*=-\frac{6}{50}=-0{,}12, \qquad M_2^*=\frac{94}{50}=1{,}88,$$

$$M_3^*=-\frac{24}{50}=-0{,}48, \qquad M_4^*=\frac{490}{50}=9{,}8.$$

Находим числовые характеристики выборки:

$$\overline{x_в}=M_1^* h+c=-0{,}12\cdot 0{,}6+0{,}04=-0{,}032$$

$$D_в=\left(M_2^*-\left(M_1^*\right)^2\right)\cdot h^2=\left(1{,}88-(-0{,}12)^2\right)\cdot 0{,}6^2=0{,}6716$$

$$\sigma_в=\sqrt{D_в}=\sqrt{0{,}672}=0{,}8195$$

Вычислим центральные моменты третьего и четвертого порядка:

$$\mu_3^*=\left(M_3^*-3M_1^*M_2^*+2\left(M_1^*\right)^3\right)\cdot h^3=$$

$$=\left(-0{,}48-3\cdot(-0{,}12)\cdot 1{,}88+2(-0{,}12)^3\right)\cdot 0{,}6^3=0{,}0418$$

$$\mu_4^*=\left(M_4^*-4M_1^*M_3^*+6\left(M_1^*\right)^2\cdot M_2^*-3\left(M_1^*\right)^4\right)\cdot h^4=$$

$$=\left(9{,}8-4\cdot(-0{,}12)\cdot(-0{,}48)+6(-0{,}12)^2\cdot 1{,}88-3(-0{,}12)^4\right)\cdot 0{,}6^4=1{,}2127$$

Вычислим выборочные коэффициенты асимметрии и эксцесса:

$$A_s^*=\frac{\mu_3^*}{\sigma_в^3}=\frac{0{,}0418}{0{,}8195^3}=0{,}0759$$

$$E_k^*=\frac{\mu_4^*}{\sigma_в^4}-3=\frac{1{,}2127}{0{,}8195^4}-3=-0{,}3112.$$

2.2. Статистические оценки

Статистической оценкой $\overline{\theta}$ параметра θ теоретического распределения называют его приближенное значение, зависящее от данных выбора.

Рассматривая выборочные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ как реализации случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, получивших конкретные значения в результате опытов, можно представить оценку $\overline{\theta}$ как функцию этих случайных величин: $\overline{\theta} = \varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Это означает, что оценка тоже является случайной величиной.

Если для оценки θ взять несколько (k) выборок, то получим столько же случайных оценок $\overline{\theta_1}, \overline{\theta_2}, \ldots, \overline{\theta_k}$.

Если число наблюдений невелико, то замена неизвестного параметра θ оценкой $\overline{\theta}$ приводит к ошибке, которая тем больше, чем меньше число опытов.

2.2.1. Точечные оценки

Статистические оценки могут быть *точечными* и *интервальными*.

Точечные оценки представляют собой число или точку на числовой оси. Чтобы оценка $\overline{\theta}$ была близка к значению параметра θ, она должна обладать свойствами состоятельности, несмещенности и эффективности.

Оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется *состоятельной,* если она сходится по вероятности к оцениваемому параметру, то есть для любого $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{\theta} - \theta\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Поясним смысл этого равенства.

Пусть ε - очень малое положительное число. Тогда данное равенство означает, что чем больше объем выборки n, тем ближе оценка $\overline{\theta}$ приближается к оцениваемому параметру θ.

Свойство состоятельности нужно проверять в первую очередь. Оно *обязательно* для любого правила оценивания. Несостоятельные оценки не используются.

Оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется *несмещенной,* если $M\left(\overline{\theta}\right)=\theta$, то есть математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру. Если $M\left(\overline{\theta}\right)\neq\theta$, то оценка θ называется *смещенной.*

Это свойство оценки желательно, но не обязательно. Часто полученная оценка бывает смещенной, но ее можно поправить так, чтобы она стала несмещенной.

Иногда, оценка бывает *асимптотически несмещенной*, то есть $M\left(\overline{\theta}\right)\to\theta$.

Требования несмещенности особенно важно при малом числе опытов.

Несмещенная оценка $\overline{\theta}$ параметра θ называется *эффективной,* если она среди всех несмещенных оценок, в определенном классе оценок данного параметра, обладает наименьшей дисперсией.

Можно показать, что:

- $\overline{x_в}$ является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой $M(X)$ в классе линейных оценок;

- $D_в$ является состоятельной, смещенной оценкой $D(X)$;

- $S^2=\frac{n}{n-1}D_в$ является состоятельной, несмещенной оценкой $D(X)$; (при больших n разница между S^2 и $D_в$ мала. S^2 используется при малых выборках, обычно при $n\leq 30$) ;

- относительная частота $\frac{n_A}{n}$ появления события A в n независимых испытаниях является состоятельной, несмещенной и эффективной оценкой, в классе линейных оценок, неизвестной вероятности $p=P(A)$ (p - вероятность появления события A в каждом испытании);

- эмпирическая функция распределения выборки $F^*(x)$ является состоятельной, несмещенной оценкой функции распределения $F(x)$ случайной величины X.

Для нахождения оценок неизвестных параметров используют различные методы. Наиболее распространенными являются: метод моментов, метод максимального правдоподобия (ММП), метод наименьших квадратов (МНК).

2.2.2. Интервальные оценки

При выборке малого объема точечная оценка может существенно отличаться от оцениваемого параметра. В этом случае целесообразно использовать интервальные оценки.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала.

Пусть найденная по данным выборки величина $\overline{\theta}$ служит оценкой неизвестного параметра θ. Оценка $\overline{\theta}$ определяет θ тем точнее, чем меньше $|\theta-\overline{\theta}|$, то есть чем меньше δ в неравенстве $|\theta-\overline{\theta}|<\delta$ $(\delta>0)$.

Поскольку $\overline{\theta}$ - случайная величина, то и разность $|\theta-\overline{\theta}|$ - случайная величина. Поэтому неравенство $|\theta-\overline{\theta}|<\delta$, при заданном δ может выполняться только с некоторой вероятностью.

Доверительной вероятностью (надежностью) оценки $\overline{\theta}$ параметра θ называется вероятность γ, с которой выполняется неравенство $|\theta-\overline{\theta}|<\delta$.

Обычно задается надежность γ и определяется δ. Чаще всего надежность задается значениями от 0,95 и выше, в зависимости от конкретно решаемой задачи.

Неравенство $|\theta-\overline{\theta}|<\delta$ можно записать $\overline{\theta}-\delta<\theta<\overline{\theta}+\delta$.

Доверительным интервалом называется интервал $(\overline{\theta}-\delta;\overline{\theta}+\delta)$, который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

2.2.2.1. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормального распределения при известной дисперсии

Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение: $N(a;\sigma)$.

Известно значение σ и задана доверительная вероятность (надежность) γ. Требуется построить доверительный интервал для параметра a по выборочному среднему $\overline{x_в}$.

Чтобы подчеркнуть случайный характер $\overline{x_в}$ обозначим его $\overline{X_в}$.

Примем без доказательства, что если случайная величина X распределена нормально, то и выборочное среднее $\overline{X_в}$, найденное по независимым наблюдениям, также распределено нормально.

Параметры распределения $\overline{X_в}$ таковы: $M\left(\overline{X_в}\right)=a$; $\sigma\left(\overline{X_в}\right)=\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Из теории вероятности известна формула для нормально распределенной случайной величины X:

$$P\left(|X-a|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ - функция Лапласа, значение которой в точке $\dfrac{\delta}{\sigma}$ находим по таблице (Приложение 1).

Учитывая, что $\overline{X_в}$ имеет нормальное распределение можно записать

$$P\left(\left|\overline{X_в}-a\right|<\delta\right)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma\left(\overline{X}_в\right)}\right)=\gamma \quad \text{или} \quad \gamma=2\Phi\left(\frac{\delta\cdot\sqrt{n}}{\sigma}\right)=2\Phi(t),$$

где $\dfrac{\delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = t$.

Из последнего равенства по таблице Лапласа находим t (Приложение 1).

Тогда $\delta = t \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ и доверительный интервал

$$\left(\overline{X_в} - t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \overline{X_в} + t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

покрывает с надежностью γ математическое ожидание a.

Пример 6. Случайная величина имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma = 3$. Найти доверительный интервал оценки неизвестного математического ожидания по выборочной средней $\overline{x_в}$, если объем выборки $n = 36$, а надежность оценки $\gamma = 0{,}95$.

1. Находим t: $2\Phi(t) = 0{,}95$ $\Phi(t) = 0{,}475$

По таблице значений функции Лапласа $t = 1{,}96$.

2. Определяем $\delta = t \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \dfrac{3}{\sqrt{36}} = 0{,}98$.

Доверительный интервал запишется в виде: $\left(\overline{x_в} - 0{,}98; \overline{x_в} + 0{,}98\right)$.

2.2.2.2. Доверительный интервал для оценки математического ожидания при неизвестной дисперсии

Пусть случайная величина X имеет нормальное распределение: $N(a; \sigma)$, причем σ - неизвестно, γ - задана.

Если $D(X)$ неизвестна, то пользуются оценкой S^2.

Введем случайную величину $T = \dfrac{\overline{X_в} - a}{\dfrac{S}{\sqrt{n}}}$,

где S - исправленное среднее квадратическое отклонение случайной величины X, вычисленное по выборке:

$$S=\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\overline{X_в}\right)^2}\ ;$$

Случайная величина T имеет распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенью свободы.

Тогда доверительный интервал для оценки $a=M(X)$ имеет вид:

$$\left(\overline{X_в}-t_j\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\,;\,\overline{X_в}+t_j\cdot\frac{S}{\sqrt{n}}\right),$$

где $\overline{X_в}$ - выборочное среднее;

S - исправленное среднее квадратическое отклонение;

t_j - находим по таблице квантилей распределения Стьюдента (Приложение 2) в зависимости от числа степеней свободы и доверительной вероятности γ.

Пример 7. Произведено пять независимых наблюдений над случайной величиной $X\sim N(a;\sigma)$. Результаты наблюдений таковы:

$x_1=35,\ x_2=20,\ x_3=15,\ x_4=-12,\ x_5=42.$

Построить для неизвестного $M(x)=a$ доверительный интервал, если $\gamma=0{,}95$.

1. Находим $\overline{x_в}$: $\overline{x_в}=\frac{1}{5}(-35+20+15-12+42)=\frac{1}{5}\cdot 30=6$

$\underline{\overline{x_в}=6}$

2. Находим S^2:

$$S^2=\frac{1}{4}\left((-35-6)^2+(20-6)^2+(15-6)^2+(-12-6)^2+(42-6)^2\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left((-41)^2+16^2+9^2+(-18)^2+36^2\right)=\frac{1}{4}(1681+256+81+324+1296)=$$

$$=\frac{1}{4}3638=909{,}5$$

$$S=\sqrt{909{,}5}\approx 30{,}2$$

3. По таблице квантилей распределения Стьюдента (Приложение 2) для $\gamma=0{,}95$ и $n-1=4$ находим t_j:

$t_j = 2{,}78$

Доверительный интервал:

$$\left(6 - 2{,}78\frac{30{,}2}{2{,}24}; 6 + 2{,}78\frac{30{,}2}{2{,}24}\right) \quad \text{или} \quad (31{,}5; 43{,}5).$$

2.2.2.3. Доверительный интервал для оценки среднего квадратического отклонения нормального распределения

1. Если $M(X) = a$ неизвестно, то доверительный интервал для оценки $\sigma(X)$ имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_2}; \frac{\sqrt{n-1}\cdot S}{\chi_1}\right)$$

где n - объем выборки;

S - исправленное среднее квадратическое отклонение:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X_в}\right)^2,$$

$\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2};n-1}$, $\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-\gamma}{2};n-1}$ - квантили χ^2 - распределения, определяемые по таблице $\chi^2_{\alpha,k}$ (Приложение 3) при $k = n-1$ и $\alpha = \frac{1+\gamma}{2}$, $\alpha = \frac{1-\gamma}{2}$.

Пример 8. Для оценки параметра $\sigma(X)$ нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 25 единиц и вычислено $S = 0{,}8$. Найти доверительный интервал, покрывающий σ с вероятностью $\gamma = 0{,}95$.

Имеем $n = 25$, $\gamma = 0{,}95$.

$$\chi_1^2 = \chi^2_{\frac{1+0{,}95}{2};25-1} = \chi^2(0{,}975; 24) = 12{,}4$$

$$\chi_2^2 = \chi^2_{\frac{1-0{,}95}{2};-1} = \chi^2(0{,}025; 24) = 39{,}4$$

Доверительный интервал имеет вид:

$$\left(\frac{\sqrt{24}\cdot 0{,}8}{\sqrt{39{,}4}};\frac{\sqrt{24}\cdot 0{,}8}{\sqrt{12{,}4}}\right) \quad \text{или} \quad (0{,}79;1{,}4).$$

Другой вид доверительного интервала для оценки $\sigma(X)$ нормального распределения имеет вид:

$$S(1-q)<\sigma<S(1+q) \text{ при } q<1;$$

$$0<\sigma<S(1+q) \text{ при } q>1;$$

где S - исправленное среднее квадратическое отклонение;

$q=q(\gamma;n)$ находим по таблице значений (Приложение 4).

Пример 9. Для оценки параметра нормально распределенной случайной величины была сделана выборка объема в 25 единиц и вычислено $S=0{,}8$.

Найти доверительный интервал, покрывающий σ с вероятностью $\gamma=0{,}95$.

Имеем $n=25$, $\gamma=0{,}95$, $S=0{,}8$

По таблице значений $q=q(\gamma;n)$ находим $q=0{,}32$.

Доверительный интервал имеет вид:

$$(0{,}8(1-0{,}32);0{,}8(1+0{,}32)) \text{ или } (0{,}544;1{,}056).$$

Замечание. Доверительные интервалы в примерах 8 и 9 получили разные при одинаковых данных, но они с вероятностью $\gamma=0{,}95$ покрывают среднее квадратическое отклонение $\sigma(X)$.

2.3 Проверка статистических гипотез

Статистической гипотезой называется всякое высказывание о генеральной совокупности (случайной величине), проверяемое по выборке (то есть по результатам наблюдений).

Примеры статистических гипотез:

- математическое ожидание случайной величины равно конкретному числовому значению;
- генеральная совокупность распределена по нормальному закону.

Гипотезы могут быть *параметрические* (гипотезы о параметрах распределения известного вида) и *непараметрические* (гипотезы о виде неизвестного распределения).

Различают гипотезы *простые*, содержащие только одно предположение, и *сложные*, содержащие более одного предположения.

Например, гипотеза $H_0 : \sigma = 7$ - простая; а гипотеза H_0 : $\lambda = b_i$, (где $b_i \in R$) – сложная гипотеза, потому что она состоит из бесконечного множества простых гипотез.

Процедура сопоставления гипотезы с выборочными данными называется *проверкой гипотезы*. Для проверки гипотез используют *аналитические* и *статистические* методы.

2.3.1. Классический метод проверки гипотез

В соответствии с поставленной задачей и на основании выборочных данных формулируется (выдвигается) гипотеза H_0, которая называется основной или *нулевой*. Одновременно с выдвинутой гипотезой H_0, рассматривается противоположная ей гипотеза H_1, которая называется конкурирующей или *альтернативной*.

Для проверки нулевой гипотезы вводят специально подобранную случайную величину K, распределение которой известно и называют ее *критерием.*

Поскольку гипотеза H_0 для генеральной совокупности принимается по выборочным данным, то она может быть ошибочной. При этом возможны ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что отвергается гипотеза H_0, когда она на самом деле верна.

Ошибка второго рода состоит в том, что отвергается альтернативная гипотеза H_1, когда она на самом деле верна.

1) Для определения вероятности ошибки первого рода вводится параметр α:

$$\alpha = P_{H_0}(H_1)$$

- вероятность того, что будет принята гипотеза H_1, при условии, что H_0 верна.

Величину α называют *уровнем значимости*. Обычно α выбирают в пределах $0{,}001 - 0{,}1$.

2) Вероятность ошибки второго рода определяется параметром β:

$\beta = P_{H_1}(H_0)$ - вероятность того, что будет принята гипотеза H_0, при условии, что H_1 верна.

Величину $(1-\beta)$, то есть недопустимость ошибки второго рода (отвергнуть неверную и принять верную гипотезу H_1) называют *мощностью критерия*.

2.3.2. Сущность метода

Множество всех значений критерия разбивают на два непересекающихся подмножества: одно из них содержит значения критерия, при которых нулевая гипотеза H_0 отвергается; другое – при которых она принимается.

Критической областью называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называется совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Обозначим критическую область ω.

Если вычисленное по выборке значение критерия K попадает в критическую область ω, то гипотеза H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. В этом случае можно совершить ошибку первого рода, вероятность которой равна α. Иначе, вероятность того, что критерий K примет значение из критической области ω, должна быть равна заданному значению α, то есть $P(K \in \omega) = \alpha$.

Критическая область ω определяется неоднозначно. Возможны три случая расположения ω. Они определяются видом нулевой и альтернативной гипотез и законом распределения критерия K.

Правосторонняя критическая область (рисунок 4 а) состоит из интервала $\left(k_{пр.\alpha}^{кр}; +\infty\right)$, где $k_{пр.\alpha}^{кр}$ определяется из условия $P\left(K > k_{пр.\alpha}^{кр}\right) = \alpha$ и называется правосторонней точкой, отвечающей уровню значимости α.

Левосторонняя критическая область (рисунок 4 б) состоит из интервала $\left(-\infty; k_{л.\alpha}^{кр}\right)$, где $k_{л.\alpha}^{кр}$ определяется из условия $P\left(K < k_{л.\alpha}^{кр}\right) = \alpha$ и называется левосторонней точкой, отвечающей уровню значимости α.

Двусторонняя критическая область (рис.4 в) состоит из следующих двух интервалов: $\left(-\infty; k_{л.\alpha/2}^{кр}\right)$ и $\left(k_{пр.\alpha/2}^{кр}; +\infty\right)$, где точки $k_{л.\alpha/2}^{кр}$ и $k_{пр.\alpha/2}^{кр}$ определяются из условий $P\left(K < k_{л.\alpha/2}^{кр}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ и $P\left(K > k_{пр.\alpha/2}^{кр}\right) = \dfrac{\alpha}{2}$ и называются двусторонними критическими точками.

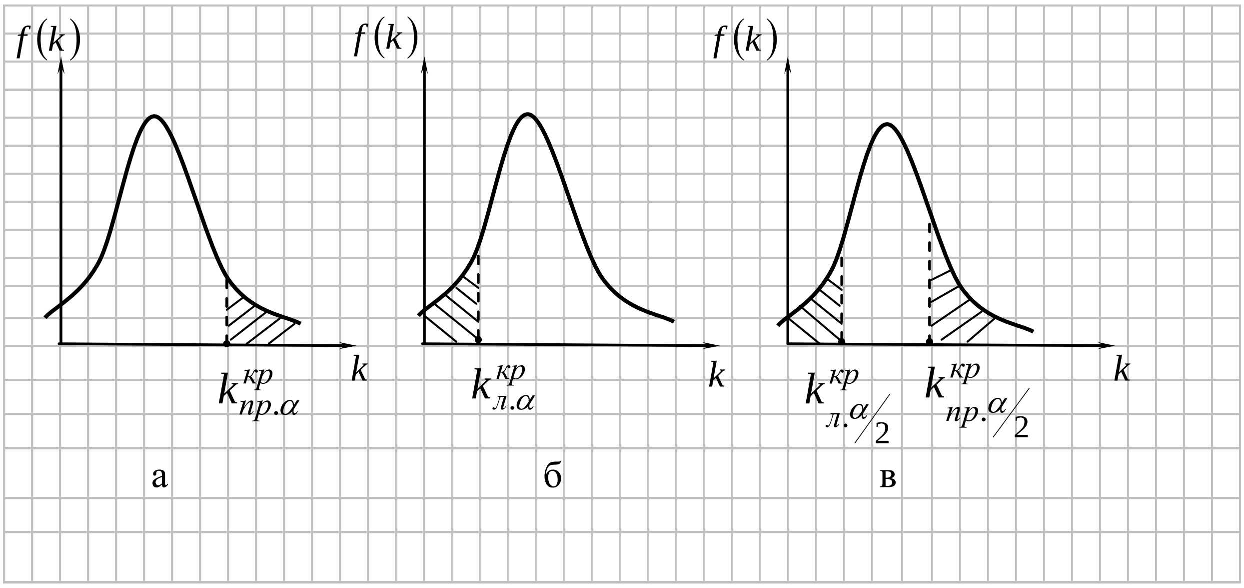


Рисунок 4 – Критическая область

2.3.3. Алгоритм проверки нулевой гипотезы

Располагая выборкой, формулируют нулевую гипотезу H_0 и альтернативную гипотезу H_1.

Выбирают критерий проверки гипотезы H_0, зависящий от выборочных данных и условий рассматриваемой задачи. Наиболее часто используют случайные величины, имеющие следующие законы распределения: нормальный, Стъюдента, Фишера-Снедекора, хи-квадрат.

Задают уровень значимости выбранного критерия и определяют соответствующую ему критическую область. Для определения критической области достаточно найти критическую точку $t_{кр}$ - ее границу. Для каждого критерия имеются таблицы, по которым находят критическую точку.

Вычисляют значение критерия по результатам произведенных измерений и сравнивают с критической точкой.

Нулевую гипотезу *отвергают*, если вычисленное значение критерия попадает в критическую область, или считают *справедливой*, если оно окажется внутри области допустимых значений.

2.3.4. Проверка гипотез о законе распределения

Во многих случаях закон распределения изучаемой случайной величины X неизвестен, но есть основания предположить, что он имеет вполне определенный вид: нормальный, экспоненциальный или какой-либо другой.

Пусть выдвинута гипотеза H_0 о каком-либо законе распределения.

Для проверки этой гипотезы H_0 требуется по выборке сделать заключение, согласуются ли результаты наблюдений с высказанным предположением.

Статистический критерий проверки гипотезы о предполагаемом законе неизвестного распределения называется *критерием согласия.*

Он используется для проверки согласия предполагаемого вида распределения с опытными данными на основании выборки.

Существуют различные критерии согласия: Пирсона, Колмогорова, Фишера и другие. Наиболее часто применяется критерий Пирсона.

2.3.5. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона

Пусть выборка из генеральной совокупности X задана в виде статистического интервального ряда ряда:

$[x_1, x_2)$	$[x_2, x_3)$	…	$[x_m, x_{m+1})$
n_1	n_2	…	n_m

где n_i - интервальные частоты, $\sum_{i=1}^{m} n_i = n$ - объем выборки,

m - число интервалов, h - длина интервала, x_i - середина интервала.

Требуется проверить гипотезу H_0 о том, что генеральная совокупность X распределена по нормальному закону, применяя критерий Пирсона.

Правило проверки

1. Вычисляем $\overline{x_в}$ и $\sigma_в$ (см. Пример 5).
2. Находим теоретические частоты n_i'.

   Их можно вычислить двумя способами.

Первый способ

$$n_i' = \frac{n \cdot h}{\sigma_в} \cdot \varphi(t_i),$$

где n - объем выборки, h - шаг, $t_i = \dfrac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}$;

$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - функция Гаусса, значение которой в точке

t_i

находим по таблице (Приложение 5).

$P_i = \dfrac{\varphi(t_i)}{\sigma_в} \cdot h$ - вероятность попадания значений случайной

величины X в i - й интервал.

Для вычисления n_i' составляем таблицу 9.

Второй способ.

$$n_i' = P_i \cdot n$$

где n - объем выборки, $z_i = \dfrac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}$,

$P_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i)$ - вероятность попадания X в i - й интервал,

$\Phi(z)$ - значение функции Лапласа (Приложение 1).

Полагают $z_1 = (-\infty)$, $z_{m+1} = +\infty$.

Таблица 9 – Таблица для вычисления n_i'

i	x_i	n_i	$x_i - \overline{x_в}$	t_i	$\varphi(t_i)$	P_i	$n_i' = P_i \cdot n$
1	x_1	n_1	$x_1 - \overline{x_в}$	t_1	$\varphi(t_1)$	P_1	$n_1' = P_1 \cdot n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	x_m	n_m	$x_m - \overline{x_в}$	t_m	$\varphi(t_m)$	P_m	$n_m' = P_m \cdot n$
$\sum$		n				1	n

Для вычисления n_i' составляем таблица 10.

Таблица 10 – Таблица для вычисления n_i'

i	Границы интервала		n_i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n_i'
	x_i	x_{i+1}		z_i	z_{i+1}				
1	x_1	x_2	n_1	$-\infty$	z_2	-0,5	$\Phi(z_2)$	P_1	n_1'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	x_m	x_{m+1}	n_m	z_m	$+\infty$	$\Phi(z_m)$	0,5	P_m	n_m'
$\sum$			n					1	n

3. Сравниваем эмпирические (n_i) и теоретические (n_i') частоты с помощью критерия Пирсона.

Для этого:

1) составляем расчетную таблицу 11 , по которой находим $\chi^2_{набл}$ - наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$

Таблица 11 – Расчётная таблица

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\frac{n_i^2}{n_i'}$
1	n_1	n_1'	$n_1 - n_1'$	$(n_1 - n_1')^2$	$\frac{(n_1 - n_1')^2}{n_1'}$	n_1^2	$\frac{n_1^2}{n_1'}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	n_m	n_m'	$n_m - n_m'$	$(n_m - n_m')^2$	$\frac{(n_m - n_m')^2}{n_m'}$	n_m^2	$\frac{n_m^2}{n_m'}$
$\sum$	n				$\chi^2_{набл}$		

Контроль: $\chi^2_{набл} = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i^2}{n_i'} - n$.

2) Находим число степеней свободы k: $k = m - r - 1$ где m - число интервалов; r - число параметров предполагаемого распределения,

Для нормального распределения $k = m - 3$, так как $r = 2$ (нормальный закон распределения характеризуется двумя параметрами a и σ).

4. В таблице критических точек (*квантилей*) распределения χ^2 (Приложение 3) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы находим $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ правосторонней критической области. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ - нет оснований отвергнуть гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности.

Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ - гипотезу отвергаем.

<u>Замечание.</u> 1) Объем выборки должен быть достаточно велик $(n \geq 50)$. 2) Малочисленные частоты $(n_i < 5)$ следует объединить. В этом случае и соответствующие им теоретические частоты также надо сложить. Если производилось объединение частот, то при определении числа степеней свободы по формуле

$k = m - 3$ следует в качестве m принять число интервалов, оставшихся после объединения частот.

Пример 10. Пусть из генеральной совокупности X задана выборка объемом 50 (табл.4). Требуется проверить гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности по данной выборке.

1. Из рассмотренных выше примеров известно: - интервальный ряд таблица 12

Таблица 12 – Интервальный ряд

Интервалы	$[-2{,}06; -1{,}46)$	$[-1{,}46; -0{,}86)$	$[-0{,}86; -0{,}26)$	$[-0{,}26; 0{,}34)$
Частоты n_i	2	6	11	15

Интервалы	$[0{,}34; 0{,}94)$	$[0{,}94; 1{,}54)$	$[1{,}54; 2{,}14)$
Частоты n_i	11	3	2

$\sum_{i=1}^{7} n_i = 50$.

- числовые характеристики выборки $\overline{x_в} = -0{,}032$, $\sigma_в = 0{,}8195$, $A_S^* = 0{,}0759$, $E_k^* = 0{,}3112$ (см. Пример 5).

2. *Проверим гипотезу H_0 с помощью средних квадратических отклонений коэффициентов A_S^* и E_k^*.*

Критерием распределения выборки по нормальному закону является равенство нулю коэффициентов A_S^* и E_k^*.

Если они отличны от нуля, то для предварительного выбора закона распределения вычисляют средние квадратические отклонения для A_S^* и E_k^*:

$$\sigma_{A_S}^* = \sqrt{\frac{6(n-1)}{(n+1)\cdot(n+3)}} \qquad \sigma_{E_k}^* = \sqrt{\frac{24n\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{(n-1)^2\cdot(n+3)\cdot(n+5)}}$$

Если A_S^* и E_k^* отличаются по модулю от нуля не более чем на удвоенные средние квадратические отклонения, то есть

$\left|A_S^*\right| \le 2\sigma_{A_S^*}$ и $\left|E_k^*\right| \le 2\sigma_{E_k^*}$, то можно предположить, что данная выборка распределена по нормальному закону.

Рассчитаем $\sigma_{A_S}^* = \sqrt{\dfrac{6(50-1)}{(50+1)\cdot(50+3)}} = \sqrt{\dfrac{294}{2703}} = \sqrt{0{,}1087} = 0{,}3297$

$$\sigma_{E_k}^* = \sqrt{\frac{1200\cdot 48\cdot 47}{2401\cdot 53\cdot 55}} = \sqrt{\frac{2707200}{6998915}} = \sqrt{0{,}3868} = 0{,}6219.$$

Для A_S^* условие критерия выполняется: $|0{,}0759| < 2\cdot 0{,}3297$.

Для E_k^* условие критерия выполняется: $|-0{,}3112| < 2\cdot 0{,}6219$.

Гипотезу H_0 принимаем, то есть можно предположить, что генеральная совокупность X распределена по нормальному закону.

3. *Проверим гипотезу H_0 по критерию Пирсона.*

1) $\overline{x_в} = -0{,}032$, $\sigma_в = 0{,}8195$.

2) Найдем теоретические частоты n_i' вторым способом.

Интервальный ряд (таблица 12) содержит интервалы с частотами меньшими 5. Следовательно, два первых и два последних интервала объединяем, при этом соответствующие частоты суммируем.

Составим расчетную таблица 13 по форме таблицы 10.

Таблица 13 – Расчетная таблица

i	Границы интервала		n_i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	P_i	n_i'
	x_i	x_{i+1}		z_i	z_{i+1}				
1	-2,06	-0,86	8	$-\infty$	-1,01	-0,5	-0,3438	0,1562	7,81
2	-0,86	-0,26	11	-1,01	-0,28	-0,3438	-0,1103	0,2335	11,675
3	-0,26	0,34	15	-0,28	0,45	-0,1103	0,1736	0,2839	14,195
4	0,34	0,94	11	0,45	1,19	0,1736	0,3830	0,2094	10,47
5	0,94	2,14	5	1,19	$+\infty$	0,3830	0,5	0,1170	5,85
$\sum$								**1**	**50**

3) Сравним эмпирические (n_i) и теоретические (n_i') частоты. Для этого составляем расчетную таблицы 14 по форме таблицы 11.

Таблица 14 – Расчетная таблица

i	n_i	n_i'	$n_i - n_i'$	$(n_i - n_i')^2$	$\dfrac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$	n_i^2	$\dfrac{n_i^2}{n_i'}$
1	8	7,810	0,190	0,0361	0,0046	64	8,1946
2	11	11,675	-0,675	0,4556	0,0390	121	10,3640
3	15	14,195	0,805	0,6480	0,0457	225	15,8507
4	11	10,470	0,530	0,2809	0,0268	121	11,5568
5	5	5,850	-0,850	0,7225	0,1235	25	4,2735
$\sum$					**0,2396**		**50,2396**

Контроль: $\sum_{i=1}^{5} \dfrac{n_i^2}{n_i'} - n = 50{,}2396 - 50 = 0{,}2396 \quad \chi^2_{набл} = 0{,}2396$.

Расчеты проведены верно.

4) Зададим $\alpha = 0{,}05$.

Вычислим число степеней свободы $k = 5 - 3 = 2$ и найдем $\chi^2_{кр}(0{,}05; 2) = 6{,}0$ (Приложение 3). Получим $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$.

Следовательно, нет оснований отвергать гипотезу H_0 о нормальном распределении генеральной совокупности X.

Другими словами различие между эмпирическими (n_i) и теоретическими (n_i') частотами незначительное (случайное), которое можно объяснить малым объемом выборки.

Построим нормальную кривую. Для этого составим таблицы 15.

Таблица 15 – Расчётные донные

Середины интервалов	-1,76	-1,16	-0,56	0,04	0,64	1,24	1,84
$\dfrac{p_i}{h}$	0,05	0,19	0,39	0,52	0,34	0,14	0,03

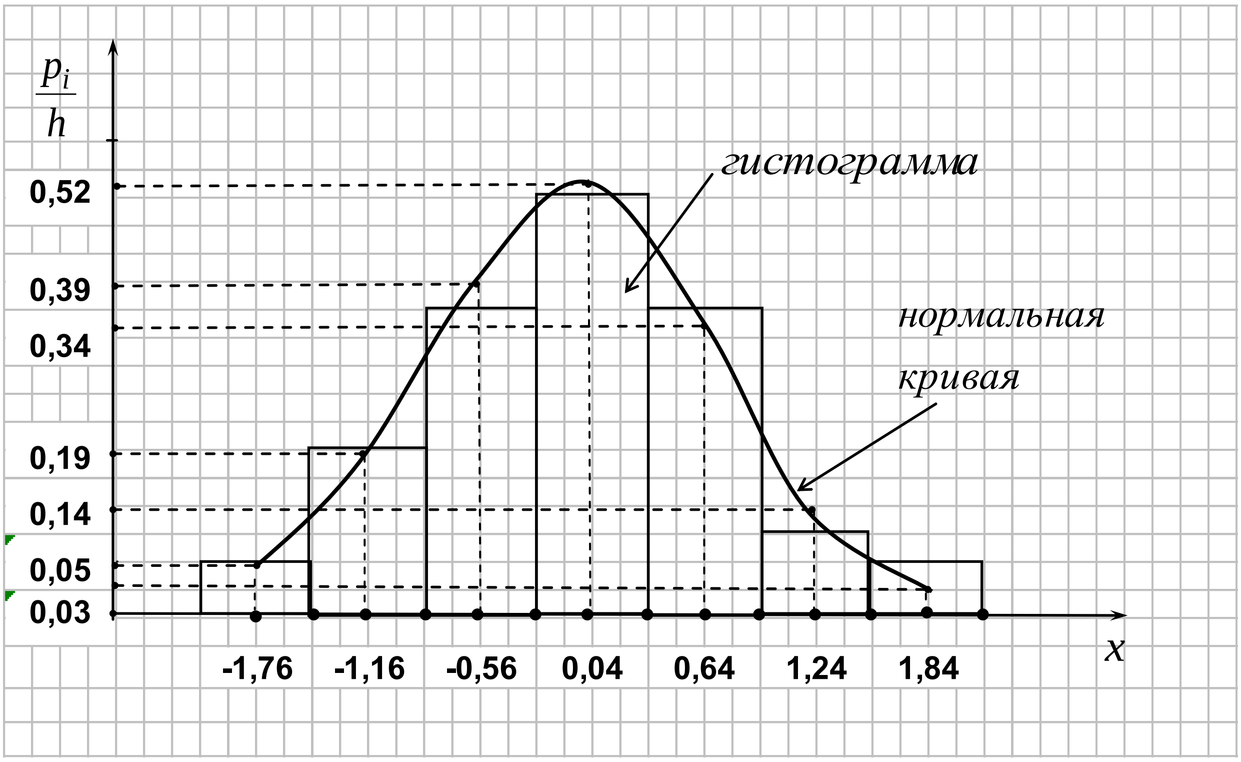


Рисунок 5 – Нормальная кривая

Так как гипотеза о нормальном распределении не отвергается, то нормальная кривая хорошо сглаживает гистограмму.

2.4 Основы теории планирования эксперимента

2.4.1. Основы планирования многофакторного эксперимента

При пассивном многофакторном эксперименте результатом является матрица экспериментальных данных, состоящая из набора n столбцов. Каждый из столбцов соответствует набору экспериментальных значений отдельного фактора. Если каждый фактор с номером k может приобретать m значений $x_{1k}, x_{2k} .... x_{mk}$, то матрица экспериментальных данных будет иметь размерность $n \times m$. Иногда факторы называют *признаками*.

Возникает задача установления статистических связей между рядами (столбцами) данных. Задачи такого типа возникают при измерении параметров природных объектов (метеорология, гидрология и т.д.), где результаты эксперимента зависят от большого числа параметров, которые в значительной степени имеют случайный характер. Кроме того, определение статистических связей широко используется в гуманитарных задачах (экономике, социологии, психологии и т.д.).

Методы факторного анализа позволяют с некоторым приближением решить одну из наиболее распространенных задач научного исследования - задачу построения той или иной схемы классификации, т.е. компактного описания явления на основе обработки больших информационных массивов.

Исследование системы признаков, проведенное на основе факторного анализа в ряде случаев позволяет вскрыть логическую структуру сложного явления, отделить взаимозависимые от независимых признаков, проверить или выдвинуть гипотезу о взаимосвязях в сложной системе признаков.

В общем случае объект исследования можно представить в виде структурной схемы, показанной на рисунок 6.

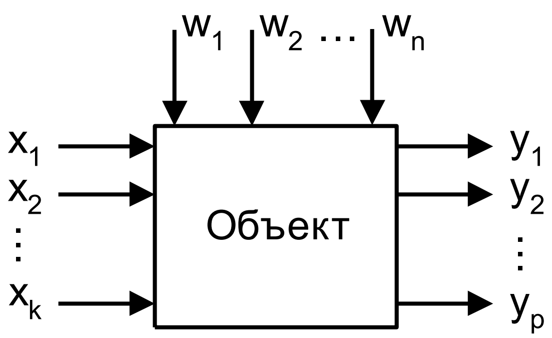


Рисунок 5 – Структурная схема

Представление объекта в виде такой схемы основано на принципе «черного ящика». Имеем следующие группы параметров:

1) управляющие (входные) x_i, которые называются *факторами*;

2) выходные параметры y_i, которые называются *параметрами состояния*;

3) w_i - *возмущающие воздействия*.

Предполагается, что возмущающие воздействия не поддаются контролю и либо являются случайными, либо меняются во времени.

Каждый фактор x_i имеет область определения, которая должна быть установлена до проведения эксперимента.

Комбинацию факторов можно представить как точку в многомерном пространстве, характеризующую состояние системы.

На практике целью многофакторного эксперимента является установление зависимости

$$y = f(x_1, x_2, \ldots x_k),$$

описывающей поведение объекта. Чаще всего функция строится в виде полинома

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

или

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{12} x_1 x_2 .$$

Целью эксперимента может быть, например, построение зависимости при минимальном количестве измерений значений управляющих параметров x_i.

На первом этапе планирования эксперимента необходимо выбрать область определения факторов x_i. Выбор этой области производится исходя из априорной информации. Значения x_i называются *уровнями управляющего параметра*.

Если выбрана линейная модель, то для построения аппроксимирующей функции достаточно выбрать *основной уровень* и *интервал варьирования* управляющего параметра x_i.

Для линейной модели интервал варьирования можно определить как

$$I = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{2},$$

а основной (нулевой) уровень - как среднее значение

$$x_0 = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}.$$

Для упрощения планирования эксперимента принято вместо реальных (натуральных) уровней x_i использовать *кодированные* значения факторов. Для факторов с непрерывной областью определения это можно сделать при помощи следующего преобразования

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - x_{j0}}{I_j},$$

где $\tilde{x}_j$ - натуральное значение фактора; I_j - интервал варьирования; x_{j0} - основной уровень; x_j - кодированное значение. В результате x_j принимает значения на границах $x_j = \pm 1$, на основном уровне $x_j = 0$. Основная проблема состоит в выборе области варьирования, поскольку эта задача является неформализованной.

Рассмотрим *полный* факторный эксперимент на примере линейной модели. Если число факторов k, то для проведения полного факторного эксперимента нужно $N = 2^k$ опытов, где 2 - число уровней, которого достаточно для построения линейной модели.

Условие проведения этого эксперимента можно зафиксировать в матрице планирования (таблица 16).

Таблица 16 – Матрице планирования

Номер	x_1	x_2	y
1	-1	-1	y_1
2	+1	-1	y_2
3	-1	+1	y_3
4	+1	+1	y_4

Таким образом, для двух факторов построение матрицы планирования элементарно. Для большего числа факторов необходимо разработать правила построения таких матриц. Например, при появлении фактора x_3 в таблицы 16 произойдут следующие изменения (таблица 17): при появлении нового столбца каждая комбинация уровней исходной таблицы проявится дважды.

Таблица 17 – Матрице планирования

Номер	x_1	x_2	x_3	y
1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	-1	+1	y_2
3	-1	+1	+1	y_3
4	+1	+1	+1	y_4
5	-1	-1	-1	y_5
6	+1	-1	-1	y_6
7	-1	+1	-1	y_7
8	+1	+1	-1	y_8

Это не единственный способ расширения матрицы планирования. Используют также перемножение столбцов, правило чередования знаков.

Очень важны общие свойства матрицы планирования:

1) симметричность матрицы относительно центра эксперимента: $x_i = 0$. Тогда $\sum_{i=1}^{N} x_{ji} = 0$.

2) условие нормировки $\sum_{i=1}^{N} x_{ij}^2 = N$, то есть сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов.

Первые два свойства относятся к построению отдельных столбцов матрицы

3) совокупность столбцов имеет следующее свойство $\sum_{i=1}^{N} x_{ij} x_{in} = 0$, где $j \neq n$.

4) *Ротатабельность*. Это означает, что точки (значения факторов) в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания выходного параметра должна быть одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента (нулевого уровня) и не зависеть от направления.

Планирование эксперимента первого порядка для двух переменных. План эксперимента первого порядка для двух переменных показан на рисунке 7. То есть искомая функция $y = f(x_1, x_2)$ описывается модельно в виде плоскости

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$

или гиперболоида

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2.$$

Расположение этой модели в пространстве показано на рисунке 7 поверхностью, проходящей через точки 1 – 2 – 3 – 4.

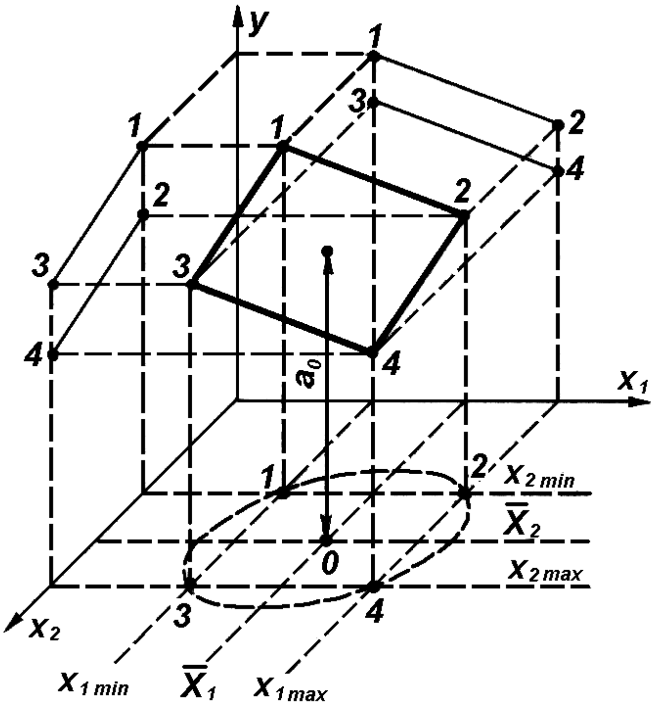


Рисунок 7 – Расположение модели в пространстве

Необходимые уровни для полного факторного эксперимента расположены в плоскости (x_1, x_2). Для модели в виде гиперболоида этот план является предельно экономным. Для построения гиперболоида необходимо определить четыре коэффициента в модели. Это можно сделать, решая систему из четырех уравнений. Следовательно, необходимы все четыре опыта. В теории планирования эксперимента используется термин *насыщенности*.

Если рассматривать модель в виде плоскости, то план эксперимента является ненасыщенным (*избыточным*), так как необходимо определить только три коэффициента a_0, a_1 и a_2. В случае модели (насыщенный эксперимент) решение системы единственно, и поверхность гиперболоида пройдет через все четыре экспериментальных значения y_i. Следствием этого является то, что насыщенный эксперимент не позволяет усреднить случайные погрешности и не дает сведения об их размере.

Для ненасыщенного плана избыточное число опытов позволяет произвести усреднение и оценить размеры погрешности. Проведя плоскость через точки 1, 2 и 3, можно оценить погрешность, определив, на каком расстоянии от плоскости находится точка 4. Оценка Погрешность в других точках может быть оценена проведением плоскостей 1 – 3 – 4, 1 – 2 – 4 и 2 – 3 – 4. С другой стороны коэффициент a_1 наклона поверхности к оси x_1 может быть найден как из наклона прямой 1 – 2, так и из наклона прямой 3 – 4. Аналогично коэффициент a_2 при x_2 можно определить из наклона прямых 1 – 3 и 2 – 4.

Поскольку полученные таким образом значения a_1 и a_2 могут отличаться, ненасыщенный эксперимент позволяет провести их усреднение и оценить погрешность.

Если уравнение плоскости представить в виде

$$y = a_0 + a_1(x_1 - \bar{x}_1) + a_2(x_2 - \bar{x}_2),$$

где $\bar{x}_1 = \dfrac{x_{1\min} + x_{1\max}}{2}$; $\bar{x}_2 = \dfrac{x_{2\min} + x_{2\max}}{2}$, то мы переносим начало координат в точку с координатами $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$. Тогда коэффициент a_0 находится усреднением всех четырех значений y_i как высота центра плоскости 1 – 2 – 3 – 4.

Процесс переноса начало координат в центр пространства факторов с координатами $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k)$ очень важен при обработке данных любых экспериментов, описываемых моделью в виде гиперплоскости, так как позволяет получить более устойчивое усредненное значение для a_0.

Важнейшим фактором является то, что в результате такого усреднения построенная плоскость удовлетворяет всем четырем значениям y_i лишь в среднем. В любой точке может быть найдена погрешность отклонения экспериментальных данных относительно модели, и по этим четырем отклонениям можно вычислить СКО.

Таким образом, один из четырех опытов является избыточным и может быть исключен. Но тогда план эксперимента становится неротатабельным, то есть неравноточным по всем направлениям. Если исключена точка 4 на рисунке 7, то в направлении 3 – 2 в плоскости факторов будет обеспечена большая точность, чем в направлении 1 - 0. В этом случае для восстановления ротатабельности точки 1, 2 и 3 в плоскости факторов должны быть равноудалены как друг от друга, так и от центра, то есть располагаться в вершинах равностороннего треугольника с центром в точке 0. В общем случае для линейной модели, эксперимент содержащий конечное число опытов позволяет получить только оценки для коэффициентов a_0, a_1 и a_2. Подставив в уравнение модели известные значения факторов x_{ij} и результаты опытов y_i получим систему линейных алгебраических уравнений для определения a_i. Если количество этих уравнений больше трех, то значения оценок a_0, a_1 и a_2 могут быть получены при помощи МНК:

$$a_j = \left(\sum_{i=1}^{N} x_{ij} y_i \right) \Big/ N ,$$

где N - количество опытов. Здесь учтено, что x_{ij} принимают значения -1,+1.

Для вычисления коэффициентов линейной модели по формуле получим:

$$a_1 = \frac{\left[(-1)y_1 + (+1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4\right]}{4},$$

$$a_2 = \frac{\left[(-1)y_1 + (-1)y_2 + (+1)y_3 + (+1)y_4\right]}{4}$$

Таким образом, для вычисления a_1 и a_2 можно использовать. Для определения a_0 в формуле найдем среднее значение $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, равное $\bar{y} = a_0 + a_1\bar{x}_1 + a_2\bar{x}_2$, где $\bar{x}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{1i}$, $\bar{x}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{2i}$.

В случае симметричности матрицы планирования $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 = 0$, откуда $\bar{y} = a_0$. Чтобы коэффициент модели вычислялся по единой формуле в матрице планирования вводят фиктивную переменную x_0, которая принимает значение 1 во всех опытах и соответствует коэффициенту a_0. Коэффициент при независимых переменных x_i указывает на силу влияния факторов: чем больше значение имеет коэффициент a_i, тем большее влияние оказывает соответствующий фактор. В этом смысле результат планирования эксперимента алогичны факторному анализу. Для пассивных экспериментов факторный анализ может использоваться в качестве априорных данных при планировании.

Планируя эксперимент, стремятся получить линейную модель, однако в выбранных интервалах варьирования априори не известно, что линейная модель адекватно описывает поведение системы.

Нелинейность связана со смешанным взаимодействием. Формула всегда может быть оценена по полному факторному эксперименту. Для полного факторного эксперимента $N = 2^2$ матрица планирования с учетом эффекта взаимодействия приведена в таблица 18.

Таблица 18 – Матрица планирования

Номер	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	y
1	+1	-1	-1	+1	y_1
2	+1	+1	-1	-1	y_2
3	+1	-1	+1	-1	y_3
4	+1	+1	+1	+1	y_4

В этом случае коэффициент a_{12} также может быть вычислен по формуле:

$$a_{12} = \frac{\left[(+1)y_1 + (-1)y_2 + (-1)y_3 + (+1)y_4\right]}{4}.$$

Столбцы x_1, x_2 задают планирование эксперимента – по ним определяют результаты опыта; столбцы x_0, x_1x_2 служат только для расчета.

С ростом числа факторов число возможных взаимодействий возрастает. Например, для факторного эксперимента $N = 2^3$ кроме x_0, x_1, x_2, x_3 в матрице планирования появляются столбцы x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, $x_1x_2x_3$. Всего в матрице планирования оказывается восемь столбцов, следовательно, необходимо определять восемь коэффициентов. Все восемь коэффициентов необходимо определять в том случае, если учитывать смешанное взаимодействие. Если же модель задается в виде гиперплоскости (линейная модель), то достаточно определить четыре коэффициента: x_0, x_1, x_2, x_3. Полный факторный эксперимент оказывается избыточным и у экспериментатора возникает выбор:

1. Построить гиперплоскость по четырем экспериментам, а остальные четыре опыта использовать для оценки погрешности.

2. Провести эксперимент, состоящий из 4-х опытов, то есть реализовать экономный план эксперимента.

Таким образом, в отличие от модели гиперболоида, которая требует определение 2^k неизвестных коэффициентов, модель гиперплоскости, содержит $k+1$ коэффициент и требует соответствующего числа опытов, то есть полный факторный план (ПФП) для модели гиперплоскости сильно избыточен.

Для построения гиперплоскости, следовательно, достаточно использовать лишь некоторую часть из ПФП. Эту часть в теории планирования эксперимента называют *дробной* репликой или дробным факторным планом (ДФП). Если дробление ПФП производится последовательным делением числа опытов на 2, то реплику называют *регулярной*. Число p последовательного деления называют *дробностью* реплики.

Число опытов регулярного ДФП равняется $n = 2^{k-p}$. При $p = 1$ ДФП называют полурепликой (или 1/2 реплика), при $p = 2$ – 1/4 реплика и т.д.

Соответствующее число опытов и параметров планирования приведены в таблице 19.

Для составления планов-таблиц регулярных дробных реплик часто используют так называемое правило двоичного кода. Оно гласит, что для модели в виде гиперболоида знаки “+” и “–“ в столбцах плана должны чередоваться по правилу чередования двоичных чисел в разряде двоичного кода, то есть в столбце x_1 - через 1, в столбце x_2 - через 2, в столбце x_3 - через 4, в столбце x_k - через 2^{k-1}.

Таблица 19 – Параметры планирования

Число факторов, k	Число коэфф. модели, $k+1$	Число опытов ПФП	Вид плана	Число опытов плана	Избыточность
2	3	4	ПФП	4	1
3	4	8	Полуреплика	4	0
4	5	16	Полуреплика	8	3
5	6	32	Четвертьреплика	8	2
6	7	64	1/8 реплика	8	1
7	8	128	1/16 реплика	8	0
8	9	256	1/16 реплика	16	7

Проведение экспериментов и обработка результатов. Так как эксперимент содержит элемент неопределенности вследствие ограниченности обрабатываемых данных, то расстановка повторных или параллельных опытов не дает полностью совпадающих результатов. Получаемая погрешность (*воспроизводимости*) оценивается стандартными методами усреднения, то есть

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{q=1}^{n} y_q ,$$

где n – число параллельных опытов.

В этом случае дисперсия равна

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{q=1}^{n}(y_q - \bar{y})^2 .$$

Если учесть, что матрица планирования состоит из серии опытов, то оценка дисперсии всего эксперимента получается в результате усреднения дисперсии всех опытов. В этом случае говорят о дисперсии воспроизводимости не одного опыта, а эксперимента в целом. Такая дисперсия равна

$$\sigma^2(y) = \frac{\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{q=1}^{n}(y_{iq} - \bar{y})^2\right]}{N(n-1)},$$

где N – число различных опытов (число элементов в матрице планирования); n – число повторных опытов.

Данная формула справедлива, если соблюдается равенство числа повторных опытов во всех экспериментальных точках матрицы планирования. На практике в разных точках бывает выполнено разное число опытов. В этом случае для оценки дисперсии воспроизводимости пользуются *средневзвешенным* значением

$$\sigma^2(y) = \frac{\sum_{i=1}^{N} f_i \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^{N} f_i},$$

где σ_i^2 – оценка дисперсии i-го опыта, f_i – число степеней свободы в i-ом опыте; это число рассчитывают как $f_i = n_i - 1$ (число параллельных опытов минус 1).

2.4.2 Планирование эксперимента при оптимальных условиях

Нахождение оптимальных условий для исследуемого объекта – важнейшая практическая задача. Чаще всего при многофакторном эксперименте требуется найти значения факторов x_i такие, при которых отклик системы y принимает значения $y_{\max}$ или $y_{\min}$. Таким образом строится целевая функция отклика

$$y = y(x_1, x_2, \ldots, x_k),$$

и задача оптимизации сводится к нахождению $x_{1опт}, x_{2опт}, \ldots, x_{kопт}$, обеспечивающих экстремум функции цели

$$y(x_{1опт}, x_{2опт}, \ldots, x_{kопт}) = y_{\min}(y_{\max}).$$

Кроме того, на значения факторов накладываются дополнительные ограничения

$$y_i(x_1, x_2, \ldots, x_k) \ \{\geq, =, \leq\} \ R_i, \text{ где } i = 1 \ldots r.$$

Таким образом, задачей оптимизации является нахождение экстремума функции отклика при том условии, что сама функция априори неизвестна. Такая задача может быть решена многими способами:

1. Путем полного факторного эксперимента строится нелинейная модель функции отклика и затем у этой функции нахо-

дится экстремум. Такая модель может оказаться сложной и потребовать большого числа опытов, так как требования нахождения ее экстремума могут заставить проводить полный факторный эксперимент в широком диапазоне варьирования и при большом числе опытов.

2. Более практически приемлемым оказывается “пошаговый” подход к решению задачи нахождения экстремума. В этом случае эксперимент проводится в ограниченной области. Находится направление роста функции отклика (при нахождении максимума) или направление падения функции отклика (при нахождении минимума). Затем эксперимент проводится в следующей области и т.д. Таким образом, осуществляется последовательный поиск экстремума функции отклика. В этом случае задача оптимизации может быть решена без полного описания функции отклика во всей области варьирования факторов.

При последовательном нахождении экстремума y достижение максимума за наименьшее количество шагов происходит при последовательном движении по направлению наибольшего возрастания (убывания) функции отклика, то есть по направлению градиента

$$grad\ y(\vec{x}) = \frac{\partial y}{\partial x_1}\vec{x}_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\vec{x}_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_k}\vec{x}_k,$$

где $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_k$ – орты соответствующих координатных осей.

При достижении экстремума выражение меняет знак на противоположный. При осуществлении пошагового движения методом градиента одновременно меняются значения всех факторов. Приращение переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ выбирается пропорционально соответствующей составляющей градиента, то есть алгоритм имеет вид:

$$x_j^{(L+1)} = x_j^{(L)} + h^{(L+1)} \frac{\partial y(x^{(L)}) \big/ \partial x_j}{\sum\limits_{j=1}^{k}\left(\dfrac{\partial y(x^{(L)})}{\partial x_j}\right)^2},$$

где $x_j^{(L+1)}$ – значение переменной после L-го и $(L+1)$-го шагов; $h^{(L+1)}$ – размер шага.

При нахождении экстремума градиентным методом необходимо на каждом шаге измерений строить гиперплоскость для нахождения градиента, то есть проводить не менее, чем $(k+1)$ опыт. Наибольшее практическое применение получила разновидность градиентного спуска – метод *крутого восхождения* (быстрого спуска), названный по имени автора Бокса-Уилсона.

В этом методе градиент функции отклика определяется только в начальной точке и в дальнейшем движение осуществляется в этом выбранном направлении, но вычисление градиента на каждом шаге не производится. Пошаговое движение осуществляется до попадания функции в частный оптимум (экстремум функции в выбранном направлении – кривая 2 на рисунке 8). В точке частного экстремума находится вновь градиент и определяется направление дальнейшего движения и т.д.

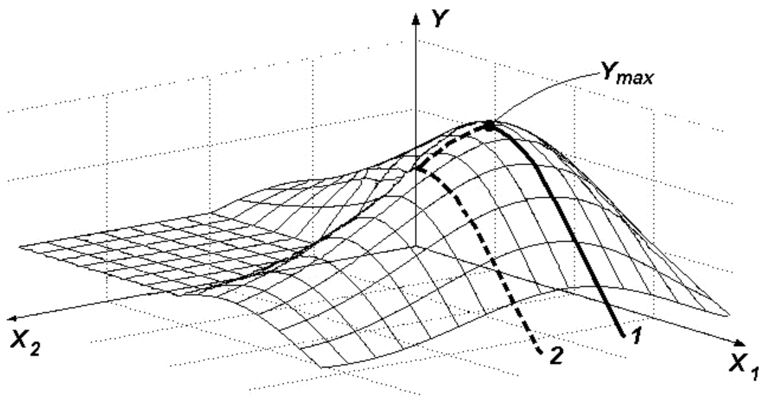


Рисунок 8 – Схема к методу быстрого спуска

В результате пошагового движения обоими методами экспериментатор попадает в квазистационарную область, близкую к точке оптимума. Эта область априори не может быть описана гиперплоскостью и требует описание в виде нелинейной модели (гиперболоида, параболоида и т.д.).

При $k=2$ общий вид функции отклика второго порядка будет следующим:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_1x_2 + a_5x_2^2.$$

Для определения такой поверхности факторы x_1, x_2 должны варьироваться не на двух, а минимум на трех уровнях. Эксперимент в этом случае требует не менее шести опытов для двух факторов (по числу коэффициентов в уравнении).

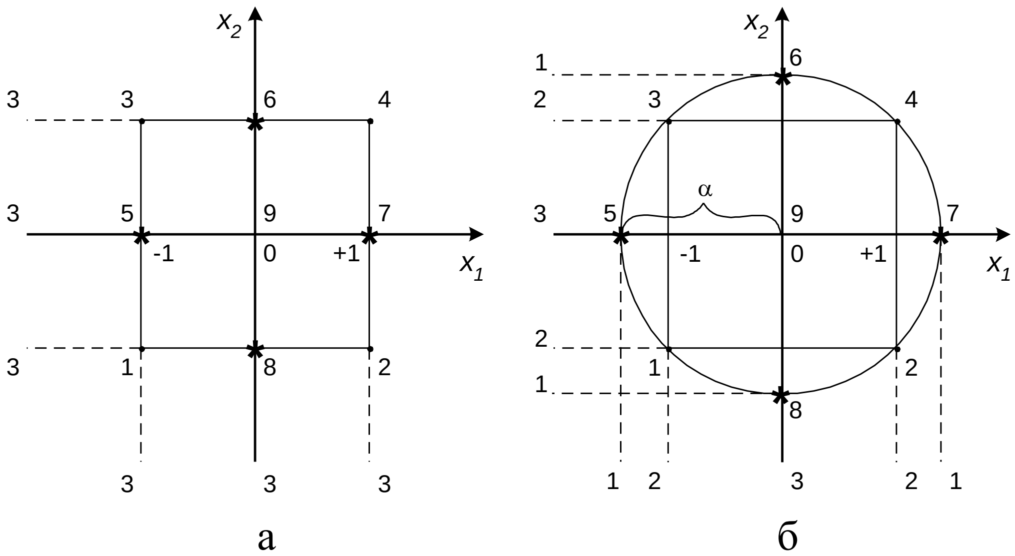


Рисунок 9 – Выбор дополнительных точек

На рисунке 9 показан выбор дополнительных точек для такого эксперимента. К опытам 1, 2, 3, 4 для построения плоскости добавляются опыты 5, 6, 7, 8 и, обязательно, точка 9 в центре квадрата.

Если дополнительные точки располагаются на сторонах квадрата (рисунок 9,а), то направление из вершин через центр определяет кривизну поверхности. План представленный на рисунке 9,а избыточен (девять опытов для определения шести коэффициентов), но неротатабелен. Для обеспечения ротатабельности точки 5, 6, 7, 8 необходимо удалить от центра тяжести на расстояние α, названное *звездным плечом*. Звездное плечо имеет в $\sqrt{2}$ раз большую длину, чем сторона квадрата.

Общее правило построения ротатабельных планов 2-го порядка для произвольного числа факторов:

За ядро плана принимают ПФП для k факторов, к ним прибавляют $2k$ звездных точек на расстоянии α от центра плана. Звездное плечо α определяется по формуле

$$\alpha = 2^{\frac{k-p}{2}},$$

где k – число факторов; p – дробность реплики.

Кроме того, планируется n_0 опытов в центре плана (точка 9 на рисунок 9).

2.4.3 Планирование эксперимента по определению динамических характеристик объекта

Выше мы рассматривали функцию отклика объекта и планирование эксперимента в случае, если $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, когда характеристики объекта не зависят от времени.

Если объект динамический, т.е. входные факторы и параметры объекта зависят от времени, то задача идентификации объекта (построение функции отклика) во многом аналогична электротехническим задачам.

Для линейного объекта $y = ax + b$; в случае если объект считается динамическим $y = y(t), x = x(t), a = a(t), b = b(t)$.

Аналогия с электротехническими задачами заключается в том, что при наличии реактивных элементов (индуктивность, емкость электрических цепей) выходные сигналы $y = y(t)$ реагируют на входные $x = x(t)$ с определенной временной задержкой.

Как было показано выше, в теории регистрирующих приборов, характеристики линейных электрических четырехполюсников могут во временной области описываться функцией отклика или, в частотной области, - полосой пропускания. Эти характеристики объекта связаны Фурье-преобразованием. Функция отклика является реакцией динамической системы на импульсные (в виде δ-функции или θ-функции) воздействия.

В общем случае динамические объекты описываются нелинейными интегральными или дифференциальными уравнениями. Как правило, в окрестностях рабочих режимов проводится линеаризация объектов.

Методы идентификации динамических объектов относительно хорошо разработаны для линейных объектов.

Для простоты рассмотрим одномерный объект, имеющий один вход $x(t)$ и один выход $y(t)$. $x(t)$ и $y(t)$ связаны некоторым дифференциальным уравнением. Определить это уравнение по экспериментальным данным оказывается возможным лишь в некоторых простейших случаях.

Импульсная характеристика и переходная функция объекта могут быть получены экспериментально как реакция объекта на воздействие в виде скачка (δ-функции).

Частотные характеристики можно определить, подавая на вход гармоническое воздействие постоянной амплитуды и переменной частоты (определить АЧХ).

Для большинства сложных объектов характерно наличие случайных возмущений и задача идентификации требует статистических методов для определения динамических характеристик. Простейший пример – на вход электронной схемы с собственными шумами подается гармонический сигнал, амплитуда и фаза которого на выходе оказываются случайно промодулированы. По характеристикам этой модуляции могут быть определены динамические характеристики объекта (случайные). Такой метод идентификации требует значительного времени измерений и не всегда применим на практике.

Наибольшее распространение для идентификации динамических объектов получили корреляционные методы, которые используются для получения импульсных характеристик объектов.

Импульсная характеристика $g(t)$ стационарного линейного объекта при условии некоррелированности внутренних возмущений с входным сигналом определяется интегральным уравнением Винера-Хопфа:

$$K_{xy}(\tau) = \int_0^{\infty} K_{xx}(t-\tau)g(t)dt,$$

где $K_{xx}(\tau)$ - автокорреляционная функция входного сигнала $x(t)$,

$K_{xy}(\tau)$ - взаимная корреляционная функция входного и выходного сигнала.

Чтобы при помощи уравнения идентифицировать объект необходимо решить это уравнение относительно $g(t)$ по экспериментальным зависимостям $K_{xx}(\tau)$ и $K_{xy}(\tau)$.

Простейшее решение такой задачи получается в том случае, если на вход объекта подаётся случайный сигнал в виде «белого» шума или короткий импульс в виде δ-функции ($K_{xx}(\tau)=\delta(\tau)$), тогда уравнение Винера-Хопфа примет вид:

$$K_{xy}(\tau)=\int_0^\infty \delta(t-\tau)g(t)dt=g(\tau).$$

На практике создать некоррелированный белый шум или бесконечно короткий импульс с бесконечно широким спектром невозможно . Поэтому приходится использовать реальные сигналы с максимально широким спектром. Это создаёт определённую (иногда значительную) погрешность в идентификации объектов.

Решение интегрального уравнения во всех остальных случаях является *некорректно поставленной задачей*. Некорректная постановка задачи в данном случае прежде всего означает неоднозначность решения для функции $g(t)$.

Задача состоит в нахождении подынтегральной функции по известному интегралу. Если считать, что интеграл - площадь под кривой, описываемой подынтегральным выражением, то имеет место бесконечное число кривых, дающих одинаковое значение интеграла. Математическое определение некорректно поставленной задачи в данном случае означает, что бесконечно малые погрешности в определении $K_{xx}(\tau)$ и $K_{xy}(\tau)$ приводят к конечным погрешностям в оценке $g(t)$.

Для устранения некорректности задачи развиты так называемые *методы регуляризации*. Как правило, они основаны на использовании априорной информации (*a priori (лат)* - из предшествующего). В простейшем случае функция $g(t)$ параметризуется. В частности - может быть задана в виде ряда с коэффициентами, которые необходимо определить.

Рассмотрим такой параметрический метод, основанный на разложении функции $g(t)$ в ряд по системе известных ортогональных функций:

$$g(t)=\sum_{i=0}^{N} C_i\varphi_i(t),$$

где $\varphi_i(t)$–базисная система известных функций; C_i-коэффициенты разложения.

При использовании данного выражения целью эксперимента является определение неизвестных коэффициентов C_i. В этом случае выходной сигнал запишется в виде:

$$y_M(t) = \int_0^\infty x(t-\tau) \cdot \sum_{i=0}^{N} C_i \varphi_i(\tau) d\tau .$$

Для получения оценок коэффициентов воспользуемся критерием минимума среднеквадратичной погрешности ε^2:

$$\varepsilon^2 = M\left\{[y(t) - y_M(t)]^2\right\} = M\left\{\left[y(t) - \int_0^\infty x(t-\tau) \sum_{i-0}^{N} C_i \varphi_i(\tau) d\tau\right]^2\right\}$$

Введём векторные обозначения $C = \{C_0, C_1, \ldots, C_N\}$

$$Z_i(t) = \int_0^\infty \varphi_i(\tau) x(t-\tau) d\tau .$$

Функцию $Z_i(t)$ называют *выходными реакциями* фильтра с импульсными характеристиками $\varphi_i(t)$ на входной сигнал *x(t).*

Тогда:

$$\varepsilon^2 = M\left\{\left[y(t) - \sum_{i=0}^{N} C_i Z_i(t)\right]^2\right\}.$$

Задача состоит в минимизации ε^2. В этом случае вектор *C* можно найти из (N+1) уравнений:

$$\frac{\partial \varepsilon^2}{\partial C_j} = 0 \qquad j = 1,2, \ldots, N.$$

Продифференцировав ε^2 по C_j и приравняв производную к нулю, получим систему уравнений для нахождения оценок коэффициентов $\hat{C}_i$.

$$M\left\{\left[y(t) - \sum_{i=0}^{N} \hat{C}_i Z_i(t)\right] Z_j(t)\right\} = 0 .$$

Перепишем в следующем виде:

$$M\{y(t) Z_i(t)\} = \sum_{i=0}^{N} \hat{C}_i M\{Z_i(t) Z_j(t)\}.$$

Моменты $M\{y(t)Z_i(t)\}$ и $M\{Z_i(t)Z_j(t)\}$ представляют собой начальные значения взаимных корреляционных функций соответствующих сигналов $y(t), Z_i(t), Z_j(t)$.

Введём обозначения:

$$K_{yj} = M\{y(t)Z_j(t)\}; \quad K_{ij} = M\{Z_i(t)Z_j(t)\}.$$

Тогда можно записать в виде:

$$K_{yj} = \sum_{i=0}^{N} \hat{C}_i K_{ij} \;\; j=0,1,...,N \; .$$

Чтобы система уравнений имела решение необходимо, чтобы матрица K_{yj} была диагональной.

$$K_{yj} = \begin{cases} K\,, & \text{если } i = j, \\ 0\,, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Кроме того, базисная система функций $\varphi_i(t)$ должна быть ортогональна. Это условие можно записать в следующем виде :

$$\int_0^\infty \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} A\,, & \text{если } i = j, \\ 0\,, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

При ортогональной базисной системе функций ортогональность выходных сигналов фильтра $Z_i(t)$ обеспечивается в том случае, когда спектральная плотность входного шума *x(t)* была постоянна, то есть решение уравнения Винера-Хопфа (1) для практических задач всегда возможно только приближённо.

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что выбор форм входных сигналов в задачах идентификации динамических объектов всегда представляет собой ключевую проблему. Это необходимо учитывать при планировании активного эксперимента с динамическими объектами.

Пример расчётов с методикой обработкой результатов исследований приведены в приложение.

2.5 Аналитическое моделирование процессов и имитационные модели

2.5.1 Определение и понятие системы и ее элементов

Система – совокупность элементов, являющаяся объектом исследования, изучения или наблюдения. Элементами могут быть физические объекты (оборудование, машины, приборы, здания и т.п.), явления (нагревание, охлаждение, свечение, электромагнетизм), процессы, в том числе и технологические (упаковка, взвешивание, сортирование, мойка и т.п.). Элемент системы- ее неделимая часть в рамках конкретного исследования, реализующая конкретные функции. Элемент системы описывается множеством различных характеристик, параметров, связями с сосед-ними элементами. Связи между элементами делают систему единым целым. Эле-менты отличаются друг от друга выполняемыми функциями, состояниями, входами и выходами. Любой элемент может рассматриваться как более мелкая система.

Термин «система» появился в научной литературе давно и является таким же неопределенным, как термины «множество» или «совокупность» . Наиболее широко этот термин первоначально использовался в механике, где обозначал материальную систему, т.е. совокупность материальных точек, подчиненных определенным связям. В дальнейшем понятие системы было распространено на биологические, экономические, технологические и другие объекты.

Система- понятие относительное. Некоторая совокупность элементов может быть частью более крупной системы, небольшой ее частью или рассматриваться самостоятельно, не зависимо от окружающего мира. Это зависит от цели исследования. Для установления системы, сферы ее действия необходимо выявить ее границы и состав. При установлении границ системы выявляются причинно-следственные взаимосвязи между ее элементами.

Для выделения системы требуется определить:

- цель, для достижения которой формируется система;
- объект исследования, состоящий из множества элементов, связанных с точки зрения цели в единое целое системными признаками;
- субъект исследования, наблюдения, заказчика, формирующего систему;
- характеристики внешней среды по отношению к системе и отражение их взаимосвязей с системой.

Цель функционирования определяет системные признаки, с помощью которых описываются элементы системы. Система с точки зрения цели есть упорядоченное представление об объекте (существующем или проектируемом). Разные субъекты, в зависимости от цели, могут иметь свои представления об элементах системы, их взаимосвязях и связях с внешней средой.

Цель- это субъективный образ, абстрактная модель несуществующего, но желаемого состояния производства, которое решило бы возникшую проблему.

Цели, которые ставит перед собой человек, редко достижимы только за счет его собственных возможностей, или возможностей производства, к которому он причастен.

Стечение обстоятельств, характеризующееся различием между необходимым (желаемым) и существующим, называется *проблемой, или проблемной ситуацией*. Проблема существующего положения, в частности с производством продукции, осознается в несколько стадий: *от смутного ощущения, что «что-то не так», к осознанию потребности , затем выявлению проблемы и, наконец, к формулировке цели.*

Вся последующая деятельность, способствующая решению этой проблемы, направлена на достижение поставленной цели. Эта деятельность направлена на отбор из окружающей среды элементов, свойства которых можно использовать на достижение поставленной цели, и на объединение этих элементов надлежащим образом, т.е. как работу по созданию того, что мы называем системой.

Соответствие между целями и системами сформулировать достаточно сложно. Так, если между первыми тремя целями и системами формулировка соответствия не вызывает затруднений, то остальные две цели могут иметь несколько систем, и наоборот. Для обеспечения быстрого перемещения сельскохозяйственной продукции с поля в качестве системы можно использовать не только грузовой автомобиль, но тракторный прицеп, контейнеровоз и т.п. Аналогично звуковая информация может быть передана по мобильной радиостанции.

Упорядоченность представления субъекта есть целенаправленное выделение элементов системы, установлении их признаков, взаимосвязей между собой и с внешней средой. При выделении системы учитывают наиболее существенные признаки, все второстепенное, несущественное- исключается.

Решение проблемы есть то, что заполняет промежуток между существующей и желаемой системами. Важное значение для человека имеют наглядные, образные, визуальные модели. Для наглядного представления системы ее изображают в виде «черного ящика», выделенного из окружающей среды и имеющего входы и выходы. Название «черный ящик» образно подчеркивает полное отсутствие сведений о внутреннем содержании ящика: задаются, фиксируются, перечисляются только входные и выходные связи системы со средой. Такой подход, несмотря на его простоту и на отсутствие сведений о внутренней структуре системы, часто оказывается полезным.

Сопоставляя входы и выходы за ряд моментов времени, находят такие входные параметры X, при которых рассчитанные значения выходных параметров Y лучше всего аппроксимируют фактические значения выходов.

Сущность метода "черного ящика" состоит в том, что при исследовании объектов они рассматриваются как недоступный для наблюдения, изучения и описания "черный ящик", имеющий определенные входы и выходы. Вследствие сложности устройства "черного ящика", т.е. изучаемого объекта, возможно лишь наблюдать состояние входов в него и соответствующих им выходов, т.е. изучать поведение, не зная его внутреннего устройства.

Однако, как бы детально ни изучалось поведение "черного ящика", нельзя вы-вести обоснованного суждения о его внутреннем устройстве, ибо одним и тем же поведением могут обладать различные объекты, а одно и то же соотношение между входами и выходами может в пределах имеющихся статистических данных удовлетворительно описываться несколькими различными математическими выражениями. С увеличением числа факторов регрессионной модели обычно падает ее достоверность. Как показывает практика, удовлетворительные модели получаются при описании ситуации, в которой выходной фактор существенно связан не более чем с пятью-шестью входными факторами.

Во многих случаях достаточно содержательного словесного описания входов и выходов.

Опишем входы и выходы системы «грузовой автомобиль». В данном случае за выход можно принять Y_1 - грузоподъемность автомобиля, а также, например, Y_2 -затраты горючего на единицу перевезенной продукции. Сформулировав таким образом выходы системы, можно прийти к выводу, что они могут относиться ко всем автомобилям, а не только к грузовым. Чтобы различить автомобили вообще и грузовые автомобили можно указать, что грузоподъемность должна быть, напри-мер, не меньше 5 т. Еще можно добавить достаточную для определенной зоны эксплуатации проходимость автомобиля.

В качестве входов для грузового автомобиля обозначим те его элементы, которые предназначены для управления во время движения: X_1 - руль, X_2 , X_3 ,X_4 - педали сцепления, газа и тормоза, X_5 - рычаг переключения передач, X_6 – переключатели сигнализации и освещения, X_7 - ручка ручного тормоза. Необходимо учесть также буквальные входы: X_8 - двери кабины и X_9 -борта для загрузки продукции в кузов автомобиля.

Дальнейший анализ возможных входов грузового автомобиля показывает, что входное воздействие на него оказывает X_{10} - другие пассажиры, тип и количество груза, способы крепления последнего в кузове.

Окружающая среда также оказывает входные воздействия на грузовой автомобиль. В перечень входов следует поэтому записать X_{11} - окна и зеркала, с помощью которых водитель наблюдает за окружающей средой. Но тогда можно отметить, что свойства дороги, по которой движется грузовой автомобиль, также оказывают входное воздействие: по разному приходится действовать водителю при езде по асфальту и по грунтовой дороге, в поле, дождь, гололед, грязь. Добавляем к списку входов X_{12} - механическое воздействие грунта на колеса. Рассуждая далее, можно определить в качестве входов следующие воздействия внешней среды: X_{13} – аэродинамическое сопротивление воздуха, X_{14} -силы инерции, возникающие при торможении, причем последние зависят как от окружающей среды, так и от самого грузового автомобиля и груза.

Рассмотренный пример свидетельствует, что построение модели «черного ящика» не является тривиальной задачей, так как на вопрос, сколько и какие входы и выходы следует включать в модель ответ не прост. Главной причиной большого количества входов и выходов в модели «черного ящика» является то, что всякая реальная система взаимодействует с объектами окружающей среды неограниченным числом способов.

Различают *детерминированные и стохастические системы.*

В детерминированных системах цель исследования полностью определена, сами элементы и отношения между ними и внешней средой известны. Примером детерминированной системы может быть, например, уборка фруктов как производственно-экономическая система. Элементами системы являются деревья и фрукты на них, подъездные пути, транспортные средства, тара, упаковочный материал, количество сборщиков и т.п. Существенными системными признаками являются качество фруктов, их количество, цена на рынке, себестоимость производства, погодные условия, квалификация сборщиков. К несущественным признакам можно отнести фамилии сборщиков, цвет материала из которого сделана тара и т.д.

Системы со стохастической структурой не имеют либо ясно выраженной цели исследования, либо выраженных существенных элементов и отношений между ними (признаков). Подобные системы выделяются на этапах разработки, проектирования сложных производств, технологических процессов и оборудования.

Системы разделяются на *управляемые и неуправляемые*. Управление можно определить как организацию различных действий, процессов для достижения намеченной цели.

Управляемые системы обеспечивают целенаправленное функционирование при изменяющихся внутренних или внешних условиях. Управление осуществляется человеком или специальным устройством (для технических систем). К управляемым системам относятся, например, движение автотранспорта, работа технологи-ческой линии или предприятия в целом.

Направляемые системы не обеспечивают целенаправленного функционирования. К неуправляемым относятся стихийные явления природы, работа оборудования после отказа, движение ветра.

При рассмотрении, анализе и синтезе систем существуют два подхода: *индуктивный (классический) и системный.*

Индуктивный подход предполагает изучение системы путем перехода от частного к общему и дальнейший синтез системы за счет слияния ее компонентов.

Системный подход предполагает переход от общего к частному при выделении исследуемого объекта из окружающей среды при единой цели.

Структуру системы можно изучать исходя из состава отдельных подсистем *(структурный подход)* или путем анализа функционирования отдельных свойств, позволяющих достичь заданной цели (*функциональный подход*).

Структурный подход позволяет выделить состав элементов системы и связи между ними. Наиболее общее описание структуры- топологическое описание на базе теории сетей и графов.

Структура системы- совокупность связей между элементами системы, отражающая их взаимодействие. Структура системы может изучаться с разных позиций- извне (состава отдельных элементов системы и отношений между ними) и изнутри (при анализе свойств системы, приводящих к намеченной цели). Связи между элементами, определяющие систему, могут быть *устойчивые, неустойчивые, статистически устойчивые.*

Устойчивые связи существуют постоянно в течение рассматриваемого промежутка времени или возникают регулярно.

Неустойчивые связи возникают редко, от случая к случаю.

Статистически устойчивые связи с течением времени стремиться к определенным значениям.

Связи могут определяться экономическими отношениями, физическими или социальными законами, отношениями родства, подчинённости и т.д. Они могут быть функциональными, информационными, причинными, логическими и т.д.

Функциональный подход рассматривает отдельные функции, алгоритмы, приводящие к достижению цели.

Характеристики системы могут быть количественные и качественные. Количественно система характеризуется числами, выражающими отношение между за-данной величиной (эталоном) и исследуемой величиной. Качественные характеристики выражаются описанием типа хороший, плохой, больше, меньше или с помощью различных шкал, например методами экспертных оценок.

Функционирование системы – проявление функций системы во времени, пере-ход от одного состояния к другому (движение в пространстве состояний). При использовании системы важно качество ее функционирования. Один и тот же закон функционирования может быть реализован с помощью различных алгоритмов. Процесс функционирования можно рассматривать как последовательную смену состояний. Совокупность всех возможных значений состояний системы называют *пространством состояний системы*.

Внешняя среда- множество существующих вне системы элементов любой при-роды, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее воздействием. Внешняя среда определяет условия функционирования системы посредством воздействия внешних факторов, являющихся движущей силой процесса и определяющих характеристики этого процесса. В зависимости от цели внешние факторы могут быть *стимулирующими, регулирующими, ограничивающими, возмущающими и разрушающими.*

Стимулирующие факторы стимулируют развитие процесса, например, подача углекислого газа (внешний фактор) в теплицу (систему) приводит к ускорению созревания растений.

Регулирующие, управляющие факторы приводят к изменению целей, режимов и алгоритмов функционирования системы.

Ограничивающими факторами являются различные нормативно-правовые акты, законы, нормы поведения, технические условия, регламенты и стандарты функционирования технологических процессов и технических систем.

Возмущающие факторы – это отрицательные факторы, негативно влияющие на работу системы, достижение ее цели. Эти факторы можно спрогнозировать и компенсировать.

Разрушающие факторы – это отрицательные факторы, которые сложно спрогнозировать, а значит, и предотвратить. Они приводят к частичному или полному уничтожению системы.

Отношения между элементами системы и системой определяются их иерархией.

Иерархия **–** это упорядоченная по старшинству совокупность элементов и подсистем, входящих в данную систему, например, завод – цех – участок – линия- аппарат. Смысл термина «иерархия» (или более полно — «организационная иерархия») удобнее всего пояснить на типичном для сельского хозяйства примере:

В *иерархической системе* объект расчленяется на уровни согласно принципу подчинения низших уровней высшим. Степень декомпозиции будет определяться как спецификой решаемой задачи, так и имеющейся информацией об объекте.

Иерархическая организация, конечно, не является исключительной особенностью сельского хозяйства - такой подход к структурированию приложим к самым разнообразным системам - коммерческим предприятиям, комплектам компьютерных программ, социальному устройству, электронному оборудованию и т. п.

Объекты, принадлежащие каждому структурному уровню, могут рассматриваться и как системы, образованные из подсистем (объекты более низких уровней), и как подсистемы, входящие в состав некоторой системы (объект более высокого уровня).

Для иерархических систем характерны три важных свойства:

1. Каждый уровень иерархии имеет свой собственный язык, свою систему концепций или принципов. К примеру, понятия «производство продуктов животноводства», «урожайность сельскохозяйственной культуры» практически лишены смысла на уровне клетки или органеллы.

2. На каждом уровне иерархии происходит обобщение свойств объектов более низких уровней. Закономерности, обнаруженные и описанные для последних, могут быть включены в объясняющую (функциональную) схему, обретая при этом связь с объектом высшего уровня. Таким образом, описание на уровне i способствует объяснению (пониманию) явлений, имеющих место на уровне i- 1.

3. Взаимосвязи между уровнями не симметричны. Для нормального функционирования объектов высшего уровня необходимо, чтобы успешно «работали» объекты более низкого уровня, но не наоборот.

Однако главная задача при этом — выбрать компоненты системы таким образом, чтобы каждому из них была присуща относительная автономия, то есть чтобы внутренние связи в пределах каждой подсистемы были сильными, а взаимодействия между подсистемами — слабыми. Обычно решающим оказывается то обстоятельство, что подсистемы, подлежащие рассмотрению, должны быть хорошо изучены и описаны.

Научные знания можно разделить на две категории: *фундаментальные и прикладные*.

Фундаментальные знания описывают наиболее общие законы природы и техники.

Прикладные знания представляют собой разновидность фундаментальных знаний и находят применение при организации производства товаров и в сфере услуг. Какая-то часть этих товаров и услуг используется в процессе исследований, что, в свою очередь, повышает уровень фундаментальных и прикладных знаний.

Для согласования результатов «смежных» исследовательских программ и выработки единого убедительного для практики заключения - хорошим средством оказывается *модель*.

Модель – материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе изучения замещает объект-оригинал, сохраняя некоторые важные для данного исследования типичные его черты.

Моделирование можно рассматривать как замещение исследуемого объекта (оригинала) его условным образом, описанием или другим объектом, именуемым моделью и обеспечивающим адекватное с оригиналом поведение в рамках задан-ных допущений. Моделирование обычно выполняется с целью познания свойств оригинала путем исследования его модели, а не самого объекта. Моделирование оправдано в том случае, когда оно проще создания самого оригинала или когда последний по каким-то причинам лучше вообще не создавать.

С моделями и моделированием мы сталкиваемся в нашей жизни каждый день. В детстве ребенка окружают игрушки — машинки, куклы, конструкторы и т. д. - модели, повторяющие отдельные свойства реально существующих предметов. Играя, ребенок получает важные знания о них и, вырастая, начинает грамотно при-менять уже реальные объекты. В процессе мышления человек оперирует образами объектов окружавшего мира, которые являются разновидностями моделей – когнитивными (мысленными) моделями.

Реальная польза от моделирования может быть получена при условии, что модель *адекватна* оригиналу в том смысле, что должна с достаточной точностью отображать интересующие исследователя характеристики оригинала.

В большинстве случаев моделирование вовсе не заменяет реальный объект и не отменяет необходимости в его разработке и натурном испытании. Оно просто значительно уменьшает объём работ по проектированию и исследованию объектов. В тех же случаях, когда это не так, стоимость моделирования может оказаться вполне сравнимой со стоимостью разработок и натурных испытаний изделий (вспомним тренажерную модель самолета).

Дадим классификацию моделей, отражающую в первую очередь методологические вопросы процедуры построения математических моделей и нахождения их решения с помощью ЭВМ.

Если исходить из целевого направления информационных потоков, циркулирующих между объектами и окружающим миром, модели можно разделить на модели для *исследования* и модели для *управления* .

Модели для исследования являются формой организации и представления знаний, средством соединения новых знаний с имеющимися. При расхождении моде-ли с реальностью это несоответствие ликвидируется путем изменения модели.

Модели для управления являются средством организации практических действий, способом представления эталонных действий или их результата, т.е. являются рабочим представлением целей. Моделей для управления используются для того, чтобы при обнаружении расхождения между моделью и реальным процессом направить усилия на изменение реальности так, чтобы приблизить ее к модели. Они носят нормативный характер, играют роль стандарта, под который подгоняют-ся как сама деятельность, так и ее результат. Примерами моделей управления служат планы и программы, уставы организаций, законы, алгоритмы, рабочие чертежи и шаблоны, параметры отбора, технологические допуски, технические и агротехнологические требования и т.д.

Основное различие между исследовательскими моделями и моделями для управления состоит в том ,что модели для исследований отражают существующее, а модели для управления – не существующее, но желаемое и возможно осуществимое.

По форме представления модели делят на *физические, символические и смешанные.*

Физические модели подразделяются на модели *подобия и аналоговые*.

Модели *подобия* характеризуются некоторыми масштабными изменениями, выбираемыми в соответствии с критериями подобия (например, глобус- модель земного шара). Природа процесса и его физическая сущность одинаковы как для модели, так и для исследуемого оригинала.

Аналоговые модели основаны на известных аналогиях между протеканием процессов в механических, тепловых, электрических, пневматических, гидравлических и других динамических системах и предназначены для исследования статических и динамических свойств объекта.

Символические модели характеризуются тем, что параметры реального объекта и отношения между ними представлены символами:

- семантическими (словами),
- математическими,
- логическими.

Класс символических моделей весьма широк. Наряду со словесными описаниями функционирования объектов - сценариями, сюда также относятся схематические модели: чертежи, графики и блок-схемы, логические блок-схемы (напри-мер, алгоритмы программ) и таблицы решений, таблицы и номограммы, а также математические описания — *математические модели*.

Математическая модель представляет собой набор формальных соотношений, которые отображают поведение исследуемой системы и состоящее из совокупности связанных между собой математическими зависимостями (формулами, уравнениями, неравенствами, логическими условиями) величин -факторов. По своей роли эти факторы целесообразно подразделить на параметры и характеристики (рис.1.2).

Модели функционирования включают широкий спектр символических моделей, например:

модель жизненного цикла системы, описывающая процессы существования системы от зарождения до прекращения функционирования;

модели операций, выполняемых объектом, представляют описание взаимосвязанной совокупности процессов функционирования отдельных элементов объекта. Так, в состав моделей операций могут входить модели надежности, характеризующие выход элементов системы из строя под влиянием эксплуатационных факторов;

информационные модели, отображающие во взаимосвязи источников и потребителей информации, виды информации, характер ее преобразования, а также их временные и количественные характеристики;

процедурные модели, описывающие порядок взаимодействия элементов исследуемого объекта при выполнении различных операций, например обработки материалов, деятельности персонала, использования информации, в том числе и реализации процедур принятия управленческих решений;

временные модели, описывающие процедуру функционирования объекта во времени и распределение ресурса "время" по отдельным компонентам объекта.

Параметрами объекта называются факторы, характеризующие свойства объекта или составляющих его элементов. В процессе исследования объекта ряд параметров может изменяться, поэтому они называются *переменными*, которые в свою очередь подразделяются на *переменные состояния и переменные управления.*

Переменные состояния объекта являются функцией переменных управления и воздействий внешней среды.

Характеристиками (выходными характеристиками) называются интересующие исследователя непосредственные конечные результаты функционирования объекта (естественно, что выходные характеристики являются переменными состояния).

Характеристики внешней среды описывают свойства внешней среды, которые сказываются на процессе и результата функционирования объекта. Значения ряда факторов, определяющие начальное состояние объекта или внешней среды, называются *начальными условиями.*

При описании математической модели оперируют следующими понятиями:

- *критерий оптимальности;*

- *целевая функция;*
- *система ограничений;*
- *уравнение связи;*
- *решение модели.*

Критерием оптимальности называется некоторый показатель, служащий формализацией конкретной цели управления и выражаемый при помощи целевой функции через факторы модели. Критерий оптимальности определяет смысловое содержание целевой функции. В ряде случаев в качестве критерия оптимальности может выступать одна из выходных характеристик объекта.

Целевая функция математически связывает между собой факторы модели, и ее значение определяется значениями этих величин. Содержательный смысл целевой функции придает только критерии оптимальности.

Система ограничения определяет пределы, сужающие область осуществимых, приемлемых или допустимых решений и фиксирующие внешние и внутренние свойства объекта. Ограничения определяют область протекания процесса, пределы изменения параметров и характеристик объекта.

Уравнения связи являются математической формализацией системы ограничений.

Критерии оптимальности и система ограничений определяют концепцию пост-роения будущей математической модели, т.е. *концептуальную модель*, а их формализация, т.е. целевая функция и уравнения связи, представляет собой *математическую модель*.

Решением математической модели называется такой набор (совокупность) значений переменных, который удовлетворяет ее уравнениям связи.

Модели, имеющие много решений, называются *вариантными* в отличие от *безвариантных*, имеющих одно решение. Среди допустимых решений вариантной модели, как правило, находится одно решение, при котором целевая функция, в зависимости от смысла модели, имеет наибольшее или наименьшее значение. Такое решение, как и соответствующее значение целевой функции, называется *оптимальным.*

В зависимости от степени формализованности связей между факторами различают *аналитические и алгоритмические модели.*

Аналитической называется модель в виде уравнений или неравенств, не имеющих разветвлений вычислительного процесса при определении значений любых переменных состояния модели, целевой функции и уравнений связи.

Если в математических моделях единственная целевая функция и ограничения заданы аналитически, то подобные модели относятся к классу моделей математического программирования.

Характер функциональных зависимостей может быть линейным и нелинейным. Соответственно этому математические модели делятся на *линейные и нелинейные*.

В сложной системе зачастую гораздо легче построить ее модель в виде *алгоритма*, показывающего отношения между элементами системы в процессе ее функционирования, задаваемые обычно в виде логических условий - разветвлений хода процесса.

К алгоритмическим моделям относятся и *имитационные модели* – моделирующие алгоритмы, имитирующие поведение элементов изучаемого объекта и взаимодействие между ними в процессе функционирования.

При имитационном моделировании процесс функционирования подсистем, выраженный в виде правил и уравнений, связывающих переменные, имитируется на компьютере. Для имитации используются специальные среды имитационного моделирования, позволяющие строить модели, имитирующие работу моделируемой системы, с любой степенью достоверности без проведения подробных аналитических преобразований.

В зависимости от того, содержит ли математическая модель случайные факторы, она может быть отнесена к классу *стохастических или детерминированных.*

В *детерминированных* моделях ни целевая функция, ни уравнения связи не содержат случайных факторов. Следовательно, для данного множества входных значений модели на выходе может быть получен только один единственный результат. Главная особенность детерминированной модели заключается в том, что любой прогноз (живая масса животного, урожайность культуры, количество осадков) она формирует в виде числа, а не в виде распределения вероятностей. Это в ряде случаев приемлемо, однако когда приходится иметь дело с величинами, значение которых предсказать трудно (количество осадков), такой подход оказывается совершенно неудовлетворительным.

Стохастические математические модели имеют факторы с вероятностной природой и характеризуются какими-либо законами распределения. Значения выходных характеристик в таких моделях могут быть предсказаны только в вероятностном смысле. Это даёт возможность оценивать не только среднее значение прогнозируемого параметра, но и его дисперсию.

Следующим признаком, по которому можно различать математические модели, является связь с фактором времени.

Статическая модель — это математическая функция, в которую не включена переменная времени. Все особенности поведения системы, имеющие выраженную зависимость от времени, при этом игнорируют. А поскольку все в мире быстро ли, медленно ли, но меняется, то любая статическая модель условна. Статическими моделями пользуются, когда в рамках поставленной задачи инерционностью и "памятью" реальной системы можно пренебречь. Это возможно при выполнении ряда условий, в число которых входят следующие:

- система устойчива, т.е. переходные процессы после скачкообразного изменения входов затухают;
- входы меняются медленно;
- выходы изменяются редко.

Математическая модель системы называется *динамической,* если значение ее выхода $y(t)$ может зависеть от времени t протекания процесса, его прошлого s:

$$y(t) = F(\{u(s), s<t\}).$$

Динамические модели позволяют учесть наличие "памяти", инерционности системы. Математическим аппаратом описания динамических систем являются дифференциальные, разностные уравнения, конечные автоматы, случайные процессы. Динамические модели, имеющие практическую ценность, обычно строятся на основе дифференциальных уравнений, не поддающихся прямому интегрированию, и решение их нельзя получить в виде простых аналитических выражений. В этом случае прибегают к численным методам решений на компьютере с помощью специального программного обеспечения.

Система может быть *дискретной или непрерывной* по входам, выходам и по времени. Под дискретным понимается конечное или счетное множество- один, два, три и т.д. Под непрерывным понимается множество - отрезок, луч или прямая линия, т.е. связное числовое множество, количество элементов которого стремится к бесконечности. Как правило, дискретность входа влечет за собой дискретность выхода объекта. Кроме того, для статических систем исчезает разница между непрерывным и дискретным временем.

Смешанные модели могут содержать как физические, так и символические элементы.

Эмпирические модели описывают связи между параметрами элементов одного уровня. Разработчик эмпирической модели всегда остается в пределах одного единственного уровня организационной иерархии, где он и строит уравнения, связывающие между собой параметры, свойственные подсистеме только данного уровня.

Функциональная модель объясняет связи между элементами как одного уровня иерархии, так и между различными уровнями. Разработчик функциональной модели стремится описать поведение системы с фундаментальных позиций, затрагивающих основу работы объекта, учитывающих наиболее общие закономерности его работы.

2.5.2. Основы линейного программирования

Многие задачи, с которыми приходится иметь дело в повседневной практике, являются многовариантными. Среди множества возможных вариантов приходится отыскивать наилучшие – оптимальные, при ограничениях, налагаемых на природные, экономические и технологические возможности. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа и синтеза различных ситуаций и систем специальные математические методы, позволяющие оптимизировать решения, принимаемые при управлении, прогнозировании, расчетах и т.д. Одним из таких методов является математическое программирование.

Математическое программирование — область математики, разрабатывающая методы решения многомерных задач на экстремум (минимум или максимум) функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. Возможности формализуются в виде системы ограничений. Все это составляет математическую модель. Модель задачи математического программирования включает:

- *совокупность неизвестных величин,*
- *целевую функцию;*
- *ограничения.*

Совокупность неизвестных величин – это те величины, действуя на которые, систему можно совершенствовать. Их называют планом задачи (вектором управления, решением, управлением, стратегией, поведением и др.).

Целевая функция- это функция, экстремальное значение которой нужно найти в условиях технических, технологических или экономических возможностей. Ее называют также показателем эффективности, критерием оптимальности, функцией цели, функционалом задачи и др. Целевая функция позволяет выбирать наилучший вари-ант из множества возможных. Наилучший вариант доставляет целевой функции экстремальное значение.

Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, уровень обслуживания или дефицитности, число комплектов оборудования, отходы производства и т. д.;

Ограничения - это условия, ограничивающие ресурсы, которыми располагает процесс в любой момент времени. Ограниченными могут быть материальные, финансовые, трудовые и другие ресурсы. Нередко потребности превышают возможности их удовлетворения.

Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует область допустимых решений (область технических, техно-логических, экономических и других возможностей).

План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется *допустимым*. Допустимый план, доставляющий функции цели экстремальное значение, называется *оптимальным*. Оптимальное решение может быть не обязательно единственным, возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бес-численное множество оптимальных решений.

Одним из разделов математического программирования является *линейное программирование*.

Линейное программирование - раздел математического программирования, применяемый при разработке методов отыскания экстремума линейных функций нескольких переменных при линейных дополнительных ограничениях, налагаемых на переменные.

По типу решаемых задач его методы разделяются на универсальные и специальные. С помощью универсальных методов могут решаться любые задачи линейного программирования.

Математическая формулировка задачи линейного программирования заключается в следующем. Устанавливается перечень искомых величин $x_1, x_2....x_n$. которые могут принимать различные численные значения. На эти неизвестные налагаются определённые условия, образующие так называемую систему ограничений. Ограничениями служат уравнения или неравенства, построенные в соответствии с логическим содержанием задачи. Они могут иметь только линейный вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m; \\ x_j \geq 0 \; (j = 1, 2, ..., n) \end{cases}$$

также могут содержать и нелинейные выражения, а также быть смешенными.

Затем составляется некоторая функция тех же искомых величин выражающая фактор, принимаемый в качестве критерия (доход, издержки, себестоимость). Такая функция называется целевой, а её вид и параметры зависят от конкретных условий и в общем виде будет выглядеть:

$$F = c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

Решение $X = (x_1, x_2,...,x_n)$, при котором функция F обращается в оптимум (минимум или максимум), называется оптимальным решением.

В задачах линейного программирования коэффициенты a_{ij}, b_i, c_j заданные постоянные величины, а число уравнений меньше числа переменных, т.е. $m<n$.

Без ограничения общности можно считать, что все правые части системы (4.1) неотрицательны, т. е. $b_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \ldots, m)$. Если в некоторых уравнениях системы (4.1) это условие нарушено, то можно умножить обе части таких уравнений на - 1.

Задача линейного программирования, система ограничений которой задана в виде системы уравнений (4.1), носит название канонической.

2.5.2.1 Симплексные преобразования

Симплексный метод является универсальным методом, которым можно решить любую задачу линейного программирования.

Идея симплексного метода состоит в следующем. Используя систему ограничений, приведенную к общему виду, т. е. к системе т линейных уравнений с п переменными (m < n), находят ее любое базисное решение, по возможности наиболее простое. Если первое же найденное базисное решение оказалось допустимым, то проверяют его на оптимальность. Если оно не оптимально, то переходят к другому допустимому базисному решению. Симплексный метод гарантирует, что при этом новом решении линейная форма если и не достигнет оптимума, то приблизится к нему. С новым допустимым базисным решением поступают так же, пока не находят решение, которое является оптимальным.

Если первое найденное базисное решение окажется недопустимым, то с помощью симплексного метода осуществляют переход к другим базисным решениям, которые позволяют приблизиться к области допустимых решений, пока на каком-то шаге не получится допустимое базисное решение. После этого к нему применяют механизм симплексного метода, изложенный выше.

Таким образом, применение симплексного метода распадается на два этапа:

1) нахождение допустимого базисного решения системы ограничений;

2) нахождение оптимального решения.

При этом каждый этап может включать несколько шагов, соответствующих тому или иному базисному решению. Так как число базисных решений всегда ограничено, то ограничено и число шагов симплексного метода.

Алгоритм симплексного метода:

1. В системе ограничений (уравнений или неравенств) переносят свободные члены в правые части. Если среди этих свободных членов окажутся отрицательные, то соответствующее уравнение или неравенство умножают на - 1.
2. Если система ограничений задана системой неравенств, то вводят добавочные неотрицательные переменные и тем самым сводят систему неравенств к эквивалентной системе уравнений, т. е. сводят задачу к канонической.
3. В данной или полученной после выполнения п. 2 системе m уравнений с n переменными (m < n) m переменных принимают заосновные. Основнымимогут быть любые m переменных, коэффициенты при которых образуют отличный от нуля определитель. Проще всего в качестве основных взять добавочные переменные (в этом случае отпадает необходимость вычислять определитель, который заведомо отличен от нуля, так как каждая добавочная переменная входит только в одно из уравнений системы ограничений).

После этого выражают основные переменные через неосновные и находят соответствующее базисное решение.

Если найденное базисное решение окажется допустимым, то переходят к п. 5; если же оно окажется недопустимым, то предварительно выполняют п. 4.

4. От полученного недопустимого базисного решения переходят к допустимому базисному решению или устанавливают, что система ограничений данной задачи противоречива.
5. Получив допустимое базисное решение, выражают через неосновные переменные этого решения и линейную форму. Если отыскивается максимум (минимум) линейной формы и в ее выражении нет неосновных переменных с положительными (отрицательными) коэффициентами, то критерий оптимальности вы-

полнен и полученное базисное решение служит оптимальным, т. е. решение окончено.

6. Если при нахождении максимума (минимума) линейной формы в ее выражении имеется одна или несколько неосновных переменных с положительными (отрицательными) коэффициентами, то переходят к новому базисному решению.

Из неосновных переменных, входящих в линейную форму с положительными (отрицательными) коэффициентами, выбирают ту, которой соответствует наибольший (наибольший по абсолютной величине отрицательный) коэффициент, и переводят ее в основные.

7. Чтобы решить, какую из основных переменных следует перевести в неосновные, находят абсолютные величины отношений свободных членов уравнений к коэффициентам при переменной, переводимой в основные, причем только из тех уравнений, в которых эти коэффициенты отрицательны. Для уравнений, в которых указанные коэффициенты положительны или равны нулю (переменная, переводимая в основные, в них отсутствует), эти отношения считают равными со. Из найденных отношений выбирают наименьшее и тем самым решают, какая из основных переменных перейдет в неосновные. Соответствующее уравнение выделяют.

8. Выражают новые основные переменные и линейную форму через неосновные переменные (это начинают делать с выделенного уравнения).

9. Повторяют п. 6…8 до тех пор, пока не будет достигнут критерий оптимальности (см. п. 5). После этого выписывают компоненты оптимального решения и находят оптимум линейной формы.

10. Если допустимое базисное решение дает оптимум линейной формы (критерий оптимальности выполнен), а в выражении линейной формы через неосновные переменные отсутствует хотя бы одна из них, то полученное оптимальное решение не единственное.

11. Если в выражении линейной формы имеется неосновная переменная с положительным коэффициентом в случае ее максимизации (с отрицательным в случае минимизации), а во все уравнения системы ограничений этого шага указанная переменная входит с

положительными коэффициентами или отсутствует, то линейная форма не ограничена при данной системе ограничений. В этом случае ее максимальное (минимальное) значение записывают в виде

$$F_{\max} = +\infty, \ F_{\min} = -\infty.$$

2.5.2.2 Сведение любой задачи линейного программирования к канонической и её решение

В большинстве задач ограничения задаются не в виде системы уравнений, а в виде системы линейных неравенств, причем возможны различные формы таких систем, например:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \ge b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \ge b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \ge b_m. \end{cases}$$

Наконец, система ограничений может быть смешанной: часть ограничений - неравенства типа 2, часть — типа 3, часть задана в виде уравнений.

Однако любую систему ограничений можно привести к системе уравнений вида 1. Для этого достаточно к левой части каждого неравенства 2 прибавить (отнять, если система задана в виде 3 какое-то неотрицательное число - добавочную переменную, с тем чтобы каждое неравенство обратилось в уравнение.

Пусть система ограничений задана неравенствами вида 2. Прибавим к левой части каждого неравенства соответствующую добавочную неотрицательную переменную $(x_{n+1}, x_{n+2}\ldots,x_{n+m})$, где $x_{n+j} > 0$ (i = 1, 2, ...m). В результате вместо системы неравенств (4.2) получим эквивалентную систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_{n+2} = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_{n+m} = b_m. \end{cases}$$

т. е. систему ограничений, аналогичную системе.

В случае смешанных систем ограничений, т. е. если в системе есть неравенства видов 2 и 3, а часть ограничений задана в виде уравнений, число добавочных переменных меньше т, а именно оно равно m -t, где m - общее число ограничений системы, а t-число ограничений в виде уравнений.

Таким образом, как бы ни были первоначально заданы ограничения задачи линейного программирования, их всегда можно привести к системе линейных уравнений, используя для этой цели добавочные переменные, т.е. свести задачу к канонической.

Известно, что система m линейных уравнений с n переменными может быть как совместной, так и несовместной, а уравнения системы - как зависимыми, так и независимыми.

Несовместность системы означает, что ее уравнения противоречивы. В этом случае система не имеет ни одного решения, а следовательно, не имеет решения и задача линейного программирования.

Будем считать, что все m уравнений системы линейно независимы. В противном случае из системы можно исключить часть уравнений так, чтобы уравнения системы стали линейно независимыми.

Совместная система m линейных уравнений с п переменными (m <n) имеет бесчисленное множество всевозможных решений, в том числе и допустимых (не имеющих отрицательных компонент), а количество ее базисных решений не превышает числа C_n^m.

Напомним также, что допустимым базисным решением является решение, содержащее m неотрицательных основных (базисных) переменных (компонент) и n - m неосновных (небазисных, или свободных) переменных. Неосновные переменные в базисном решении равны нулю. Основные же переменные, как правило, отличны от нуля, т.е. являются положительными числами.

Если хотя бы одна из основных переменных принимает нулевое значение, то соответствующее базисное решение называется вырожденным.

За основные переменные можно принять любые m переменных, если только определитель, составленный из коэффициентов при них, отличен от нуля.

Так как компоненты оптимального решения задачи линейного программирования не могут быть отрицательными, то поиски этого решения нужно ограничить только допустимыми решениями системы ограничений.

Пример 6. Для производства двух видов сельскохозяйственной продукции с сенокосов и пашни требуется четыре вида ресурса: минеральные удобрения; оросительная вода; площадь сельскохозяйственных угодий; трудовые ресурсы. Необходимо составить такой план производства указанных видов продукции, который обеспечит получение её максимального количества в стоимостном выражение в условиях ограниченности ресурсов. Данные приведены в таблице 20.

Таблица 20 – Данные к примеру 6

Вид ресурса	Запасы ресурса	Число единиц ресурса необходимых для производства единицы продукции	
		сенокос	пашня
I	120	0	4
II	160	4	0
III	120	2	2
IV	80	1	2
Стоимость реализации единицы продукции у.ед.		2	3

Дадим математическую формулировку задачи. Пусть x_1 и x_2 - соответственно количество продукции с сенокосов и пашни, запланированных к производству. Так как количество ресурсов по каждому виду ограничено, то должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 0\cdot x_1 + 4\cdot x_2 \le 120; \\ 4\cdot x_1 + 0\cdot x_2 \le 160; \\ 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 120; \\ 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 80. \end{cases}$$

Эта система неравенств и является системой ограничений данной задачи. Целевая функция, выражающая стоимость реализации единицы продукции, имеет вид $F = 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2$.

Задача сводится к нахождению максимума функции при ограничениях:

$$\begin{cases} 4\cdot x_2 \le 120; \\ 4\cdot x_1 \le 160; \\ 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 120; \\ 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 \le 80; \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Для сведения системы ограничений-неравенств к системе уравнений прибавим к левой части каждого неравенства добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4 , x_5, x_6. В условиях данной задачи они имеют конкретное экономическое содержание, а именно выражают объем остатков ресурсов каждого вида после выполнения плана по выпуску продукции. После введения добавочных переменных получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4\cdot x_2 + x_3 = 120; \\ 4\cdot x_1 + x_4 = 160; \\ 2\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_5 = 120; \\ 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + x_6 = 80; \\ x_j \ge 0, (j = 1, 2, ..., 6) \end{cases}$$

2.5.2.3 Получение допустимого базисного решения и оптимального решения

Если в только что рассмотренной задаче первое же полученное базисное решение оказалось допустимым, то в других случаях его можно найти не сразу, а через некоторое число шагов.

При этом надо помнить, что на первом этапе симплексного метода, т. е. при нахождении какого-либо допустимого решения, линейная форма в расчет не берется, а все преобразования относятся только к системе ограничений.

Пусть задача линейного программирования задана в общем виде, т.е. системой m линейных уравнений с n переменными (m <n) (или же она приведена к такому виду после введения добавочных неотрицательных переменных). Выберем группу m основных переменных, которые позволяют найти исходное базисное решение (не нарушая общности, можем считать, что основными являются первые m переменных). Выразив эти основные переменные через неосновные, получим систему ограничений в виде

$$\begin{cases} x_1 = k_1 + b_{1,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + b_{1,n} \cdot x_n; \\ x_2 = k_2 + b_{2,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + b_{2,n} \cdot x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_i = k_i + b_{i,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + b_{i,n} \cdot x_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = k_m + b_{m,m+1} \cdot x_{m+1} + \ldots + b_{m,n} \cdot x_n. \end{cases}$$

Следовательно, этому способу разбиения переменных на основные и неосновные соответствует базисное решение $k_1; k_2;...; k_i;...; k_m; \ldots; 0; 0; \ldots; 0$.

Рассмотрим общий случай, когда это решение является недопустимым. От полученного базисного решения следует сначала перейти к какому-нибудь допустимому базисному решению, причем не обязательно, чтобы этот переход осуществлялся сразу, в один шаг.

Если система ограничений не противоречива, то через конечное число шагов будет осуществлен переход к допустимому базисному решению.

По предположению, исходное базисное решение является недопустимым. Следовательно, среди свободных членов системы ограничений имеется хотя бы один отрицательный (число отрицательных свободных членов этой системы совпадает с числом отрицательных компонент исходного базисного решения). Пусть им является свободный член k_i i-го уравнения, т. е. основная переменная x_i в соответствующем базисном решении отрицательна.

Для перехода к новому базисному решению необходимо решить два вопроса:

1) установить, какая неосновная переменная должна быть переведена в число основных;

2) выбрать переменную, которую из основных следует перевести в неосновные на место выбывшей в основные переменной.

При переводе неосновной переменной в основные она не убывает, а, как правило, возрастает: вместо нуля в исходном базисном решении она примет положительное значение в новом базисном решении (исключение имеет место только при вырождении). Поэтому для решения вопроса о том, какие неосновные переменные можно перевести в основные, нужно уметь находить неосновные переменные, при увеличении которых возрастает основная переменная, отрицательная в исходном базисном решении. Вернемся к i-му уравнению системы, в котором свободный член k_i отрицателен. Оно показывает, что переменная x_i возрастает при возрастании тех неосновных переменных, коэффициенты которых в этом уравнении положительны. Отсюда следует, что в основные можно переводить те неосновные переменные, которые в уравнении системы с отрицательным свободным членом имеют положительные коэффициенты.

Здесь могут представиться три случая.

1. В i-м уравнении системы нет неосновных переменных с положительными коэффициентами, т. е. все коэффициенты $b_{i,j}$ отрицательны (как и свободный член k_i). В этом случае данная система ограничений несовместна – она не имеет ни одного допустимого решения. Действительно, вследствие неотрицательности всех переменных, в том числе $x_{m+l},...,x_n$, i -го уравнения, в котором свободный член k_i и все коэффициенты $b_{i,m+l},...,b_{i,n}$ отрицательны, следует, что переменная x_i - не может принимать неотрицательных значений. Но если нет ни одного допустимого решения системы ограничений, то нет и оптимального.

2. В i-м уравнении имеется одна переменная x_{m+j}, коэффициентпри которой положителен. В этом случае именно эта переменная переводится в основные.

3. В i-м уравнении имеется несколько переменных с положительными коэффициентами. В этом случае в основные можно перевести любую из них.

Далее необходимо установить, какая основная переменная должна быть переведена в число неосновных. Для этого следует воспользоваться правилом: находят отношения свободных членов к коэффициентам при переменной, переводимой в основные, из всех уравнений, где знаки свободных членов и указанных коэффициентов противоположны, а затем рассматривают абсолютную величину этих отношений и из них выбирают наименьшую (если в некоторых уравнениях знаки свободных членов и коэффициентов совпадают или в каких-то уравнениях переменная, переводимая в основные, отсутствует, то отношение считают равным ∞).

Уравнение, из которого получено наименьшее отношение, выделяют. Выделенное уравнение показывает, какая из основных переменных должна быть переведена в неосновные. Выразив новые основные переменные через неосновные, переходят к следующему базисному решению.

В результате получается аналогичная системе система уравнений, в которой число отрицательных свободных кленов либо совпадает с их числом в системе, либо на единицу меньше. Это зависит от того, положителен или отрицателен свободный член в выделенном уравнении.

Если в выделенном уравнении свободный член отрицателен, то в новом базисном решении число отрицательных компонент окажется на единицу меньше, чем в исходном. Если же в выделенном уравнении свободный член положителен (или равен нулю), то в новом базисном решении число отрицательных компонент останется таким же, как и в исходном.

Итак, получается новое, улучшенное базисное решение, которое ближе к области допустимых решений системы ограничений. Если оно окажется недопустимым, то к нему следует применить ту же схему еще раз. В результате через конечное число шагов получится допустимое базисное решение.

Продолжения примера 6. Нужно найти такое допустимое базисное решение этой системы ограничений, которое бы максимизировало линейную форму $F = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$.

$$\begin{cases} 4 \cdot x_2 + x_3 = 120; \\ 4 \cdot x_1 + x_4 = 160; \\ 2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_5 = 120; \\ 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_6 = 80; \\ x_j \geq 0, (j = 1, 2, ..., 6) \end{cases}$$

Так как система ограничений есть система четырех независимых уравнений с шестью переменными, то число основных переменных должно равняться четырем, а число неосновных - двум.

Для решения задачи симплексным методом, прежде всего, нужно найти любое базисное решение. В данном случае это легко сделать. Для этого достаочно взять в качестве основных добавочные переменные x_3, x_4 , x_5, x_6. Так как коэффициенты при этих переменных образуют единичную матрицу, то отпадает необходимость вычислять определитель. Считая неосновные переменные x_1, x_2 равными нулю, получим базисное решение (0; 0; 120; 160; 120; 80), которое к тому же оказалось допустимым. Поэтому здесь отпадает надобность в применении первого этапа симплексного метода.

Переходим сразу ко второму этапу, т. е. к поискам оптимального решения.

1 шаг. Основные переменные: x_3, x_4, x_5, x_6; неосновные переменные: x_1, x_2. В системе основные переменные выразим через неосновные. Для того чтобы судить, оставить ли неосновные переменные в числе неосновных или их выгоднее с точки зрения приближения к оптимальному решению перевести в основные, следует выразить через них и линейную форму (в данном случае она уже выражена через переменные x_1, x_2)• Тогда получим:

$$\begin{cases} x_3 = 120 - 4 \cdot x_2; \\ x_4 = 160 - 4 \cdot x_1; \\ x_5 = 120 - 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2; \\ x_6 = 80 - x_1 - 2 \cdot x_2; \end{cases}$$

При $x_1 = x_2 = 0$ имеем $x_3 = 120$, $x_4 = 160$, $x_5 = 120$, $x_6 = 80$, что дает базисное решение (0; 0; 120; 160; 120; 80), которое мы приняли за исходное. При этом базисном решении значение линейной формы $F = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$=0.

Когда мы полагали $x_1 = x_2 = 0$ (производство ничего не выпускает), была поставлена цель - найти первое, безразлично какое, базисное решение. Эта цель достигнута. Теперь от этого первоначального решения нужно перейти к другому, при котором значение линейной формы увеличится. Из рассмотрения линейной формы видно, что ее значение возрастает при увеличении значений переменных x_1 и x_2. Иными словами, эти переменные невыгодно считать неосновными, т. е. равными нулю, их нужно перевести в число основных. Это и означает переход к новому базисному решению. При симплексном методе на каждом шаге решения предполагается перевод в число основных только одной из свободных переменных. Переведем в число основных переменную x_2, так как она входит в выражение линейной формы с большим коэффициентом.

Как только одна из свободных переменных переходит в число основных, одна из основных должна быть переведена на ее место в число неосновных. Какую же из четырех основных переменных нужно вывести? Ответить на этот вопрос помогут следующие рассуждения.

Значение x_2 необходимо сделать как можно большим, так как это соответствует конечной пели - максимизации F. Однако оказывается, что увеличение x_2 может продолжаться только до известных границ, а именно до тех пор, пока не нарушится требование неотрицательности переменных. Так, из первого уравнения системы следует, что переменная x_2 не должна превышать числа 120/4, т. е. $x_2 \leq 30$, поскольку только при этих значениях x_2 переменная x_3 остается положительной (если $x_2 = 30$, то $x_3 = 0$;

если же x_2 >30, то $x_3 < 0$). Из третьего уравнения системы следует, что $x_2 \le 120/2$, т. е. $x_2 \le 60$, из четвертого - что $x_2 \le 80/2$, т. е. $x_2 \le 40$ (во второе уравнение переменная x_2 не входит). Всем этим условиям удовлетворяет $x_2 \le 30$.

Иными словами, для ответа на вопрос, какую переменную нужно перевести в число неосновных, нужно принять $x_2 = \min \{120/4; 120/2; 80/2\} = \min \{30; 60; 40\} = 30$. Тогда $x_3 = 0$ и x_3 переходит в число неосновных переменных, а x_4 и x_5 останутся положительными,

2 шаг. Основные переменные: x_2 , x_4, x_5, x_6 неосновные переменные: x_1 и x_3. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. В системе берем то уравнение, из которого получено минимальное значение отношения свободного члена к коэффициенту при x_2 . В данном случае это первое уравнение. Выразив из этого уравнения x_2, имеем, $x_2 = 30 - 0.25 \cdot x_3$. Подставим это выражение x_2 во все остальные уравнения системы и в линейную форму F и, приведя подобные члены, получим

$$\begin{cases} x_2 = 30 - 0{,}5 \cdot x_3; \\ x_4 = 160 - 4 \cdot x_1; \\ x_5 = 60 - 2 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot x_3; \\ x_6 = 20 - x_1 + 0{,}5 \cdot x_3; \end{cases}$$

$$F = 90 + 2 \cdot x_1 - 0{,}75 \cdot x_2$$

При $x_1 = x_3 = 0$ имеем $F = 90$. Это уже лучше, чем на 1 шаге, но не искомый максимум. Дальнейшее увеличение функции F возможно за счет введения переменной x_1 в число основных; так как эта переменная входит в выражение F с положительным коэффициентом, поэтому ее увеличение приводит к увеличению линейной формы и ее невыгодно считать неосновной, т.е. равной нулю.

Для ответа на вопрос, какую переменную вывести из основных в неосновные, примем $x_1 = \min \{160/4; 60/2; 20/1\} = 20$. Тогда $x_6 = 0$ и x_6 переходит в число неосновных переменных, а x_4 и x_5, остаются при этом положительными.

Первое уравнение не используется при нахождении указанного минимума, так как x_1 не входит в это уравнение.

3 шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_4, x_5; неосновные переменные: x_3, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные. Из последнего уравнения системы имеем $x_1 = 20 + 0.5 \cdot x_3 - x_6$. Подставляя это выражение в остальные уравнения и в линейную форму, получим

$$\begin{cases} x_1 = 20 + 0{,}5 \cdot x_3 - x_6; \\ x_2 = 30 - 0{,}25 \cdot x_3; \\ x_4 = 80 - 2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_6; \\ x_5 = 20 - 0{,}5 \cdot x_3 + 2 \cdot x_6. \end{cases} \tag{4.6}$$

$$F = 130 + 0{,}25 \cdot x_3 - 2 \cdot x_6$$

Из выражения линейной формы следует, что ее максимальное значение еще не получено, так как возможно увеличение F за счет введения в основные переменной x_3 (она имеет положительный коэффициент). Полагаем $x_3 = \min \{\infty; 30/0{,}25; 80/2; 20/0{,}5\} = 40$.

Здесь мы впервые встречаемся с двумя положениями, которые требуют дополнительных разъяснений.

Во-первых, хотя переменная x_3 и входит в выражение для x_1 (первое уравнение системы, но имеет положительный коэффициент и при любом возрастании x_3 переменная x_1 не может стать отрицательной. Иными словами, в первом уравнении никаких ограничений на возрастание переменной x_3 не накладывается, поэтому мы условно пишем ∞. Условимся в дальнейшем пользоваться этим же обозначением, если переменная, вновь вводимая в число основных, не входит в какое-либо уравнение системы ограничении.

Во-вторых, мы получим два одинаковых минимальных значения, равные 40. Если $x_3 = 40$, то $x_4 = 0$ и $x_5 = 0$, т. е. напрашивается вывод, что вместо одной переменной нужно перевести в число неосновных сразу две: x_4 и x_5. Но число основных переменных не должно быть меньше четырех. Для этого поступают следующим образом. Одну из переменных (x_4 или x_5.) оставляют в числе основных, но при этом ее значение считают равным нулю, т. е. полученное на следующем шаге базисное решение оказывается вырожденным. Оставим, например, x_4 в числе основных переменных, а x_5 переведем в число неосновных.

4 шаг. Основные переменные: x_1, x_2 , x_3, x_4 ; неосновные переменные: x_5, x_6. Выразим основные переменные и линейную форму F через неосновные, начав это выражение из четвертого уравнения системы. В итоге получим

$$\begin{cases} x_1 = 40 - x_5 - x_6; \\ x_2 = 20 - 0{,}25 \cdot x_5 - x_6; \\ x_3 = 40 - 2 \cdot x_5 + 4 \cdot x_6; \\ x_4 = 0 + 4 \cdot x_5 - 4 \cdot x_6. \end{cases}$$
$$F = 140 - 0{,}5 \cdot x_5 - x_6$$

Так как в выражение линейной формы переменные x_5 и x_6 входят с отрицательным коэффициентами, то никакое увеличение F за счет этих переменных невозможно.

Отсутствие на каком-то шаге симплексного метода в выражении линейной формы F, максимум которой ищется, неосновных переменных с положительными коэффициентами является критерием оптимальности.

Следовательно, на 4 шаге критерий оптимальности достигнут и задача решена. Оптимальным служит решение (40; 20; 40; 0; 0; 0), при котором F_{max}=140. Таким образом, для получения наибольшей прибыли, равной 140 ден. ед., из данных ресурсов необходимо получить 40 единиц продукции с сенокосов и 20 с пашни. При этом ресурсы II, III и IV видов окажется использованной полностью, а 40 ед. I вида останутся неизрасходованными.

Пример 7. Найти максимум функции $F = x_1 + 2 \cdot x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} -x_1 + 2\cdot x_2 \ge 2; \\ x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 - x_2 \le 2; \\ x_2 \le 6; \\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Вводим добавочные неотрицательные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 и сводим данную систему неравенств к эквивалентной ей системе уравнений

$$\begin{cases} -x_1 + 2\cdot x_2 - x_3 = 2; \\ x_1 + x_2 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_5 = 2; \\ x_2 + x_6 = 6; \\ x_j \ge 0,\ \ (j = 1, 2, ..., 6). \end{cases}$$

Введенные добавочные переменные принимаем за основные, так как в этом случае базисное решение системы легко находится. Тогда x_1 и x_2 - неосновные переменные.

1 шаг. Основные переменные: x_3, x_4, x_5, x_6; неосновные переменные; x_1 и x_2. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_3 = -x_1 + 2\cdot x_2 - 2; \\ x_4 = x_1 + x_2 - 4; \\ x_5 = -x_1 + x_2 + 2; \\ x_6 = -x_2 + 6; \end{cases}$$

Следовательно, данному разбиению переменных на основные и неосновные соответствует базисное решение (0; 0; - 2; - 4; 2; 6), которое является недопустимым (две переменные отрицательны), а поэтому оно не оптимальное. От этого базисного решения перейдем к улучшенному.

Чтобы решить, какую переменную следует перевести из неосновных в основные, рассмотрим любое из двух имеющихся уравнений последней системы с отрицательными свободными членами, например второе. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_2, так как в этом уравнении они имеют положительные коэффициенты (следовательно, при их увеличении, что произойдет, если переведем любую из них в основные переменные, переменная x_4 увеличится).

Попробуем перевести в основные переменную x_1. Чтобы установить, какую переменную следует перевести из основных в неосновные, найдем абсолютную величину наименьшего отношения свободных членов системы к коэффициентам при x_1, имеем x_1= min (∞; 4/1; 2/1; ∞) = 2. Оно получено из третьего уравнения, показывающего, что в неосновные нужно перевести переменную x_5, которая в исходном базисном решении положительна.

Следовательно, полученное базисное решение, как и исходное, содержит две отрицательные компоненты, т. е. при переходе к такому базисному решению улучшения не произойдет.

Если же перевести в основные переменную x_2 , то наименьшее отношение свободных членов к коэффициентам при x_2 составит x_2 - min (2/2; 4/1; ∞; 6/1) = 1. Оно получено из первого уравнения, в котором свободный член отрицателен. Следовательно, переводя x_2 в основные, а x_3 в неосновные переменные, мы получим базисное решение, в котором число отрицательных компонент на единицу меньше, чем в исходном. Поэтому остановимся на этой возможности: переводим x_2 в основные, а x_3 в неосновные переменные; тогда выделенным окажется первое уравнение.

2 шаг. Основные переменные: x_2, x_4, x_5, x_6; неосновные переменные: x_1 и x_3. Выразим новые основные переменные через новые неосновные, начиная это делать с выделенного на 1 шаге уравнения. В результате получим

$$\begin{cases} x_2 = 1 + 0{,}5 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot x_3; \\ x_4 = -3 + 1{,}5 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot x_3; \\ x_5 = 3 - 0{,}5 \cdot x_1 + 0{,}5 \cdot x_3; \\ x_6 = 5 - 0{,}5 \cdot x_3; \end{cases}$$

Следовательно, имеем новое базисное решение (0; 1; 0; -3; 3; 5), которое также является недопустимым, а поэтому не оптимальным. Но в нем, как мы и предвидели, только одна переменная отрицательна (а именно x_4).

От полученного базисного решения необходимо перейти к другому. Рассмотрим уравнение с отрицательным свободным членом, т.е. второе уравнение. Оно показывает, что в основные переменные можно перевести x_1 и x_3. Переведем в основные переменные x_1. Найдем наименьшее из абсолютных величин отношений свободных членов системы к коэффициентам при x_1; имеем x_1= min (∞; 3/1,5; 3/0,5; 5/0,5) = 2. Значит, в неосновные переменные нужно перевести x_4. Так как наименьшее отношение получено из второго уравнения, то его выделяем. В новом базисном решении уже не окажется отрицательных компонент, т. е. оно является допустимым.

3 шаг. Основные переменные: x_1, x_2, x_5, x_6; неосновные переменные: x_3, x_4. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_1 = 2 - \left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot x_3 + \left(\dfrac{2}{3}\right) \cdot x_4; \\ x_2 = 2 + \left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot x_3 + \left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot x_4; \\ x_5 = 2 + \left(\dfrac{2}{3}\right) \cdot x_3 - \left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot x_4; \\ x_6 = 4 - \left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot x_3 - \left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot x_4; \end{cases}$$

Новое базисное решение имеет вид (2; 2; 0; 0; 2; 4). Является ли оно оптимальным, можно установить, если выразить линейную форму через неосновные переменные рассматриваемого базисного решения. Сделав это, получим $F = 6 + \left(\dfrac{1}{3}\right) \cdot x_3 + \left(\dfrac{4}{3}\right) \cdot x_4$.

Таким образом, к линейной форме обращаемся только тогда, когда базисное решение является допустимым. Так как мы ищем максимум линейной формы, то полученное базисное решение не оптимальное.

Переводим в число основных переменную x_4 имеющую больший положительный коэффициент.

Находим x_4 = min (∞; ∞; 2 : (1/3); 4/(1/3)) = 6. Это наименьшее отношение получено из третьего уравнения системы, которое и выделяем. Оно показывает, что при x_4 =6 переменная x_5 = 0 и поэтому перейдет в число неосновных.

4 шаг. Основные переменные: x_1 , x_2 , x_4 , x_6; неосновные переменные: x_3, x_5. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_1 = 6 + x_3 - 2 \cdot x_5; \\ x_2 = -3 + x_3 - x_5; \\ x_4 = 6 + 2 \cdot x_3 - 3 \cdot x_5; \\ x_6 = 2 - x_3 + x_5; \end{cases}$$

Линейная форма, выраженная через те же неосновные переменные, примет вид $F = 14 + 3 \cdot x_3 - 4 \cdot x_5$. Следовательно, базисное решение (6; 4; 0; 6; 0; 2), к которому мы перешли, не является оптимальным.

Увеличение линейной формы возможно при переходе к новому базисному решению, в котором переменная x_3 является основной. Находим x_3 = min {∞; ∞; co; 2/1} = 2. Это наименьшее отношение получено из четвертого уравнения системы и показывает, чго при x_3 = 2 переменная x_6 = 0 и переходит в число неосновных.

5 ш а г. Основные переменные: x_1 , x_2 , x_3 , x_4 неосновные переменные x_5, x_6. Выразив основные переменные через неосновные, получим

$$\begin{cases} x_1 = 8 - x_5 - x_6; \\ x_2 = 6 - x_6; \\ x_3 = 2 + x_5 - x_6; \\ x_4 = 10 - x_5 - 2 \cdot x_6; \end{cases}$$

Линейная форма, выраженная через неосновные переменные нового базисного решения, имеет вид $F = 20 - x_5 - 2 \cdot x_6$. Критерий оптимальности для случая максимизации линейной формы выполнен. Следовательно, базисное решение (8; 6; 2; 10, 0; 0) является оптимальным, а максимум линейной формы F_{max} = 20.

2.5.2.4 Графическое решение задач линейного программирования

Графический способ решения задач линейного программирования целесообразно использовать для:

• решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами;

• решения задач со многими переменными при условии, что в их канонической записи содержится не более двух свободных переменных.

Запишем задачу линейного программирования с двумя переменными:

целевая функция:

$$Z_{\max} = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

ограничения:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m; \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \;\; x_2 \ge 0.$$

Каждое из неравенств системы ограничений задачи геометрически определяет полуплоскость соответственно с граничными прямыми $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$; $x_1 = 0$; $x_2 = 0.$. В том случае, если система неравенств (4.8) совместна, область ее решений есть множество точек, принадлежащих всем указанным полуплоскостям. Так как множество точек пересечения данных полуплоскостей - выпуклое, то областью допустимых решений является выпуклое множество, которое называется *многоугольником* решений. Стороны этого многоугольника лежат на прямых, уравнения которых получаются из исходной системы ограничений заменой знаков неравенств на знаки равенств.

Областью допустимых решений системы неравенств может быть:

• выпуклый многоугольник;

• выпуклая многоугольная неограниченная область;

• пустая область;

- луч;
- отрезок;
- единственная точка.

Целевая функция определяет на плоскости семейство параллельных прямых, каждой из которых соответствует определенное значение Z.

Вектор $\overline{C} = (c_1; c_2)$ с координатами c_1 и c_2, перпендикулярный этим прямым, указывает направление наискорейшего возрастания Z, а противоположный вектор - направление убывания Z.

Если в одной и той же системе координат изобразить область допустимых решений системы неравенств (4.8) и семейство параллельных прямых (4.7), то задача определения максимума функции Z сведется к нахождению в допустимой области точки, через которую проходит прямая из семейства Z = const, и которая соответствует наибольшему значению параметра Z.

Эта точка существует тогда, когда многоугольник решений не пуст и на нем целевая функция ограничена сверху. При указанных условиях в одной из вершин многоугольника решений целевая функция принимает максимальное значение.

Для определения данной вершины построим линию уровня $Z = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $\overline{C} = (c_1; c_2)$, и будем передвигать ее в направлении вектора $\overline{C} = (c_1; c_2)$ до тех пор, пока она не коснется последней крайней (угловой) точки многоугольника решений. Координаты указанной точки и определяют оптимальный план данной задачи.

Заканчивая рассмотрение геометрической интерпретации задачи, отметим, что при нахождении ее решения могут встретиться случаи, изображенные на рисунке 10 - 13. Рисунок 10 характеризует такой случай, когда целевая функция принимает максимальное значение в единственной точке А. Из рисунка 11 видно, что максимальное значение целевая функция принимает в любой точке отрезка АВ.

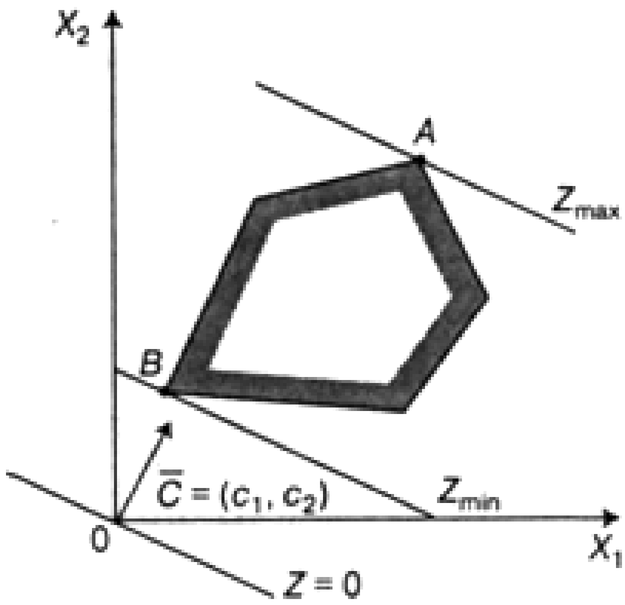


Рисунок 10 - Оптимум функции Z достижим в точке A

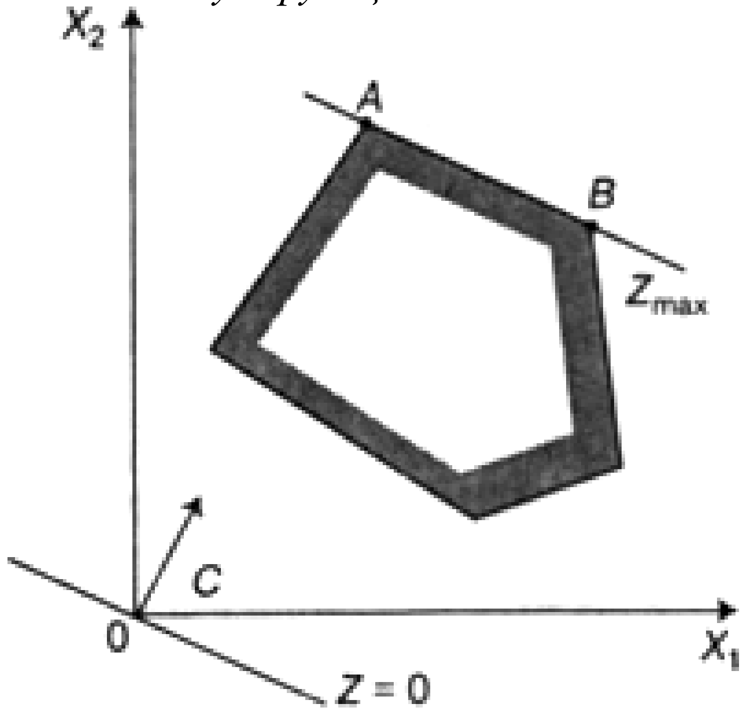


Рисунок 11 – Оптимум функции Z достигается в любой точке [AB]

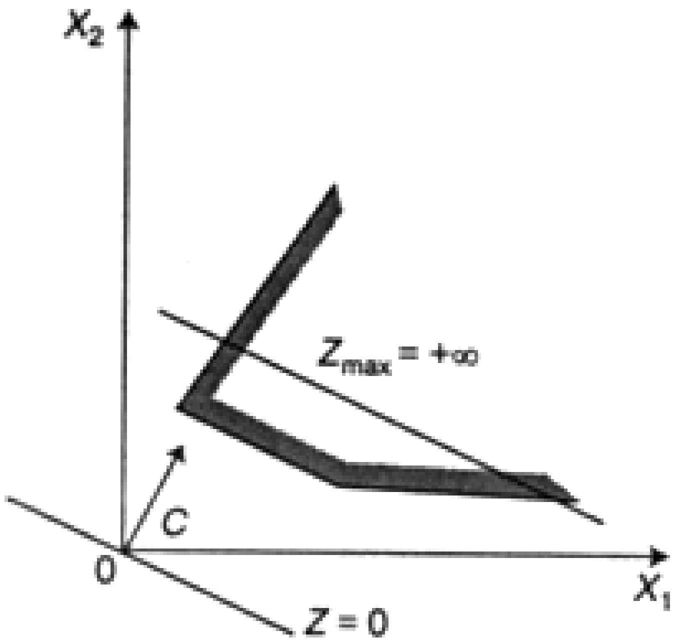


Рисунок 12 - Оптимум функции Z недостижим

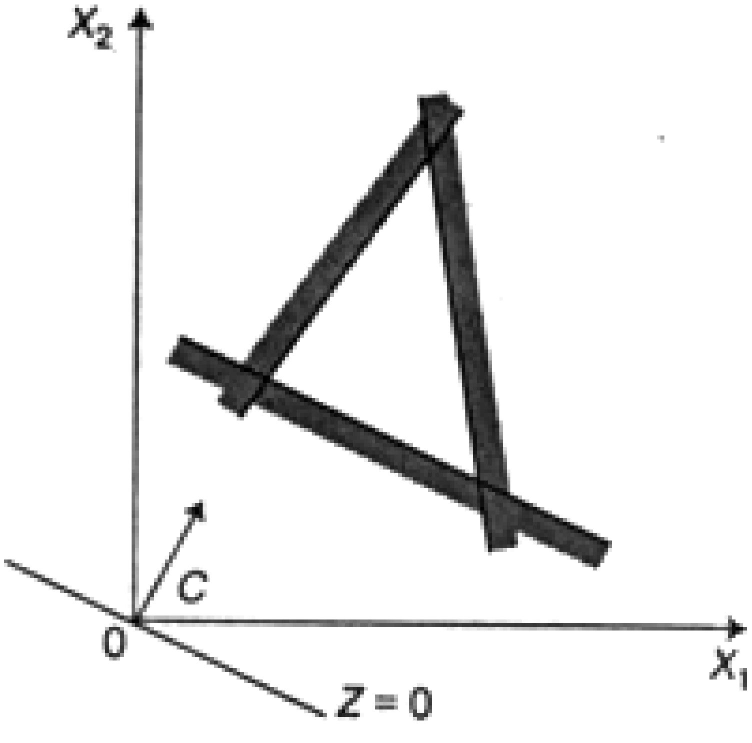


Рисунок 13 - Область допустимых решений - пустая область

На рисунке 12 изображен случай, когда максимум недостижим, а на рисунке 13 – случай, когда система ограничений задачи несовместна. Отметим, что нахождение минимального значения Z при данной системе ограничений отличается от нахождения ее максимального значения при тех же ограничениях лишь тем, что линия уровня Z передвигается не в направлении вектора $\overline{C}=(c_1;c_2)$, а в противоположном направлении. Таким образом, отмеченные выше случаи, встречающиеся при нахождении максимального значения целевой функции, имеют место и при определении ее минимального значения.

Для практического решения задачи линейного программирования на основе ее геометрической интерпретации необходимо следующее.

1.Построить прямые, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки равенств.

2.Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи.

3.Определить многоугольник решений.

4.Построить вектор $\overline{C}=(c_1;c_2)$.

5.Построить прямую $Z=c_1x_1+c_2x_2=0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $\overline{C}=(c_1;c_2)$.

6.Передвигать прямую $Z=c_1x_1+c_2x_2$ в направлении вектора $\overline{C}=(c_1;c_2)$, в результате чего либо находят точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность функции сверху на множестве планов.

7.Определить координаты точки максимума функции и вычислить значение целевой функции в этой точке.

Пример 8. Предприятие изготавливает два вида продукции П и Р, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используют два вида сырья А и Б. Максимально возможные запасы сырья в сутки составят 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья вида А на производство продукции П и Р составят 2 и 3 единицы соответственно, вида Б 3 и 2 единицы. Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию П никогда не превышает спроса на продукцию Р более чем на 1 единицу. Кроме того известно, что спрос на продукцию Р никогда не превышает 2 единицы в сутки. Оптовые цены единицы продукции равны 3 единицы для П, и 4 единицы для Р. Какое количество продукции каждого вида должно произвести предприятие, чтобы доход от реализации был максимальным. Решить задачу геометрическим способом.

Решение. Построим многоугольник решений (рисунок 13). Для этого в системе координат X_1OX_2 на плоскости изобразим граничные прямые:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9 & (L_1) \\ 3x_1 + 2x_2 = 13 & (L_2) \\ x_1 - x_2 = 1 & (L_3) \\ x_2 = 2 & (L_4) \end{cases}$$

Взяв какую-либо точку, например начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. Полуплоскости, определяемые неравенствами, на рисунке 14 показаны стрелками. Областью решений является многоугольник *OABCD*.

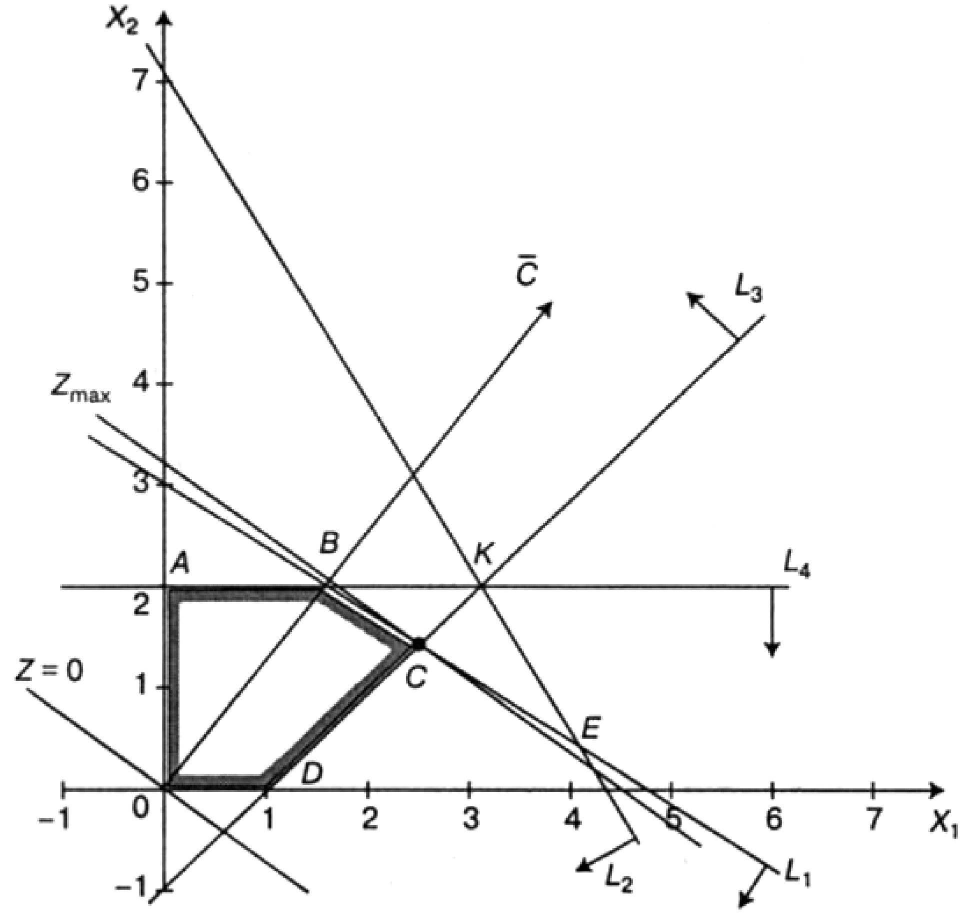


Рисунок 14 - Решение задачи линейного программирования геометрическим способом

Для построения прямой $Z = 3x_1 + 4x_2 = 0$ строим вектор-градиент $\overline{C} = (3;4)$ и через точку 0 проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую Z= 0 перемещаем параллельно самой себе в направлении вектора $\overline{C}$. Из рисунок13 следует, что по отношению к многоугольнику решений опорной эта прямая становится в точке С, где функция принимает максимальное значение. Точка *С* лежит на пересечении прямых L_1 и Z_3. Для определения ее координат решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 9 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

Оптимальный план задачи x_1 = 2,4; x_2=1,4. Подставляя значения x_1 и x_2 в линейную функцию, получим:

$$Z_{\max} = 3 \cdot 2{,}4 + 4 \cdot 1{,}4 = 12{,}8.$$

Полученное решение означает, что объем производства продукции *П* должен быть равен 2,4 ед., а продукции *Р* - 1,4 ед. Доход, получаемый в этом случае, составит: Z = 12,8 д. е.

2.5.3.5 Двойственные задачи

Составление двойственной задачи. Рассмотрим две задачи линейного программирования:

Максимизировать функцию

$$F = c_1x_1 + ... + c_nx_n$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \le b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \le b_m; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \; (i = 1, 2, ..., n)$$

Минимизировать функцию

$$Z = b_1x_1 + ... + b_mx_m$$

при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + \ldots + a_{1m}y_m \geq c_1; \\ a_{21}y_1 + \ldots + a_{2m}y_m \geq c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + \ldots + a_{mn}y_n \geq c_n; \end{cases}$$
$$y_i \geq 0\ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Эти задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче ищется максимум линейной формы, а в другой – минимум.

2°. Коэффициенты при переменных в линейной форме одной задачи являются свободными членами системы ограничений другой задачи, наоборот, свободные члены системы ограничений одной задачи – коэффициентами при переменных в линейной форме другой задачи.

3°. В каждой задаче система ограничений задается в виде неравенств, причем все они одного смысла, а именно: при нахождении максимума линейной формы эти неравенства имеют вид, а при нахождении минимума – вид

4°. Коэффициенты при переменных в системах ограничений описываются матрицами

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которые являются транспонированными относительно друг друга.

5°. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных другой задачи.

6°. Условия неотрицательности переменных сохраняются в обеих задачах.

Две задачи линейного программирования, удовлетворяющие указанным выше условиям, называются симметричными взаимно двойственными задачами. Мы будем изучать только симметричные двойственные задачи, а поэтому будем называть их короче – *двойственными задачами.*

Таким образом, каждой задаче линейного программирования можно поставить в соответствие двойственную ей задачу.

Первоначальную задачу будем называть исходной (или прямой). Прямая и двойственная ей задача, взятые вместе, образуют пару взаимно двойственных задач, причем любую из них можно рассматривать как исходную, тогда другая окажется двойственной ей.

Из сказанного вытекают следующие правила составления задачи, двойственной по отношению к исходной:

1.Приводят все неравенства системы ограничений исходной задачи к неравенствам одного смысла: если в исходной задаче ищется максимум линейной формы – к виду $\leq$, если же минимум – к виду $\geq$. Для этого неравенства, в которых это требование не выполняется, умножают на - 1.

2.Выписывают матрицу A коэффициентов при переменных исходной задачи, полученных после преобразования п. 1, и составляют матрицу A', транспонированную относительно матрицы A.

3.Составляют систему ограничений двойственной задачи, взяв в качестве коэффициентов при переменных элементы матрицы A', а в качестве свободных членов – коэффициенты при переменных в линейной форме исходной задачи, и записывают неравенства противоположного смысла по сравнению с неравенствами, полученными в п. 1.

4.Составляют линейную форму двойственной задачи, приняв за коэффициенты при переменных свободные члены системы ограничений исходной задачи, полученные в п. 1.

5.Указывают, что необходимо найти при решении двойственной задачи, а именно: минимум линейной формы, если в исходной задаче ищется максимум, и максимум, если в исходной задаче ищется минимум.

6.Записывают условие неотрицательности переменных двойственной задачи.

Пример 9. Составить задачу, двойственную следующей: найти максимум функции $F = 3x_1 + x_2$ при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0; \;\; x_2 \ge 0$$

Третье неравенство системы не удовлетворяет п. 1 правил составления двойственной задачи. Поэтому умножим его на –1:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 2 \\ -x_1 - x_2 \le -1 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

Для облегчения составления двойственной задачи лучше пользоваться расширенной матрицей B, в которую наряду с коэффициентами при переменных системы ограничений исходной задачи запишем свободные члены и коэффициенты при переменных в линейной форме, выделив для этой цели дополнительные столбец и строку. Матрицу B транспонируем и, используя транспонированную матрицу B', составляем задачу двойственную данной.

$$B = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 5 \\ \hline 3 & 1 & F \end{array}\right), \qquad B' = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & -1 & 5 & Z \end{array}\right)$$

Двойственная задача сводится к нахождению минимума функции $Z = 2y_1 + 2y_2 - y_3 + 5y_4$ при ограничениях

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \ge 3; \\ -2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 \ge 1. \end{cases}$$

$$y_1 \ge 0; \;\; y_2 \ge 0; \;\; y_3 \ge 0; \;\; y_4 \ge 0.$$

Основные теоремы двойственности

Теория двойственности в линейном программировании строится на следующих основных теоремах.

Теорема 1. *Если одна из задач линейного программирования имеет конечный оптимум, то и двойственная к ней также имеет конечный оптимум, причем оптимальные значения линейных форм обеих задач совпадают, т. е.* $F_{max} = \mathbf{Z_{min}}$ *или* $\mathbf{F_{min}} = \mathbf{Z_{max}}$. *Если же линейная форма одной из двойственных задач не ограничена, то условия другой задачи противоречивы.*

Прежде чем сформулировать следующую теорему, установим соответствия между переменными в исходной и двойственной задачах.

При решении симплексным методом исходной задачи для сведения системы неравенств к эквивалентной ей системе уравнений нужно ввести *m* добавочных неотрицательных переменных (по числу неравенств в системе ограничений) $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+i,} ..., x_{n+m}$, где $\boldsymbol{i}$ = 1, 2,…,*m* означает номер неравенства, в которое была введена добавочная переменная x_{n+i}.

Система ограничений двойственной задачи состоит из *n* неравенств, содержащих *m* переменных. Если решать эту задачу симплексным методом, то следует ввести *n* добавочных неотрицательных переменных $y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_{m+i,} ..., y_{m+n}$, где $\boldsymbol{j}$ = 1, 2,…,*m* означает номер неравенства системы ограничений двойственной задачи, в которое была введена добавочная переменная y_{m+j}.

Установим следующее соответствие между переменными в исходной и двойственной задачах:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_j & \dots & x_{n+1} & x_{n+2} & x_{n+i} & \dots & x_{n+i} & \dots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & \dots & y_{m+i} & \dots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \dots & y_i & \dots & y_m \end{array}$$

Иными словами, каждой первоначальной переменной исходной

задачи x_j *(j = 1,2 ,…, n)* ставится в соответствие добавочная переменная y_{m+j}, введенная в *j* - *е* неравенство двойственной задачи, а каждой добавочной переменной x_{n+i} исходной задачи *(i* = 1, **2,…,** *m),* введенной в *i* - е неравенство исходной задачи, – первоначальная переменная y_j двойственной задачи.

Теорема 2**.** *Компоненты оптимального решения одной из задач (прямой или двойственной) равны абсолютным величинам коэффициентов при соответствующих переменных в выражении линейной формы другой задачи (двойственной или прямой) при достижении ею оптимума и при условии, что полученное оптимальное решение не является вырожденным.*

Из теорем 1 и 2 следует, что если решить одну из взаимно двойственных задач, т. е. найти ее оптимальное решение и оптимум линейной формы, то можно записать оптимальное решение и оптимум линейной формы другой задачи.

Пример 10. Решить симплексным методом прямую и двойственную задачи, приведенные в предыдущем примере.

Решение прямой задачи. Сведем систему ограничений неравенств (пр. 9) к системе уравнений, введя неотрицательные добавочные переменные:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_6 = 5 \end{cases}$$

Добавочные переменные x_3, x_4, x_5, x_6 примем за основные на I шаге решения.

1 шаг. *Основные переменные:* x_3, x_4, x_5, x_6; *неосновные переменные:* x_1, x_2. Выразим основные переменные через неосновные (линейную форму на этом шаге решения не рассматриваем, так как соответствующее базисное решение не является допустимым):

$$\begin{cases} x_3 = 2 - x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 2 + x_1 - x_2 \\ x_5 = -1 + x_1 + x_2 \\ x_6 = 5 - x_1 - x_2 \end{cases}$$

Для получения допустимого базисного решения переменную x_1 переведем в основные. Находим x_1 = min {2/1; ∞; 1/1; 5/1} = 1. При этом переменная x_5 переходит в неосновные.

2 ш а г . *Основные переменные:* x_1, x_3, x_4, x_6 *неосновные переменные;* x_2, x_5. Выразим основные переменные и линейную форму через неосновные:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_2 + x_5 \\ x_3 = 1 + 3x_2 - x_5 \\ x_4 = 3 - 2x_2 + x_5 \\ x_6 = 4 - x_5 \end{cases}$$

$$F = 3 - 2x_2 + 3x_5$$

Переведем в основные переменную x_5. Полагая x_5=min {∞; 1/1; ∞; 4/1} = 1, заключаем, что переменную x_3 нужно перевести в неосновные.

3 шаг. *Основные переменные:* x_1, x_4, x_5, x_6, *неосновные переменные* x_3,x_2. Имеем

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 2x_2 - x_3 \\ x_4 = 4 + x_2 - x_3 \\ x_5 = 1 + 3x_2 - x_3 \\ x_6 = 3 - 3x_2 + x_3 \end{cases}$$

$$F = 3 - 2x_2 + 3x_3$$

Переменную x_2 переводим в основные. Находим x_2 = min {∞; ∞;∞; 1/1}=1. Тогда переменная x_6 переходит в неосновные.

4 ш а г. *Основные переменные::* x_1, x_2, x_4, x_5, ; *неосновные переменные:* x_2, x_6. Имеем

$$\begin{cases} x_1 = 4 - \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_6 \\ x_2 = 1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_4 = 5 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_6 \\ x_5 = 4 - + x_6 \end{cases}$$

$$F = 13 - \frac{2}{3}x_3 - \frac{7}{3}x_6$$

Критерий оптимальности выполнен. Оптимальное решение имеет вид (4; 1; 0; 5; 4; 0); при этом решении F_{max} = 13.

Продолжение примера 9. Систему ограничений двойственной задачи сводим к системе уравнений:

$$\begin{cases} y_1 - y_2 - y_3 + y_4 - y_5 = 3; \\ -2y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_6 = 1. \end{cases}$$

Добавочные переменные y_5 y_6 примем за основные на 1 шаге решения.

1 шаг. *Основные переменные:* y_5, y_6; *неосновные переменные:* y_1, y_2, y_3, y_4. Выразим основные переменные через неосновные:

$$\begin{cases} y_5 = -3 + y_1 - y_2 - y_3 + y_4; \\ y_6 = -1 - 2y_1 + y_2 - y_3 + y_4. \end{cases}$$

Переведем в основные переменную y_4. Находим y_4 = mm (3/1: 1/1 = 1. Переменная y_6 переходит в неосновные.

2 шаг. *Основные переменные:* y_4, y_5 *неосновные переменные:* y_1, y_2, y_3, y_6. Имеем

$$\begin{cases} y_4 = 1 + 2y_1 - y_2 + y_3 + y_6; \\ y_5 = -2 + 3y_1 - 2y_2 + y_6. \end{cases}$$

Переменную y_1 переведем в основные. Так как y_1 = min (∞; 2/3) = 2/3, то переменная y_5 переходит в неосновные.

3 шаг. *Основные переменные* y_1, y_4, *неосновные переменные:* y_2, y_3, y_5, y_6. Так как соответствующее базисное решение задачи является допустимым, то выразим через неосновные переменные не только основные, но и линейную форму:

$$\begin{cases} y_4 = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_5 - \frac{1}{3}y_6; \\ y_5 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3}y_2 + y_3 + \frac{2}{3}y_5 + \frac{1}{3}y_6. \end{cases}$$

$$Z = 13 + 5y_2 + 4y_3 + 4y_5 + y_6$$

Критерий оптимальности (для случая минимизации линейной формы) выполнен. Оптимальное решение имеет вид (2/3; 0; 0; 7/3; 0; 0), при этом Z_{min}= 13.

Решив двойственную задачу, убеждаемся в справедливости первой части теоремы 1: двойственная задача тоже имеет конечный оптимум, причем Z_{min} = =F_{max} = 13.

Убедимся, что справедливо также и утверждение теоремы 2. Для этого запишем переменные прямой и двойственной задачи, соблюдая их соответствие;

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_5 & y_6 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}$$

Линейную форму, полученную на последнем шаге решения двойственной задачи, выразим через все переменные этой задачи:

$$Z = 13 + 0y_1 + 5y_2 + 4y_3 + 0y_4 + 4y_5 + y_6$$

Рассматривая коэффициенты при переменных y_j в этой линейной форме и учитывая их соответствие с коэффициентами при переменных $\boldsymbol{x_i}$**,** получим решение (4; 1; 0; 5; 4; 0), совпадающее с оптимальным решением прямой задачи.

З а м е ч а н и е . Решив прямую задачу, можно сразу получить решение двойственной задачи. Если выразить линейную форму $\boldsymbol{F}$**,** полученную на 4 шаге решения прямой задачи, через все переменные этой задачи, то получим

$$F = 13 + 0x_1 + 0x_2 - \frac{2}{3}x_3 + 0x_4 + 0x_5 - \frac{7}{3}x_6.$$

На основании теоремы 2, учитывая соответствие между переменными в прямой и двойственной задачах и взяв абсолютную величину коэффициентов при переменных, найдем оптимальное решение двойственной задачи (2/3; 0; 0; **7**/3; 0; 0). При этом Z_{min} =F_{max} = 13.

2.5.2.6 Транспортная задача

Транспортная задача имеет специфическую экономико-математическую модель и решается не универсальным симплексным методом, а с помощью распределительного метода и его различных модификаций.

Простейшими транспортными задачами являются задачи о перевозках некоторого однородного груза из пунктов отправления (от поставщиков) в пункты назначения (к потребителям) при обеспечении минимальных затрат на перевозки.

Обычно начальные условия таких задач записывают в таблицу. Например, для k поставщиков и i потребителей такая таблица имеет следующий вид.

Здесь показатели a_{ij} означают затраты на перевозку единицы груза от i -го поставщика ($i = 1, 2,\dots, k$) к j - му потребителю ($j = 1, 2, \dots,l$), M_i – мощность i - го поставщика в планируемый период, N_j – спрос j - го потребителя на этот же период.

Обозначим через x_{ij} поставку (количество груза), которая планируется к перевозке от i - го поставщика к j - му потребителю. Математически задача сводится к нахождению минимума целевой функции, выражающей суммарные затраты на перевозку всего груза, т. е. функции

$$F = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + \dots + a_{ij}x_{ij} + \dots + a_{kl}x_{kl},$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1l} = M_1, \\ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2l} = M_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{k1} + x_{k2} + \dots + x_{kl} = M_k, \\ x_{11} + x_{21} + \dots + x_{k1} = N_1, \\ x_{11} + x_{22} + \dots + x_{k2} = N_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_{1l} + x_{2l} + \dots + x_{kl} = N_l. \end{cases}$$

Если к ограничениям (6.1) добавить еще одно:

$$\sum_{i=1}^{k} M_i = \sum_{j=1}^{l} N_j$$

т. е. суммарная мощность поставщиков равна суммарному спросу потребителей, то соответствующая модель задачи называется ***закрытой.***

Таблица 21 - Начальные условия транспортной задачи

Постав-щики	Мощности поставщиков	Потребители и их спрос					
		1	2		*j*		*l*
		N_1	N_2		N_j		N_l
1	M_1	a_{11} x_{11}	a_{12} x_{12}		a_{1j} x_{1j}		a_{1l} x_{1l}
2	M_2	a_{21} x_{21}	a_{22} x_{22}		a_{2j} x_{2j}		a_{2l} x_{2l}
i	M_i	a_{i1} x_{i1}	a_{i2} x_{i2}		a_{ij} x_{ij}		a_{il} x_{il}
k	M_k	a_{k1} x_{k1}	a_{k2} x_{k2}		a_{kj} x_{kj}		a_{kl} x_{kl}

Задачам, в которых ограничение отсутствует, т. е. $\sum_{i=1}^{k} M_i \neq \sum_{j=1}^{l} N_j$ первоначально соответствует ***открытая*** модель.

Отметим некоторые особенности экономико-математической модели транспортной задачи по сравнению с моделями задач линейного программирования, рассмотренных в предыдущих главах.

Система ограничений сразу имеет вид уравнений, поэтому отпадает необходимость вводить добавочные переменные.

Матрица коэффициентов при переменных в системе состоит только из единиц и нулей.

Система ограничений включает k уравнений, связывающих поставки I -го поставщика с мощностью M_l (i = 1, 2,…, k) этого поставщика, и l уравнений, связывающих поставки j-му потребителю со спросом $\boldsymbol{N_j}$ (j = 1, 2, …,l) этого потребителя. Заметим, что число k равно числу строк исходной таблицы, а число l - числу столбцов.

Число переменных x_{ij}, входящих в целевую функцию и в систему уравнений (6.1), равно произведению kl, т. е. числу клеток таблицы.

Таким образом, система ограничений есть система из $k + l$ уравнений с kl переменными.

Специфичность экономико-математической модели транспортной задачи привела к появлению особого метода ее решения – распределительного метода, а в дальнейшем – к различным модификациям этого метода.

Однако все теоретические предпосылки, которые лежат в основе симплексного метода, сохраняются.

Любое решение транспортной задачи $(x_{11}; x_{12}; ...; x_{kl})$ называется ***распределением поставок.*** Так как поставки не могут быть отрицательными, то речь может идти только о допустимых решениях.

Оптимальному решению транспортной задачи соответствует оптимальное распределение поставок, при котором целевая функция $F = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + ... + a_{ij}x_{ij} + ... + a_{kl}x_{kl}$ достигает своего минимума.

В ходе решения задачи и нужно получить это оптимальное распределение поставок, которому соответствует какое-то допустимое базисное решение системы ограничений.

При распределительном методе решения транспортной задачи последовательно используются расчетные таблицы, соответствующие тому или иному шагу решения. Каждая такая таблица включает определенное распределение поставок. Так как распределение поставок должно соответствовать базисному решению, то и клетки таблицы должны соответствовать основным (положительным) и неосновным (равным нулю) переменным.

На практике это сводится к тому, что в клетки, соответствующие основным переменным, записывают поставки, а клетки, которым соответствуют неосновные, т. е. равные нулю, переменные, остаются не заполненными (свободными).

З а м е ч а н и е. Условимся использовать следующий способ заполнения клеток: в верхнем левом углу записываем показатель затрат (в последующих таблицах – оценки), а в нижнем правом – поставки.

Число заполненных клеток определяется числом основных переменных системы ограничений, а последнее равно числу линейно независимых уравнений системы.

Если решение задач симплексным методом означало переход от одного базисного решения к другому, пока не было найдено оптимальное решение или не был сделан вывод о несовместности системы ограничений, то решение транспортной задачи состоит в переходе от одного распределения поставок к другому распределению: от одной таблицы к другой. Новое распределение поставок должно снижать или, по крайней мере, не увеличивать общую стоимость затрат на перевозки. Перераспределение поставок должно осуществляться до тех пор, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

Чтобы осуществлять переход от одного распределения поставок к другому, нужно иметь исходное (первоначальное) распределение поставок.

Прежде чем начать заполнение клеток таблицы поставками, нужно установить число таких клеток. Как отмечалось в предыдущем параграфе, оно определяется числом линейно независимых уравнений системы ограничений.

На первом этапе рассмотрим те задачи, которые имеют закрытую модель, т. е. для них выполняется ограничение: $\sum_{i=1}^{k} M_i = \sum_{j=1}^{l} N_j$.

В этом случае хотя в системе ограничений содержится $k + l$ уравнений, но число ее линейно независимых уравнений на единицу меньше.

Действительно, если сложить все k первых уравнений, относящихся к поставщикам, и все l уравнений, относящихся, к потребителям, и учесть, что $\sum_{i=1}^{k} M_i = \sum_{j=1}^{l} N_j$ то получим полное совпадение левых и правых частей составленных таким образом сумм. Это свидетельствует о том, что система в закрытых моделях линейно зависима. Если же из системы исключить одно, безразлично какое, уравнение, то она становится линейно независимой.

Отсюда следует, что *число линейно независимых уравнений и число заполняемых клеток равно* $k+l-1$. При этом *число незаполненных клеток составляет* $kl - (k+l-1)$.

Как же заполнить поставками $k+l-1$ клеток таблицы? Существуют различные правила такого заполнения, а следовательно, и получения первоначального распределения поставок. Рассмотрим два из них: правило учета наименьших затрат и правило «северозападного угла».

Пример 10. Пусть требуется получить первоначальное распределение поставок в следующей транспортной задаче (таблица 22).

Таблица 22 - Данные к примеру 10

Поставщики	Мощности поставщиков	Потребители и их спрос				
		1	2	*3*	4	5
		85	65	80	75	70
I	100	4	2	3	1	2
I	125	6	5	3	4	3
III	**75**	1	2	5	6	5
IV	**75**	6	4	5	2	3

Решение. Убедимся прежде всего, что задача имеет закрытую модель: в самом деле, $\sum_{i=1}^{4} M_i = 375,\ \sum_{j=1}^{5} N_j = 375$ т.е $\sum_{i=1}^{4} M_i = \sum_{j=1}^{5} N_j$. Здесь число поставщиков $\boldsymbol{k} = 4$; число потребителей $l = 5$; число всех клеток $4 \times 5 = 20$; число заполненных клеток $4 + 5 - 1 = 8$; число свободных клеток $20 - 8 = 12$.

Правило учета наименьших затрат. Снабдим каждую клетку двойным номером, совпадающим с индексами соответствующей этой клетке переменной (первый индекс совпадает с номером поставщика, второй – с номером потребителя). Например, клетка *(2.3)* стоит на пересечении 2-й строки и 3-го столбца. В таблице берем клетки, имеющие наименьший показатель затрат. Такой показатель, равный 1, находится в двух клетках: *(1.4)* и *(3.1)*.

Дадим поставку в клетку *(1.4).* Чтобы решить вопрос о величине этой поставки, заметим, что поставщик 1 располагает 100 ед. груза, а потребителю *4* требуется 75 ед. груза. Размер поставки определяется минимальным из этих двух чисел, т. е. в клетку *(1.4)* следует записать поставку, равную 75 ед. Потребитель *4,* получив сполна 75 ед. груза, может быть вычеркнут из таблицы, и на следующем этапе распределения таблица уже имеет размер 4×4, причем мощность поставщика 1 составляет уже 25 ед. груза.

Заполняем клетку *(3.1).* Учитывая, что min {75; 85} = 75, даем в эту клетку поставку, равную 75 ед. При этом заполнении из таблицы вычеркивается 3-я строка, а спрос потребителя 1 сокращается до 10 ед.

Следующий по величине показатель затрат, равный 2, стоит в клетках *(1.2)* и *(1.5),* клетки *(3.2)* и *(4.4)* в расчет не берутся, поскольку они стоят в вычеркнутых строке и столбце.

Учитывая, что у поставщика 1 осталось только 25 ед. груза, передаем этот груз в клетку *(1.2)* (min {25; 65} = 25) и вычеркиваем 1-ю строку. Клетки *(2.3), (2.5), (4.5)* имеют показатель затрат, равный 3 ед.

Таблица 23 – Распределение поставок по правилу учета наименьших затрат

	85	65	80	75	70
100	4	2 25	3	1 75	2
125	6	5	3 80	4	3 45
75	1 75	2	5	6	5
75	6 10	4 40	5	2	3 25

Дадим поставку в клетку *(2.3).* Размер этой поставки равен 80 ед. (min {80; 125} = 80). Из таблицы вычеркиваем 3-й столбец, а мощность поставщика 2 сократилась до 45 ед.

Эти 45 ед. груза передадим в клетку *(2.5)* и вычеркнем 2-ю строку. Недостающие потребителю 5 25 ед. груза возьмем у поставщика *4* и вычеркнем 5-й столбец.

Оставшиеся у поставщика *4* 50 ед. груза можно передать потребителям 1 или *2*.

Обеспечим прежде всего потребителя *2,* так как в клетке *(4.2)* стоит меньший показатель затрат, чем в клетке *(4.1)*. Но потребителю *2* требуются не все 50 ед. груза, а только 40, поэтому в клетку *(4.2)* записываем 40 ед. и вычеркиваем 2-й столбец, а оставшиеся 10 ед. груза помещаем в клетку *(4.1)*. После последней операции из таблицы вычеркнуты одновременно и 1-й столбец, и 4-я строка. Заметим, что только на последнем этапе произошло вычеркивание и строки, и столбца, а на предыдущих этапах передача поставки в какую-либо клетку сопровождалась вычеркиванием либо одного столбца, либо одной строки.

Получив распределение, подсчитаем количество заполненных клеток. Их оказалось 8, т. е. именно столько, сколько должно быть. Можно также убедиться, что по каждой строке и по каждому столбцу соблюден баланс, а именно от каждого поставщика запланирована отправка всего груза, которым он располагает, и каждому потребителю планируется то количество груза, в котором он нуждается.

Является ли полученное распределение оптимальным? Оставив пока этот вопрос открытым, познакомимся со вторым правилом первоначального распределения поставок.

Правило «северо-западного угла». В этом случае не обращают внимания на показатели затрат. Начав заполнение с клетки *(1.1)* – «северо-западного угла» таблицы, ступенями спускаются вниз до клетки *(k.l),* вычеркивая либо одну строку, либо один столбец. На последнем шаге вычеркиваются последняя *(k-я)* строка и последний (*l*-й) столбец. При практическом заполнении таблицы вычеркивание строк и столбцов производится лишь мысленно.

В таблице 24 дано первоначальное распределение поставок по правилу «северо-западного угла» для рассматриваемой задачи.

Таблица 24 – Распределение поставок по правилу «северо-западного угла»

	85	65	80	75	70
100	4 85	2 15	3	1	2
125	6	5 50	3 75	4	3
75	1	2	5 5	6 70	5
75	6	4	5	2 5	3 70

Количество заполненных клеток снова равно 8. Нетрудно показать, что первоначальное распределение поставок в таблице 23, выполненное по правилу «северо-западного угла», значительно хуже, чем распределение поставок в табл. 17.3, проведенное с учетом наименьших затрат. Для этого достаточно подсчитать и сравнить затраты на перевозки при этих первоначальных распределениях поставок. В самом деле, суммируя произведения показателя затрат на величину поставки, для распределений, приведенных в таблице 6.3 и 6.4, соответственно получим:

F_1 = 50 + 75 + 240+135 + 75 + 60 +160 + 75 = 870 ден. ед.,

F_2 = 340 + 30 + 250 + 225 + 25 + 420+10 + 210=1510 ден. ед.,

т. е. распределение поставок в таблице и 6.4значительно дальше отстоит от оптимального, чем распределение поставок в таблице 24 .

Когда осуществляется первоначальное распределение поставок, то не ставится цель получить оптимальное распределение. Достижению этой цели служат последующие этапы решения задачи. Они заключаются в переходах к новым распределениям поставок, пока не будет найдено оптимальное распределение поставок.

2.2.5.7 Перераспределение поставок

Рассмотрим снова таблице 23 и отметим, что в ней наряду с восемью заполненными клетками имеется 12 свободных клеток. Оставляя пока в стороне вопрос, выгодно это или нет, дадим поставку в одну из свободных клеток, например в клетку (1.1).

Очевидно, что помещение любой поставки в эту клетку нарушит баланс в 1-й строке и в 1-м столбце. Нарушенный баланс можно восстановить, если поставки в клетках *(1.2)* и *(4.1)* уменьшить на величину поставки, данной в клетку (1.1). При этом нарушается баланс во 2-м столбце, что можно восстановить, если прибавить эту поставку к поставке клетки *(4.2)*.

Таким образом, передача поставки в одну из свободных клеток ведет к изменениям поставок в некоторых заполненных клетках. В дальнейшем будем говорить, что происходит перераспределение поставок в цикле.

Циклом называется замкнутый многоугольник (вообще говоря, не выпуклый), сторонами которого являются горизонтальные и вертикальные отрезки, одна вершина которого совпадает со свободной клеткой, для которой образуется цикл, а все остальные – с заполненными клетками.

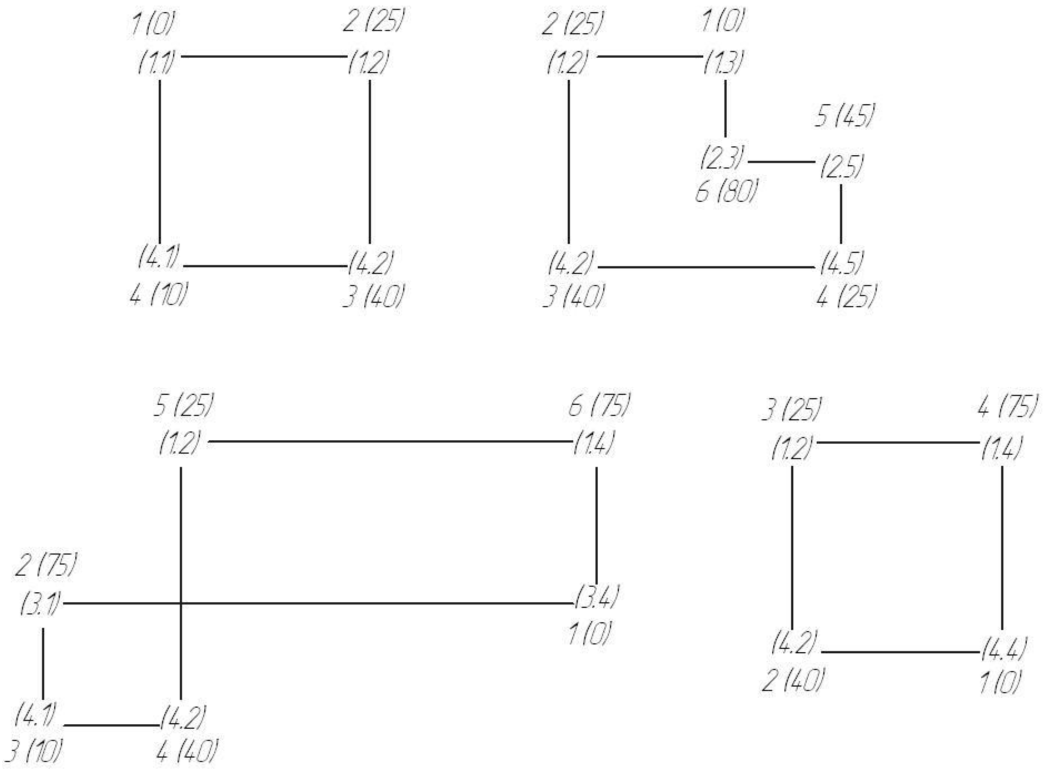


Рисунок 14 – Циклы для свободных клеток (1.1), (1.3), (3.4) и (4.4)

Если распределение в таблице таково, что заполнено ровно $k + l - 1$ клеток, то для каждой свободной клетки можно построить цикл, и притом единственный.

Например, на рисунке 6.1 изображены циклы для свободных клеток (1.1), *(1.3), (3.4)* и *(4.4)* таблице 23 *(циклы* для остальных свободных клеток рекомендуется построить самостоятельно).

Кроме номеров клеток цикла введем еще последовательную нумерацию клеток, начиная с той, для которой образован цикл, безразлично в каком направлении (по движению часовой стрелки или против). В скобках ря-номерами запишем поставки этих клеток, рядом с этими новыми взятые из таблицы 23.

Назовем нечетными клетки с номерами 1, 3, 5 и т. д., а четными – клетки с номерами 2, 4, 6 и т. д. (число четных клеток в любом цикле равно числу нечетных).

При перераспределении поставки по циклу она прибавляется ко всем поставкам нечетных клеток и вычитается из всех поставок четных клеток.

Так как число основных переменных (число заполненных клеток) должно сохраняться, то передача поставки в свободную клетку должна сопровождаться освобождением одной из клеток цикла.

Ясно, что будет освобождаться клетка с четным номером, имеющая наименьшую поставку. Выбор наименьшей поставки обусловлен тем, что все поставки должны быть неотрицательными.

В цикле, построенном для клетки *(1.1)*, минимальная поставка четных клеток равна 10 ед. груза. Если эту поставку передать клетке *(1.1)*, то в клетке *(1.2)* останется 15 ед., в клетке *(4.2)* окажется 50 ед., а клетка *(4.1)* станет свободной.

Для цикла, построенного для любой свободной клетки *(i.j),* можно вычислить оценку этого цикла $\boldsymbol{a_{ij}}$**,** равную разности между суммой показателей затрат нечетных клеток и суммой показателей затрат четных клеток цикла.

Например:

$a_{11} = (4 + 4) - (2 + 6) = 0$ – оценка цикла клетки *(1.1)*;

$a_{13} = (3 + 3 + 4) - (3 + 3 + 2) = 2$ – оценка цикла клетки *(1.3);*

$a_{14} = (2 + 2) - (1 + 4) = -1$ – оценка цикла клетки *(4.4);*

a_{31} = (6 – 6 – 6 + 2) – (1 + 4 + 1) =8 – оценка цикла клетки *(3.4)*.

Такие оценки можно подсчитать для циклов, построенных для всех свободных клеток.

Вычисление оценок четырех циклов позволяет сделать вывод о том, что эти оценки могут быть отрицательными (a_{14}). положительными (a_{13}, a_{31}) и нулевыми (a_{11}).

Если по аналогии с симплексным методом выразить функцию F, представляющую суммарные затраты на перевозки, через неосновные переменные (в транспортной задаче им соответствуют переменные свободных клеток), то коэффициенты при этих переменных в выражении F совпадут с оценками соответствующих циклов.

Так как требуется найти минимум функции F, то клетки, для которых оценка цикла отрицательна, являются выгодными и их следует перевести в основные (заполненные). Передача поставки в такую клетку приведет к уменьшению стоимости затрат на величину, равную произведению абсолютной величины оценки на размер поставки.

Например, перераспределение поставок в цикле для клетки *(4.4)* снизило бы затраты на 1 – 40 = 40 ден. ед. Перераспределение же поставок в цикле для клетки *(1.3)* увеличило бы эти затраты на 2×25 = 50 ден. ед. Передача поставки в клетку *(1.1)* не изменила бы стоимость затрат.

Отсюда можно сделать вывод, что клетка, имеющая отрицательную оценку цикла, является выгодной и ее следует заполнить, а клетка, имеющая положительную оценку, невыгодна. Свободная клетка, имеющая нулевую оценку, не является ни выгодной, ни невыгодной.

Построив циклы для всех свободных клеток данного распределения поставок и подсчитав оценки этих циклов, можно все свободные клетки разбить на выгодные и невыгодные. Среди выгодных клеток выбрать самую выгодную и перераспределить поставки в цикле для этой клетки, в результате перейти к новому распределению поставок.

З а м е ч а н и е. Самой выгодной клеткой окажется та, передача поставки в которую приведет к наибольшей экономии. Однако это не означает, что абсолютная величина отрицательной оценки цикла этой клетки является наибольшей. Ведь экономия зависит также от размера поставки, передвигаемой в цикле.

При первоначальной разработке распределительного метода предусматривалась именно такая схема поиска оптимального решения. Громоздкость этой схемы очевидна, поскольку на каждом шаге решения необходимо строить циклы для всех свободных клеток и подсчитывать оценки этих циклов. Поэтому появились различные модификации распределительного метода.

Циклы перераспределения поставок в разных транспортных задачах могут иметь самую различную конфигурацию. Кроме уже рассмотренных циклы могут иметь, например, вид, изображенный на рисунке 15.

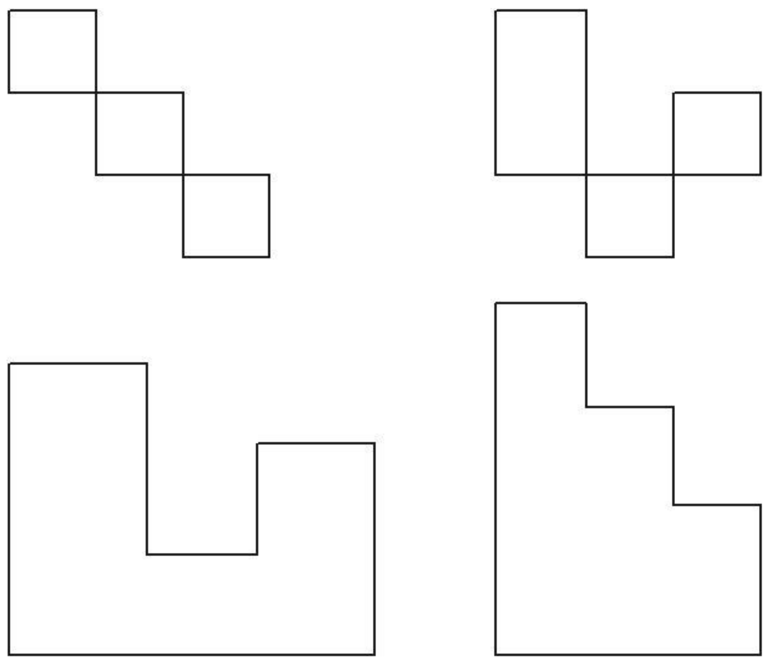


Рисунок 15 – Примеры циклов распределения поставок

Каждой клетке таблицы поставим в соответствие ее ***оценку,*** полученную как алгебраическую сумму показателя затрат клетки и соответствующих чисел, записанных в дополнительных строке и столбце, помещенных снизу и справа от таблицы. Эти числа подбираются таким образом, чтобы оценки заполненных клеток равнялись нулю. Оценки свободных клеток могут быть положительными, отрицательными или равными нулю.

Установление оценок для всех заполненных и свободных клеток означаем оценку данного распределения поставок.

Оценим, например, распределение поставок, приведенное в таблице 6.3. Для этого перепишем эту таблицу (табл. 25), снабдив ее дополнительными строкой и столбцом.

В 1-м столбце дополнительной строки запишем 0. Для того чтобы оценка в заполненной клетке *(3.1)* равнялась нулю, в 3-й строке дополнительного столбца нужно записать – 1.

В этом случае оценка клетки *(3.1)* действительно равна нулю (1 + 0 – 1)=0. Для обращения в ноль оценки клетки *(4.1)* нужно в 4-й строке дополнительного столбца записать -6. Далее в 5-ом столбце дополнительной строки запишем число 3 для получения нулевой оценки в клетке *(4.5),* во 2-й строке дополнительного столбца для получения нулевой оценки в клетке *(2.5)* — число — 6 и т. д., пока не заполним все столбцы дополнительной строки и все строки дополнительного столбца.

Таблица 25 – Перераспределение поставок

4	2 25	3	1 75	2	—4
6	5	3 80	4	3 45	—6
1 75	*2*	5	6	5	—1
6 10	4 40	5	2	3 25	—6
0	+2	+3	+3	+3	

Составим новую таблицу, в каждую клетку которой вместо показателя затрат запишем оценку.

Оценки всех заполненных клеток таблицы 26 равны нулю. Все свободные клетки, кроме клеток *(1.1), (2.1)* и *(4.4),* имеют положительные оценки.

Вернемся к оценкам циклов, которые были установлены и подсчитаны для циклов некоторых клеток в предыдущем параграфе.

Легко убедиться, что оценка цикла и оценка клетки совпадают. Таким образом, мы получим возможность вычислять оценки циклов, не строя сами циклы, и решать вопрос о выгодности или невыгодности той или иной свободной клетки с помощью оценки этой клетки.

Таблица 26 – Перераспределение поставок и оценка клеток

0	0 65	2	0 35	1	—1
0	1	0 80	1	0 45	
0 75	3	7	8	7	
0 10	0	2	—1 40	*0* 25	
	+1		+1		

Оценки, помещенные в табллице 6.6, свидетельствуют, что первоначальное распределение, приведенное в табл. 17.3 и 17.5, не является оптимальным, поскольку клетка *(4.4)* имеет отрицательную оценку и ее следует перевести в число заполненных. Цикл для этой клетки был изображен на рис. 42. Минимальная поставка в четных клетках этого цикла равна 40 ед. Эту поставку перераспределяем в цикле: в клетку *(4.4)* запишем эту поставку, из поставки клетки *(1.4)* вычтем, к поставке клетки *(1.2)* прибавим, а клетка *(4.2)* станет свободной. Поставки в остальных клетках таблицы не изменятся. Новое распределение поставок запишем в таблица 27.

Таблица 27 – Новое перераспределение поставок

-1 10	0 65	1	0 25	0	
0	2	0 80	2	0 45	
0 75	4	7	9	7	—1
0	1	2	0 50	0 25	
+ 1					

Для оценки вновь полученного распределения сделаем пересчет оценок, добиваясь, чтобы оценка во вновь заполненной клетке *(4.4)* обратилась в нуль. Для этого к 4-му столбцу табл. 17.6 прибавим 1. Однако эта операция «портит» нулевую оценку в клетке *(1.4)*. Чтобы этого не произошло, вычтем 1 из всех оценок 1-й строки. Для сохранения нулевой оценки в заполненной клетке *(1.2)* этой строки прибавим 1 к оценкам 2-го столбца.

Новые оценки запишем в таблице 28. Оценки этой таблицы свидетельствуют о том, что и полученное распределение не оптимально. Выгодной на этом шаге является клетка *(1.1)*. Цикл распределения для этой клетки изображен на рисунке 6.3.

Отметим, что в цикл для клетки (1.1) вовлечены другие клетки, нежели при первоначальном распределении поставок.

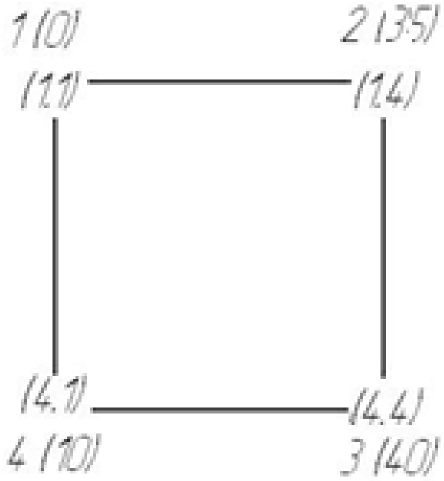


Рисунок 16 - цикл для клетки (1.1)

Минимальную поставку четных клеток, равную 10 ед., передвигаем в цикле. Новое распределение поставок запишем в таблице 28.

Таблица 29 – Оценки клеток

0	0	1	0	0
1	2	0	2	0
0	3	6	8	6
1	1	2	0	0

К оценкам 1-го столбца таблицы 28 прибавим 1, а из оценок 3-й строки вычтем 1. Полученные оценки поместим в таблицу 6.8.

Полученная таблица уже не содержит отрицательных оценок. Это является критерием того, что распределение поставок, полученное в таблице 28, является оптимальным.

Замечание. Наличие в таблице 29, не содержащей отрицательных оценок, нулевой оценки в незаполненной клетке *(1.5)* служит признаком того, что полученное оптимальное распределение поставок не является единственным. Можно перераспределить поставки в цикле для клетки *(1.5)* и получить еще одно оптимальное распределение поставок, но стоимость затрат при этом не изменится.

Для окончательного решения задачи следует вычислить минимальные затраты на перевозки. Для этого составим итоговую таблицу (таблица 30), в которую включим показатели затрат из таблицы 24 и оптимальное распределение поставок из таблицы 27.

Таблица 30 – Итоговая таблица

4 10	2 65	3	1 25	2
6	5	3 80	4	3 45
1 75	2	5	6	5
6	4	5	2 50	3 25

Находим F_{min} = 40 + 130 + 25 + 240 + 135 + 75 + 100 + 75 = 820 ден. ед. Значит, экономия по сравнению с первоначальным распределением поставок составляет 870 - 820 = 50 ден. ед. Этот же результа т можно получить и другим путем, если учесть, что передача поставки в клетку *(4.4)* дает экономию в 40 ден. ед., а в клетку *(1.1)* - 10 ден. ед.

2.2.3.8.Открытая модель транспортной задачи

Как было отмечено, если суммарная мощность поставщиков не равна суммарному спросу потребителей, т.е. $\sum_{i=1}^{k} M_i \neq \sum_{j=1}^{l} N_j$, то модель транспортной задачи называется открытой. Здесь возможны два случая:

а) объем мощностей поставщиков меньше суммарного спроса потребителей, т. е. $\sum_{i=1}^{k} M_i \prec \sum_{j=1}^{l} N_j$

б) объем мощностей поставщиков больше суммарного спроса потребителей, т. е. $\sum_{i=1}^{k} M_i \succ \sum_{j=1}^{l} N_j$. В том и в другом случае модель замыкают путем ввода или фиктивного поставщика, или фиктивного потребителя.

Чтобы замкнуть модель в случае а), вводят фиктивного поставщика, мощность которого принимается равной $\sum_{i=1}^{k} M_i - \sum_{j=1}^{l} N_j$. В качестве показателей затрат на перевозки от фиктивного поставщика можно взять любые числа, одинаковые по всей строке фиктивного поставщика. Однако проще всего взять их равными нулю.

После введения указанным образом фиктивного поставщика модель задачи становится закрытой и ее можно решать способом, изложенным в предыдущем пункте.

Следует только иметь в виду, что, считая число заполненных клеток равным $k + l - 1$, в число поставщиков нужно включить и фиктивного поставщика.

После того как будет найдено оптимальное распределение поставок, окажется, что некоторая часть потребностей одного или нескольких потребителей не может быть удовлетворена за счет мощностей реальных поставщиков.

В случае б) вводится фиктивный потребитель, спрос которого равен $\sum_{i=1}^{k} M_i - \sum_{j=1}^{l} N_j$. Показателями затрат в столбце фиктивного потребителя могут служить любые одинаковые числа, но лучше эти показатели взять равными нулю.

Покажем, как решаются задачи, первоначально имеющие открытую модель.

Пример 11. Найти оптимальное распределение поставок в следующей задаче:

Таблица 31 – Условие к примеру 11

Поставщики	Мощности поставщиков	Потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		45	35	55	65
1	40	4	1	3	5
2	60	2	2	3	7
3	90	4	3	5	3

Таблица 32 – Распределение поставок о оценка клеток

		45	35	55	65	
1	40	4	1 35	3 5	5	-2
2	60	2 10	2	3 50	7	-2
3	90	4 35	3	5	3 55	-1
Ф	10	0	0	0	0 10	-1
		0	+1	-1	+1	

Решение. Суммарная мощность поставщиков $\sum_{i=1}^{k} M_i =$ 190 ед., суммарный спрос потребителей $\sum_{j=1}^{l} N_j =$ 200 ед. Таким образом, спрос потребителей на 10 ед. превышает объем мощностей поставщиков. Введем фиктивного поставщика, записав ему мощность, равную 10 ед. Исходную таблицу дополняем еще одной строкой - строкой фиктивного поставщика. В новую таблицу (табл. 6.11) сразу же поместим дополнительные строку и столбец, чтобы записать в них числа, обращающие оценки заполненных клеток в нули. В этой же таблице проведено первоначальное распределение поставок с учетом наименьших затрат. Количество заполненных клеток соответствует норме: 4+4 - 1 = 7.

В таблице 32 оценивается первоначальное распределение поставок.

Таблица 33 – Распределение поставок

2	0 35	0 5	4	
2 20	1	0 40	6	
0 25	0	0	0 65	
- 1	0	- 2 10	0	+2

Как следует из таблицы 33, распределение поставок в таблице 33 не является оптимальным. Две клетки *(4.1)* и *(4.3)* имеют отрицательные оценки, поэтому они являются выгодными и в них следует дать поставки.

Будем придерживаться правила: давать поставку, прежде всего в клетку, имеющую наибольшую по абсолютной величине отрицательную оценку (даже если она и не является самой выгодной).

Так как клетка *(4.3)* имеет большую по абсолютной величине отрицательную оценку, то строим для нее цикл (рис. 6.4).

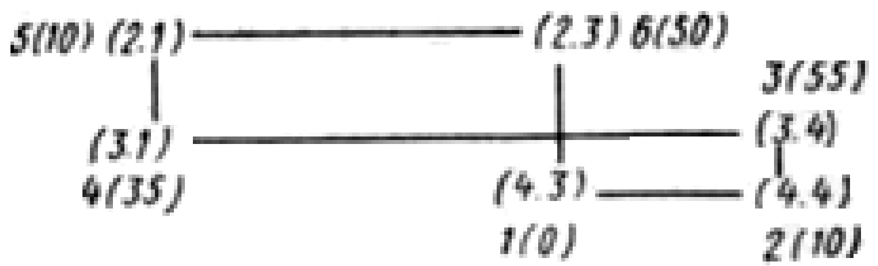


Рисунок 17 – Перераспределение поставок для клетки (4.3)

Минимальная поставка четных клеток равна 10, она находится в клетке *(4.4)*. Передвигаем эту поставку в 10 ед. в цикле. Новое распределение поставок запишем в таблицу 33.

Новое распределение оценивается в таблице 34.

Эта таблица уже не содержит отрицательных оценок, следовательно, распределение поставок, приведенное в таблице 33, - оптимальное. Так как нулевые оценки имеют и две свободные клетки, то оптимальное распределение не единственное.

При оптимальном распределении поставок потребитель *3* недополучит 10 ед. груза. Для подсчета минимальных затрат на перевозки составим итоговую таблицу (табл. 36).

Таблица 35 - Новое распределение поставок

2	0	0	4
0	1	0	6
0	0	0	0
1	2	0	2

Таблица 36 - Итоговая таблица

4	1 35	3 5	5
2 20	2	3 40	7
4 25	3	5	3

Таким образом - F_{min} = 35+15+40+120+100 + 195 = 505 ден. ед.

2.5.2.8. Алгоритм решения транспортной задачи

1. Определяют модель задачи. В случае открытой модели вводят или фиктивного потребителя (если спрос меньше предложения), или фиктивного поставщика (если спрос больше предложения). Спрос фиктивного потребителя устанавливают равным превышению предложения над спросом, а мощность фиктивного поставщика — превышению спроса над предложением. Затраты на перевозки к фиктивному потребителю или от фиктивного поставщика считают равными нулю (или произвольными, но одинаковыми).

2. По тому или иному методу составляют исходный (первоначальный) план распределения поставок: по правилу «северо-

западного угла» или с учетом наименьших затрат, заполняя при этом $k + l - 1$ клеток (k - число поставщиков, l - число потребителей). Если число заполненных клеток окажется меньше этого числа, то в недостающее число свободных клеток вводят нулевые поставки.

3. Оценивают полученное распределение поставок. Для этого в дополнительные строку и столбец таблицы вводят числа, приводящие к нулевым оценки заполненных клеток. Одно из этих чисел при этом выбирают произвольно (его принимают равным нулю), а остальные определяют однозначно. Подсчитывают оценки всех клеток, в том числе и свободных, как алгебраическую сумму показателя затрат клетки и соответствующих чисел из дополнительных строки и столбца. Полученные оценки записывают в следующую таблицу. Если среди оценок свободных клеток не окажется отрицательных, то полученное в предыдущей таблице распределение поставок является оптимальным. В противном случае (имеется хотя бы одна отрицательная оценка) оно не является оптимальным.

4. Для получения нового, улучшенного распределения поставок строят цикл перераспределения для клетки, имеющей наибольшую по абсолютной величине отрицательную оценку. Выполняют перераспределение поставок в цикле для этой клетки. По циклу перемещают наименьшую поставку четных клеток цикла. В ходе перераспределения поставок клетка, для которой образован цикл, получает поставку, а четная клетка, которой соответствовала наименьшая поставка, освобождается.

Если окажется, что освобождается несколько клеток (это происходит, если в несколько четных клетках цикла наименьшие поставки одинаковы), то освобождают только одну из таких клеток (любую), а остальные оставляют заполненными нулевыми поставками. Если наименьшая поставка в четных клетках цикла окажется равной нулю, то по циклу перераспределяют нулевую поставку. Это приводит к тому, что клетка, имевшая нулевую поставку, освобождается, а бывшая свободной клетка заполняется нулевой поставкой; поставки в остальных клетках такого цикла не изменятся. Новое распределение поставок записывают в таблицу, куда уже внесены оценки предыдущего распределения.

5. Производят пересчет оценок, обращая прежде всего в нуль оценку новой заполненной клетки. Если при этом «портятся» нулевые оценки в других заполненных клетках, то против соответствующих столбца или строки записывают специально подобранные числа.

6. Переходя от одной таблицы к другой, повторяют п. 3, 4, 5, пока на каком-то этапе в соответствующей таблице не окажется отрицательных оценок. Тогда распределение поставок в предыдущей таблице является оптимальным. Если в последней оценочной таблице нулевые оценки кроме заполненных клеток имеет хотя бы одна свободная клетка, то оптимальное распределение поставок не является единственным.

7. Вычисляют минимальные затраты на перевозки, для чего в итоговую таблицу записывают показатели затрат из таблицы, данной в условии задачи, и оптимальное распределение.

Приложение 1

Таблица значений функции $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
01	0040	33	1293	65	2422	97	3340
02	0080	34	1331	66	2454	98	3365
03	0120	35	1368	67	2486	99	3389
04	0160	36	1406	68	2517	1,00	3413
05	0199	37	1443	69	2549	01	3438
06	0239	38	1480	70	2580	02	3461
07	0279	39	1517	71	2611	03	3485
08	0319	40	1554	72	2642	04	3508
09	0359	41	1591	73	2673	05	3531
10	0398	42	1628	74	2703	06	3554
11	0438	43	1664	75	2734	07	3577
12	0478	44	1700	76	2764	08	3599
13	0517	45	1736	77	2794	09	3621
14	0557	46	1772	78	2823	10	3643
15	0596	47	1808	79	2852	11	3665
16	0636	48	1844	80	2881	12	3686
17	0675	49	1879	81	2910	13	3708
18	0714	50	1915	82	2939	14	3729
19	0753	51	1950	83	2967	15	3749
20	0793	52	1985	84	2995	16	3770
21	0832	53	2019	85	3023	17	3790
22	0871	54	2054	86	3051	18	3810
23	0910	55	2088	87	3078	19	3830
24	0948	56	2123	88	3106	20	3849
25	0987	57	2157	89	3133	21	3869
26	1026	58	2190	90	3159	22	3883
27	1064	59	2224	91	3186	23	3907
28	1103	60	2257	92	3212	24	3925
29	1141	61	2291	93	3238	25	3944
30	1179	62	2324	94	3264		
31	1217	63	2357	95	3289		

Продолжение приложения 1

X	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)	*x*	Ф(*x*)
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
27	3980	60	4452	93	4732	52	4941
28	3997	61	4463	94	4738	54	4945
29	4015	62	4474	95	4744	56	4948
30	4032	63	4484	96	4750	58	4951
31	4049	64	4495	97	4756	60	4953
32	4066	65	4505	98	4761	62	4956
33	4082	66	4515	99	4767	64	4959
34	4099	67	4525	2,00	4772	66	4961
35	4115	68	4535	02	4783	68	4963
36	4131	69	4545	04	4793	70	4965
37	4147	70	4554	06	4803	72	4967
38	4162	71	4564	08	4812	74	4969
39	4177	72	4573	10	4821	76	4971
40	4192	73	4582	12	4830	78	4973
41	4207	74	4591	14	4838	80	4974
42	4222	75	4599	16	4846	82	4976
43	4236	76	4608	18	4854	84	4977
44	4251	77	4616	20	4861	86	4979
45	4265	78	4625	22	4868	88	4980
46	4279	79	4633	24	4875	90	4981
47	4292	80	4641	26	4881	92	4982
48	4306	81	4649	28	4887	94	4984
49	4319	82	4656	30	4893	96	4985
50	4332	83	4664	32	4898	98	4986
51	4345	84	4671	34	4904	3,00	49865
52	4357	85	4678	36	4909	20	49931
53	4370	86	4686	38	4913	40	49966
54	4382	87	4693	40	4918	60	499841
55	4394	88	4699	42	4922	80	499928
56	4406	89	4706	44	4927	4,00	499968
57	4418	90	4713	46	4931	50	499997
58	4429	91	4719	48	4934	5,00	499997

Приложение 2

Таблица значения квантилей распределения Стьюдента

Число степеней-свободы	Доверительные вероятности				
	0.9	0.95	0.98	0.99	0.999
1	6.31375	12.7062	31.821	63.655898	636.578
2	2.91999	4.30266	6.96455	9.9249883	31.5998
3	2.35336	3.18245	4.54071	5.8408477	12.9244
4	2.13185	2.77645	3.74694	4.6040805	8.61008
5	2.01505	2.57058	3.36493	4.0321174	6.8685
6	1.94318	2.44691	3.14267	3.7074278	5.95872
7	1.89458	2.36462	2.99795	3.499481	5.40807
8	1.85955	2.30601	2.89647	3.3553806	5.04137
9	1.83311	2.26216	2.82143	3.2498428	4.78089
10	1.81246	2.22814	2.76377	3.1692616	4.58676
11	1.79588	2.20099	2.71808	3.1058153	4.43688
12	1.78229	2.17881	2.68099	3.054538	4.31784
13	1.77093	2.16037	2.6503	3.0122828	4.22093
14	1.76131	2.14479	2.62449	2.9768489	4.14031
15	1.75305	2.13145	2.60248	2.9467265	4.07279
16	1.74588	2.1199	2.58349	2.9207877	4.01487
17	1.73961	2.10982	2.56694	2.8982322	3.96511
18	1.73406	2.10092	2.55238	2.8784416	3.92174
19	1.72913	2.09302	2.53948	2.8609429	3.88332
20	1.72472	2.08596	2.52798	2.845336	3.84956
21	1.72074	2.07961	2.51765	2.8313661	3.8193
22	1.71714	2.07388	2.50832	2.8187605	3.79223
23	1.71387	2.06865	2.49987	2.8073373	3.76764
24	1.71088	2.0639	2.49216	2.7969509	3.74537
25	1.70814	2.05954	2.4851	2.7874376	3.72514
26	1.70562	2.05553	2.47863	2.7787246	3.70666
27	1.70329	2.05183	2.47266	2.7706847	3.68949
28	1.70113	2.04841	2.46714	2.7632632	3.67392
29	1.69913	2.04523	2.46202	2.7563874	3.65952
30	1.69726	2.04227	2.45726	2.7499846	3.64598
60	1.67065	2.0003	2.39012	2.660272	3.46015
120	1.65765	1.97993	2.35783	2.6174166	3.37342

Приложение 3

Таблица квантилей распределения хи-квадрат

к	*p*											
	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1	0,2	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1			0,001	0,004	0,016	0,064	1,642	2,706	3,841	5,024	6,635	7,879
2	0,010	0,020	0,051	0,103	0,211	0,446	3,219	4,605	5,991	7,378	9,210	10,60
3	0,072	0,115	0,216	0,352	0,584	1,005	4,642	6,251	7,815	9,348	11,35	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	1,064	1,649	5,989	7,779	9,488	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	1,610	2,343	7,289	9,236	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,237	1,635	2,204	3,070	8,558	10,65	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,239	1,690	2,167	2,833	3,822	9,803	12,02	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,344	1,646	2,180	2,733	3,490	4,594	11,03	13,36	15,50	17,54	20,09	21,96
9	1,735	2,088	2,700	3,325	4,168	5,380	12,24	14,68	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,156	2,558	3,247	3,940	4,865	6,179	13,44	15,99	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,603	3,053	3,816	4,575	5,578	6,989	14,63	17,28	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,074	3,571	4,404	5,226	6,304	7,807	15,81	18,55	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,565	4,107	5,009	5,892	7,042	8,634	16,99	19,81	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,075	4,660	5,629	6,571	7,790	9,467	18,15	21,06	23,69	26,12	29,14	31,32
15	4,601	5,229	6,262	7,261	8,547	10,31	19,31	22,31	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,142	5,812	6,908	7,962	9,312	11,15	20,47	23,54	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,697	6,408	7,564	8,672	10,09	12,00	21,62	24,77	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,265	7,015	8,231	9,390	10,87	12,86	22,76	25,99	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,844	7,633	8,907	10,12	11,65	13,72	23,90	27,20	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,434	8,260	9,591	10,85	12,44	14,58	25,04	28,41	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,034	8,897	10,28	11,59	13,24	15,45	26,17	29,62	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,643	9,542	10,98	12,34	14,04	16,31	27,30	30,81	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,260	10,20	11,69	13,09	14,85	17,19	28,43	32,00	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,886	10,86	12,40	13,85	15,66	18,06	29,55	33,20	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,52	11,52	13,12	14,61	16,47	18,94	30,68	34,38	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,16	12,20	13,84	15,38	17,29	19,82	31,79	35,56	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,81	12,88	14,57	16,15	18,11	20,70	32,91	36,74	40,11	43,19	46,96	49,64
28	12,46	13,56	15,31	16,93	18,94	21,59	34,03	37,92	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,12	14,26	16,05	17,71	19,77	22,48	35,14	39,09	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,79	14,95	16,79	18,49	20,60	23,36	36,25	40,26	43,77	46,98	50,89	53,67
35	17,19	18,51	20,57	22,47	24,80	27,84	41,78	46,06	49,80	53,20	57,34	60,27
40	20,71	22,16	24,43	26,51	29,05	32,34	47,27	51,81	55,76	59,34	63,69	66,77
45	24,31	25,90	28,37	30,61	33,35	36,88	52,73	57,51	61,66	65,41	69,96	73,17
50	27,99	29,71	32,36	34,76	37,69	41,45	58,16	63,17	67,50	71,42	76,15	79,49
55	31,73	33,57	36,40	38,96	42,06	46,04	63,58	68,80	73,31	77,38	82,29	85,75

Продолжение приложения 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
60	35,50	37,48	40,48	43,19	46,46	50,64	68,97	74,40	79,08	83,30	88,38	91,95
65	39,38	41,44	44,60	47,45	50,88	55,26	74,35	79,97	84,82	89,18	94,42	98,11
70	43,28	45,44	48,76	51,74	55,33	59,90	79,71	85,53	90,53	95,02	100,4	104,2
75	47,21	49,48	52,94	56,05	59,79	64,55	85,07	91,06	96,22	100,8	106,4	110,3
80	51,17	53,54	57,15	60,39	64,28	69,21	90,41	96,58	101,9	106,6	112,3	116,3
90	59,20	61,75	65,65	69,13	73,29	78,56	101,0	107,6	113,1	118,1	124,1	128,3
100	67,33	70,06	74,22	77,93	82,36	87,95	111,7	118,5	124,3	129,6	135,8	140,2

Приложение 4

Таблица критических значений Q-критерия
для различной доверительной вероятности p и числа измерений n

n	p		
	0.90	0.95	0.99
3	0.941	0.970	0.994
4	0.765	0.829	0.926
5	0.642	0.710	0.821
6	0.560	0.625	0.740
7	0.507	0.568	0.680
8	0.468	0.526	0.634
9	0.437	0.493	0.598
10	0.412	0.466	0.568

Приложение 5

Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551

Продолжение приложения 5

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0,0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 6

Пример расчёта с методикой обработки результатов исследований

1 Методика лабораторных исследований сошника с отражателем семян в семяпроводе

Лабораторные исследования сошника для подпочвенно-разбросного посева зерновых культур с отражателем семян в семяпроводе включала в себя исследования по обоснованию формирования потока семян в семяпроводе и определению дальности их полета, оптимального типа и геометрической формы распределителя семян, отвечающего существующим агротехническим требованиям, исследования по обоснованию оптимальных конструктивных параметров исследуемого сошника. Перечень приборов, инвентаря и оборудования, применяемых при лабораторных, лабораторно-полевых и полевых исследованиях средств механизации для посева зерновых культур.

1.1 Методика исследований по обоснованию оптимального типа и геометрической формы распределителя семян сошника с отражателем семян в семяпроводе

Для обеспечения максимально возможной равномерности распределения семян зерновых культур по площади рассева проводились исследования по определению оптимального типа и геометрической формы распределителя семян сошника. С этой целью были выбраны 7 основных типов распределителей семян, которые поочередно устанавливали в подлаповом пространстве сошника. Сошник для подпочвенно-разбросного посева с отражателем в семяпроводе состоит из плоскорежущей лапы 1 (рисунок П1), стойки 2, семяпровода 3 с отражателем 4.

Поверхность рассева 15 (рисунок П2) представляет собой липкую ленту, на которую нанесены учетные квадраты размером 5×5 см (рисунок П3). Движение приводной тележки 17 (рисунок П2) осуществляется с помощью электродвигателя 3 через мотор-редуктор 5 посредством цепной передачи 4 и системы полиспастов 1. Вал высевающего аппарата 11 катушечного типа приводится во вращение от электродвигателя 9 и многоступенчатого редуктора 7 с помощью цепных передач 8. Включение и отключение установки производится с пульта управления 16.

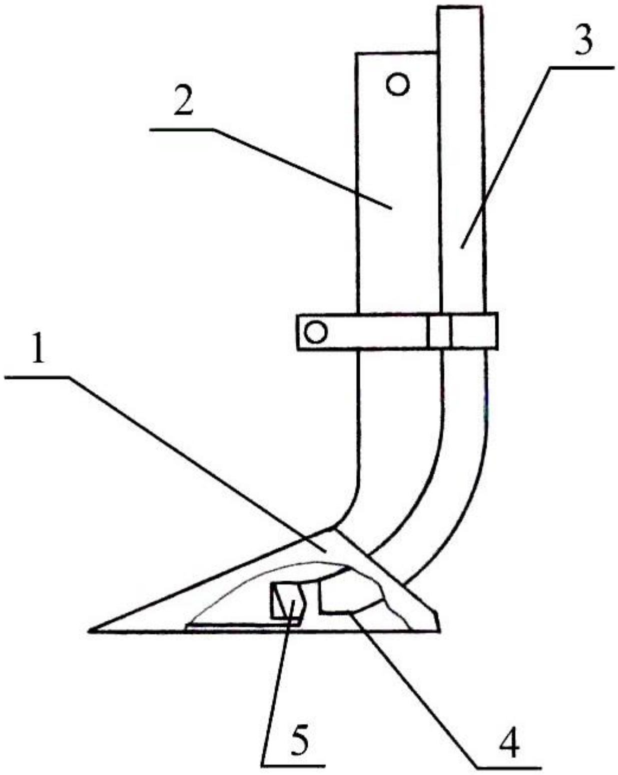


Рисунок П1 – Схема сошника с отражателем в семяпроводе: 1 – лапа; 2 – стойка; 3 – семяпровод; 4 – отражатель; 5 – распределитель семян

Экспериментальные исследования по определению оптимального распределителя семян проводились согласно ГОСТ 31345-2007 и ОСТ 10.5.1-2000 [22, 36, 76] на лабораторной установке (рисунок П2), состоящей из почвенного канала 2 и приводной тележки 17 с рамой. На приводную тележку 17 монтируется бункер 10 для семян, высевающий аппарат 11, семяпровод 13 и испытуемый сошник 14. Для приближения экспериментальных условий к реальным сошник 14 на приводную тележку 17 устанавливали таким образом, чтобы нижняя кромка лапы сошника 14 почти касалась поверхности рассева 15.

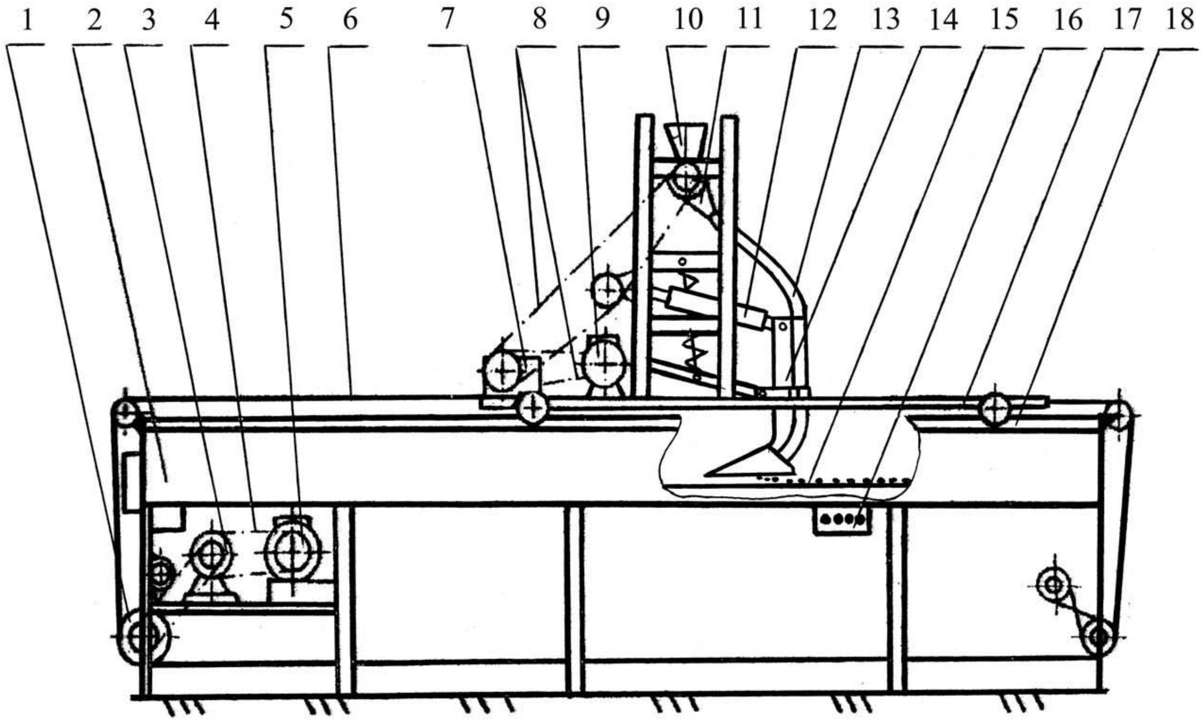


Рисунок П2 – Схема лабораторной установки для определения равномерности распределения семян зерновых культур по площади рассева: 1 – система полиспастов; 2 – почвенный канал; 3, 9 – электродвигатели; 4, 8 – цепные передачи; 5 – мотор-редуктор; 6 – гибкий трос; 7 – редуктор; 10 – бункер; 11 – высевающий аппарат; 12 – параллелограммный механизм; 13 – семяпровод; 14 – сошник; 15 – поверхность рассева; 16 – пульт управления; 17 – приводная тележка; 18 – направляющие почвенного канала

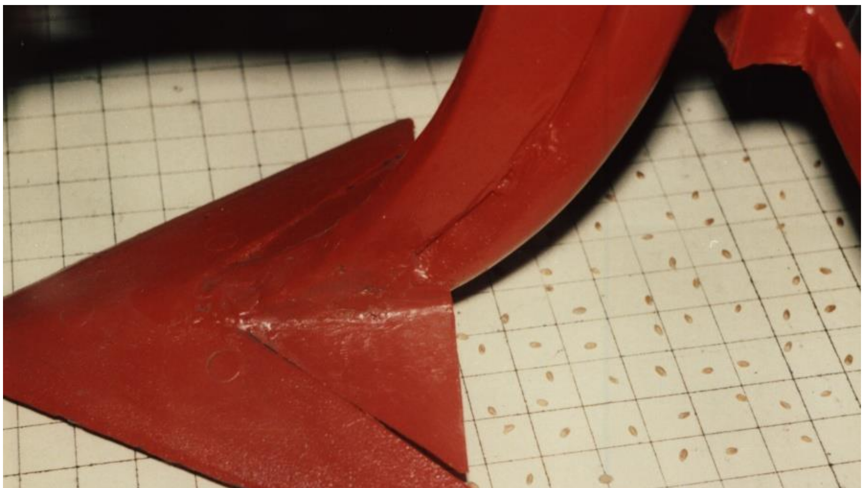


Рисунок П3 – Общий вид поверхности рассева

Распределитель семян типа А выполнен в виде половины цилиндра, рабочая поверхность которого наклонена под углом 80 град. к горизонтальной поверхности. Тип Б изготовлен в виде усеченной призмы, основание которой перпендикулярно горизонтальной поверхности, а боковые поверхности сделаны в виде прямоугольников. Распределитель семян типа В представляет собой пятигранную фигуру, две боковые грани которой образованы цилиндрическими поверхностями. Распределитель семян типа Г выполнен в виде разведенных в противоположные стороны в поперечно-горизонтальной плоскости двух симметричных по линии изгиба крыльев, причем крылья выполнены в виде прямоугольников.

Распределитель семян разработанной нами конструкции типа Д выполнен в виде разведенных в противоположные стороны в поперечно-горизонтальной плоскости двух симметричных по линии изгиба GH крыльев, причем крылья EFGHI и KLGHJ распределителя семян выполнены в виде параллелограммов, изогнутых по параболе (рисунок П4).

Основание ABCD распределителя семян расположено в вертикальной плоскости yz, симметрично и перпендикулярно оси x, нижняя DCKJIE и верхняя ABLGF поверхности распределителя – горизонтальны, а симметрично линии изгиба GH, в нижней его части, сделан срез HIJ под углом α=75…78 град. к нижнему основанию DCKJIE для обеспечения лучшего распределения семян в середине засеваемой полосы. Угол, на который разведены крылья EFGHI и KLGHJ в верхней части распределителя, равен углу развода крыльев EFGHI и KLGHJ в нижней его части, причем плоскости крыльев наклонены вперед по ходу движения сошника.

Распределитель семян типа Е изготовлен в соответствии с А.С. №1545976 А01 С7/20 и представляет собой полуконус, плоскость сечения которого направлена навстречу движению. Тип Ж аналогичен распределителю типа Е. Отличие заключается лишь в форме образующей конуса, в данном случае это парабола. Распределитель семян типа З выполнен в виде части сферы, которую образуют горизонтальная и вертикальная секущие плоскости.

Опыты проводят в следующей последовательности. Засыпают семенной материал в бункер (не менее ¾ от его общего объема) и производят пуск высевающего аппарата с целью заполнения его семенами. Далее закрепляют один из исследуемых распределителей семян в подсошниковом пространстве. С пульта управления одновременно включают как привод высевающего аппарата, так и тележки. Семена, проходя через высевающий аппарат и семяпровод, ударяясь о распределитель семян, укладываются на липкой ленте, на которой нанесены учетные квадраты размером 5×5 см.

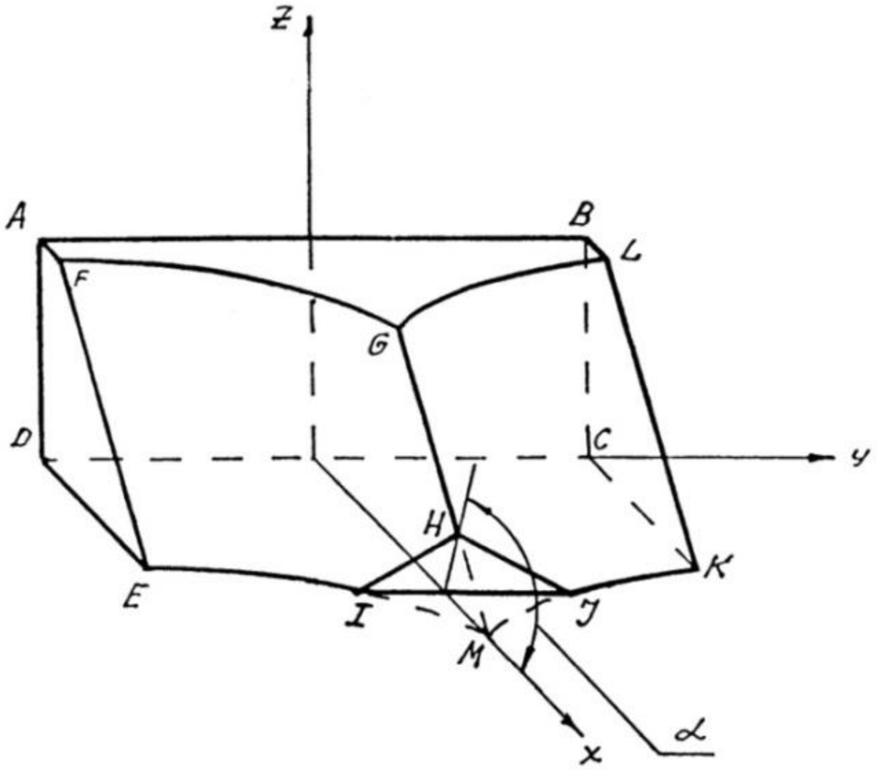


Рисунок П4 – Схема распределителя семян сошника с отражателем в семяпроводе

В соответствии с ОСТ 10.5.1-2000 и методикой Н.И. Любушко за критерии равномерности распределения семян по площади рассева были приняты коэффициент вариации и процент учетных квадратов с числом семян, равным нулю и единице. Основываясь на методику Н.И. Любушко, можно утверждать, что при использовании зерновых сеялок с катушечными высевающими аппаратами распределение семян по площади рассева при подпочвенно-разбросном посеве описывается законом Пуассона:

$$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda},$$

где λ – среднее число семян в отрезке; m – случайное число семян, считается, что 0!=1; e – основание натуральных логарифмов, e≈2,718.

Методика оценки распределения семян по площади рассева состоит в следующем. Вначале делают выборку квадратов с одинаковым числом семян или всходов ($W=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,n$) и подсчитывают их число n_w. Далее подсчитывают частоты квадратов по формуле

$$\overline{P} = \frac{n_w}{n},$$

где n_w – число семян, расположенных в квадратах по 0, 1, 2 и более зерен; n – общее число квадратов, подвергшихся учету (не менее 300 штук).

Находят среднюю плотность $\overline{m}$ – среднее число семян или всходов:

$$\overline{m} = \frac{N}{n},$$

где N – общее число семян в квадратах, шт.

Рассчитывают вариационные показатели: среднеквадратическое отклонение (σ), коэффициент вариации (ν), основную ошибку (ε) и показатель точности (P).

При оценке равномерности распределения семян необходимо знать, совпадают ли с оптимальными (расчетными) опытные частоты пустых квадратов и квадратов с одним растением. Для удобства сопоставления на рисунок П5 даны в виде номограмм зависимости вероятностей частот P_0 и P_1 от нормы высева с учетом полевой всхожести R в пределах от 70 до 100%. Зная исходную плотность высева $\overline{m}$ в штуках на один пятисантиметровый квадрат и определив значение R, можно определить оптимальные значения P_0 и P_1.

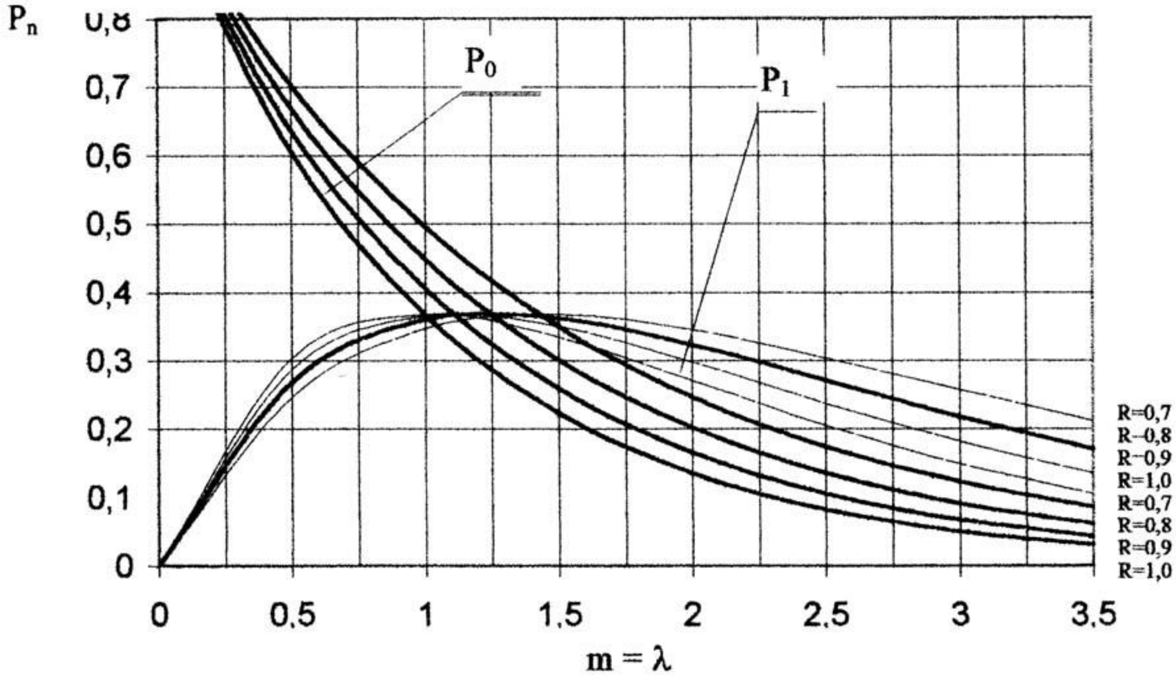


Рисунок П5 – Номограмма для определения зависимости частот квадратов с 0 и 1 семенем от нормы высева m и полевой всхожести R

Расчетные значения частот P_n' с учетом всхожести R определяются по следующим формулам:

$$\overline{m}' = \lambda' = R \cdot \overline{m};$$

$$P_0' = e^{-\lambda'} = e^{-R\overline{m}};$$

$$P_1' = R \cdot P_0';$$

$$P_2' = P_1' \frac{\lambda'}{2};$$

$$P_3' = P_2' \frac{\lambda'^3}{3};$$

$$P_{n\rangle 3}' = 1 - \sum_{n=0}^{n=3} P_n'.$$

Расчетные (оптимальные) значения частот сопоставляют с опытными и делают заключение о степени распределения семян по площади рассева в зависимости от типа распределителя. Повторность опытов по каждому типу распределителя семян пятикратная, количество учетных квадратов не менее 100. Опыты проводились при норме высева 225 кг/га, скорости перемещения сошника 2,5 м/с и установки катушечного высевающего аппарата на высоте, равной 0,95 м.

1.2 Методика исследования по обоснованию оптимальных конструктивных параметров сошника с отражателем в семяпроводе

При работе сошника ширина засеваемой им полосы зависит от множества факторов. Поэтому лабораторные исследования по обоснованию оптимальных конструктивных параметров сошника с отражателем в семяпроводе проводились с применением методики планирования многофакторного эксперимента на лабораторной установке, приведенной на рисунках П6 и П7.

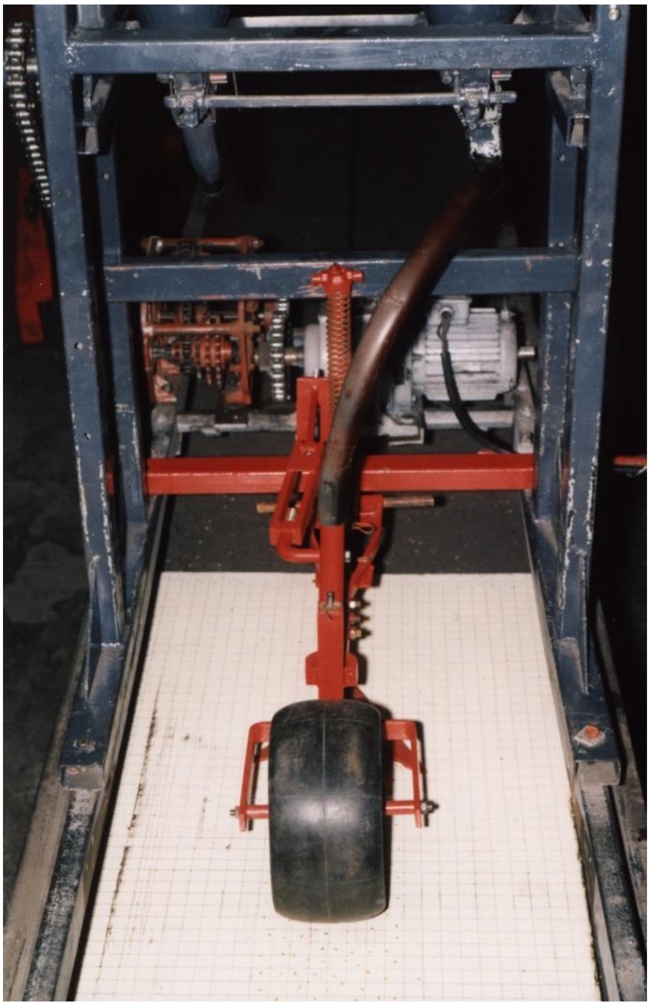


Рисунок П6 – Общий вид лабораторной установки для обоснования оптимальных конструктивных параметров сошника с отражателем в семяпроводе

Прежде чем планировать и проводить эксперимент, необходимо выбрать критерий оптимизации, то есть параметр, по которому оценивается исследуемый объект и который связывает факторы в математическую модель.

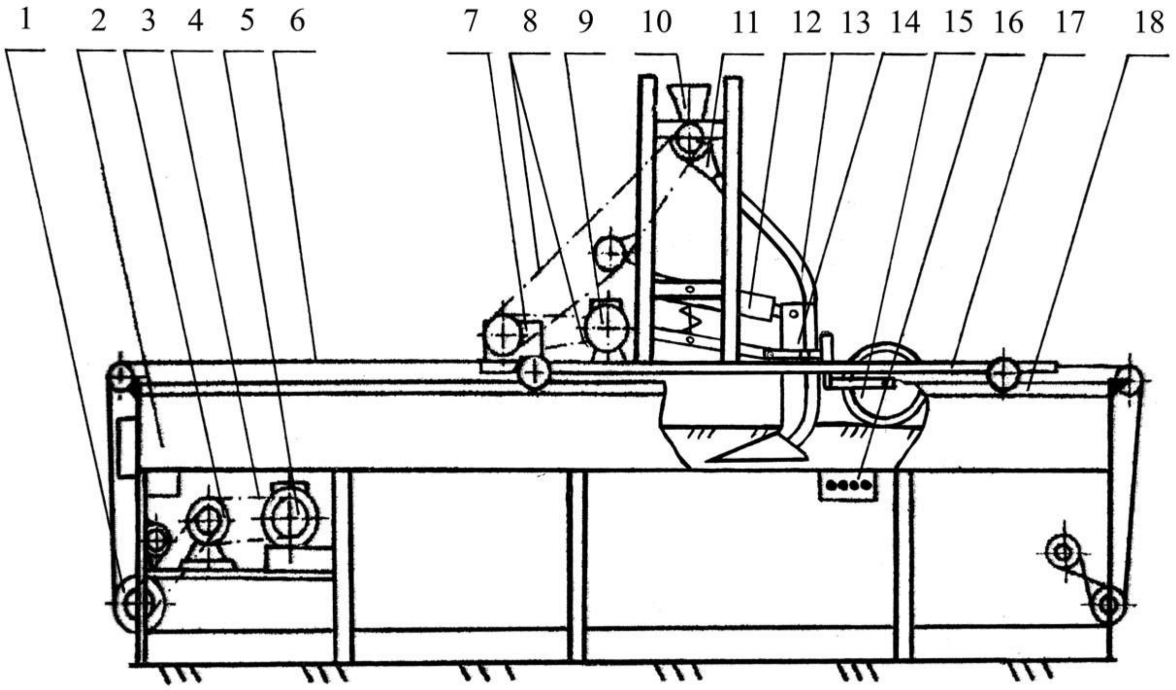


Рисунок П7 – Схема лабораторной установки для обоснования оптимальных конструктивных параметров сошника с отражателем в семяпроводе: 1 – система полиспастов; 2 – почвенный канал; 3, 9 – электродвигатели; 4, 8 – цепные передачи; 5 – мотор-редуктор; 6 – гибкий трос; 7 – редуктор;10 – бункер; 11 – высевающий аппарат; 12 – параллелограммный механизм; 13 – семяпровод; 14 – сошник; 15 – опорно-прикатывающий каток; 16 – пульт управления; 17 –приводная тележка; 18 – направляющие почвенного канала

В качестве критерия оптимизации при работе сошника был выбран коэффициент вариации (ν), который характеризует равномерность распределения семян по площади рассева на заданной глубине. С помощью априорного ранжирования нами были отобраны 7 основных факторов, влияющих на распределение семян по площади рассева: a – расстояние между распределителем семян и семяпроводом; α – угол наклона линии изгиба крыльев распределителя семян; H – высота установки отражателя от дна борозды; h – высота падения семян; R – радиус кривизны семяпровода; m – ширина распределителя семян; D – диаметр семяпровода. Значения величин h, R, m и D были приняты исходя из конструктивных соображений и данных лабораторных исследований. Их значения составили соответственно: h=0,95м; R=0,4м; m=0,05м и D=30 мм.

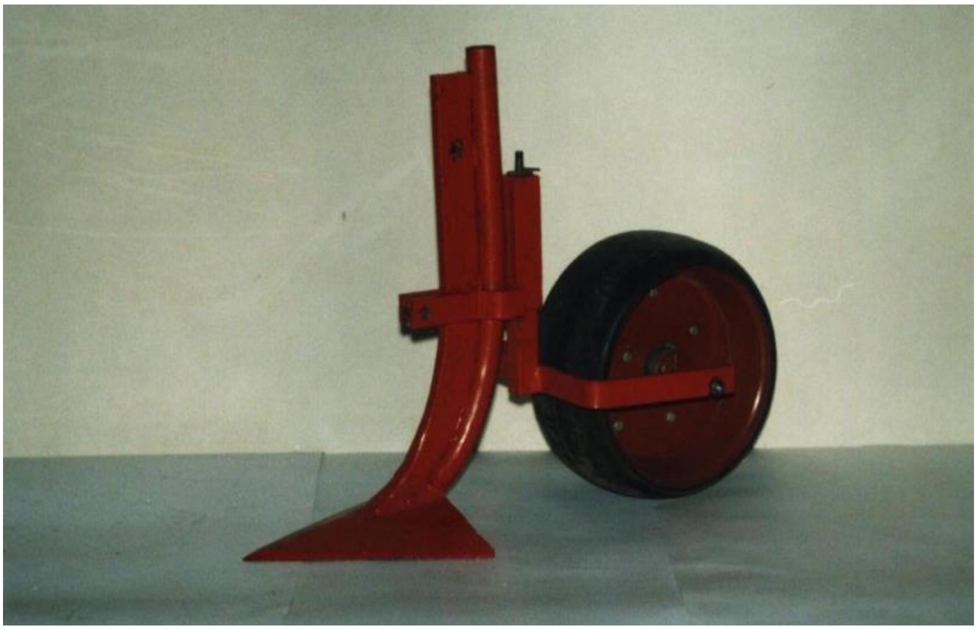


Рисунок П8 – Общий вид сошника с отражателем в семяпроводе для подпочвенно-разбросного посева семян сельскохозяйственных культур

Для описания поверхности отклика уравнением второго порядка использовали униформрототабельное планирование. Перед началом эксперимента факторы кодировали по формуле

$$x_i = \frac{X_i - X_{0i}}{\varepsilon},$$

где x_i – кодированное значение фактора (безразмерная величина), верхний уровень обозначается +1, а нижний -1 (в центре эксперимента будет нулевой уровень); X_i – натуральное значение фактора; X_{0i} – натуральное значение фактора на нулевом уровне; ε – натуральное значение интервала варьирования фактора.

Натуральное значение интервала варьирования фактора определяется по выражению

$$\varepsilon = \frac{X_i^{в} - X_i^{н}}{2},$$

где $X_i^{в}$ – значение фактора на верхнем уровне; $X_i^{н}$ – значение фактора на нижнем уровне.

Для решения поставленной задачи составляли план эксперимента, в котором назначили интервалы и уровни варьирования факторов (a – расстояние от распределителя семян до семяпровода; α – угол наклона линии изгиба крыльев распределителя семян; H – высота установки отражателя от дна борозды), которые приведены в таблице. Матрица планирования трехфакторного эксперимента униформрототабельного плана представлена в таблице.

Таблица – Интервалы и уровни варьирования

Показатели	Кодированное значение	Факторы и их обозначения			Функция отклика
		Расстояние между распределителем семян и семяпроводом – a, мм	Угол наклона линии изгиба крыльев распределителя семян – α, град.	Высота установки отражателя от дна борозды – H, мм	Равномерность распределения семян по поверхности рассева – ν, %
		X_1	X_2	X_3	Y
Верхний уровень	+1	12	78	31	-
Основной уровень	0	9	75	25	-
Нижний уровень	-1	6	72	19	-
Звездные точки	-1,682	4	70	15	-
	+1,682	14	80	35	-
Интервал варьирования	ε	3	3	6	-

Таблица – Матрица планирования трехфакторного эксперимента униформротатабельного плана

№ п/п	X_1	X_2	X_3	Y
1	-1	-1	-1	-
2	1	-1	-1	-
3	-1	1	-1	-
4	1	1	-1	-
5	-1	-1	1	-
6	1	-1	1	-
7	-1	1	1	-
8	1	1	1	-
9	-1,682	0	0	-
10	1,682	0	0	-
11	0	-1,682	0	-
12	0	1,682	0	-
13	0	0	-1,682	-
14	0	0	1,682	-
15	0	0	0	-
16	0	0	0	-
17	0	0	0	-
18	0	0	0	-
19	0	0	0	-
20	0	0	0	-

Запишем формулы, по которым будет осуществляться обработка результатов экспериментов:

а) среднее арифметическое значение равномерности распределения семян по поверхности рассева

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{n},$$

где $\sum X$ – сумма всех вариантов замеров; n – число замеров,

б) стандартное отклонение S определяется как

$$S = \sqrt{\frac{\sum\left(X - \overline{X}\right)^2}{n-1}},$$

в) коэффициент вариации равномерности распределения семян по поверхности рассева находится по формуле

$$\nu = \frac{S}{\overline{X}} \cdot 100\% .$$

Полученные в ходе проведения эксперимента результаты обрабатывались с использованием прикладной программы «STATISTIKA».

По результатам трехфакторного эксперимента определяли функцию отклика:

$$y = f(x_1, x_2, x_3).$$

В закодированном виде уравнение регрессии представится в виде:

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + b_{33}x_3^2 +$$
$$+ b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3.$$

В раскодированном виде уравнение (4.16) запишется как

$$\nu = b_0 + b_1a + b_2\alpha + b_3H + b_{11}a^2 + b_{22}\alpha^2 + b_{33}H^2 +$$
$$+ b_{12}a\alpha + b_{13}aH + b_{23}\alpha H.$$

Расчет коэффициентов регрессии проводится по выражениям

$$b_0 = a_1\sum^{u}\bar{y}_u - a_2\sum_{i=2}^{n}\sum^{u}x_i^2\bar{y}_u ;$$

$$b_i = a_3\sum^{u}x_{iu}\bar{y}_u ;$$

$$b_{ij} = a_4\sum^{u}x_{iu}x_{ju}\bar{y}_u ;$$

$$b_{ii} = a_5\sum^{u}x_{iu}^2\bar{y}_u + a_6\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_u - a_2\sum^{u}\bar{y}_u ,$$

где a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 и a_6 – коэффициенты, равные соответственно 0,1663; 0,0568; 0,0732; 0,12500; 0,0625 и 0,0069.

После определения коэффициентов регрессии необходимо проверить их значимость по формуле

$$\pm\Delta b_i = b_i - \beta = \pm t \cdot S_{bi}^2 ,$$

где t – табличное значение t критерия со степенью свободы равной $f=N\cdot(n_0-1)$; S_{bi}^2 – дисперсия для коэффициентов регрессии, которая найдется из следующих выражений:

$$S^2(b_0) = a_1 S^2(\bar{y});$$

$$S^2(b_i) = a_3 S^2(\bar{y});$$

$$S^2(b_{ij}) = a_4 S^2(\bar{y});$$

$$S^2(b_{ii}) = (a_5 - a_6)\cdot S^2(\bar{y}),$$

где S_y^2 – дисперсия воспроизводимости, рассчитываемая по формуле

$$S_y^2 = \frac{1}{N}\sum_{u=1}^{N} S_u^2,$$

где S_u^2 – дисперсия каждого опыта, определяемая как

$$S_u^2 = \frac{1}{r-1}\sum_{\nu=1}^{r}\left(y_{u\nu} - \bar{y}_u\right)^2,$$

где r – количество повторностей опыта; $\bar{y}_u$ – среднее значение выходного параметра.

$$\bar{y}_u = \frac{1}{r}\sum_{\nu=1}^{r} y_{u\nu}.$$

Чтобы проверить адекватность полученной модели, необходимо вычислить F-критерий Фишера из соотношения

$$F = \frac{S_{LF}^2}{S_y^2} = \frac{S_{LF}}{f_{LF}} : \frac{SS_E}{f_E},$$

где SS_E – сумма квадратов, связанная с дисперсией ошибки опыта; SS_{LF} – сумма квадратов, связанная с дисперсией неадекватности; f_E и f_{LF} – число степеней свободы, связанных соответственно с дисперсией ошибки опыта и дисперсией неадекватности.

Сумма квадратов SS_E, связанная с дисперсией ошибки опыта, рассчитывается по формуле

$$SS_E = \sum_{u=1}^{n}\left(y_{0u} - \bar{y}_0\right)^2, \text{ при } f_E=n_0-1.$$

Сумма квадратов, связанная с дисперсией неадекватности, определится по выражению

$$S_{LF} = SS_R - SS_E,$$

где SS_R – остаточная сумма квадратов, связанная с остаточной дисперсией.

Следует отметить, что число степеней свободы, связанных с дисперсией неадекватности, вычисляется по формуле

$$f_{LF} = N - \frac{(n+2)(n+1)}{2} - (n_0 - 1).$$

Остаточная сумма квадратов, связанная с остаточной дисперсией, рассчитывается как

$$SS_R = \sum_{u=1}^{N} \left(\bar{y}_u - \hat{y}_u \right)^2,$$

где y_u – среднее значение критерия оптимизации в u-ом опыте при k повторностях; y_u – значение критерия оптимизации, вычисленное по уравнению регрессии; n – число факторов: 0, 1, 2, ..., n.

Если расчетное значение критерия Фишера получилось меньше табличного, то модель можно считать адекватной с принятой степенью вероятности. При получении адекватной математической модели второго порядка необходимо определить координаты оптимума и изучить свойства поверхности в окрестностях оптимума. Для этого проводится каноническое преобразование полученных математических моделей. Для анализа и систематизации уравнения второго порядка приводятся к канонической форме:

$$Y - Y_S = B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2,$$

где Y – значение критерия оптимизации; Y_S – значение критерия оптимизации в оптимальной точке; X_1, X_2 – новые оси координат, повернутые относительно старых x_1, x_2; B_{11}, B_{22} – коэффициенты регрессии в канонической форме.

При каноническом преобразовании уравнений производится перенос начала координат в новую точку S и поворот старых осей на некоторый угол в факторном пространстве, в результате чего исчезают линейные члены и изменяется значение свободного члена. Чтобы осуществить перенос начала координат в особую точку поверхности отклика, необходимо продифференцировать функцию отклика по каждой переменной и приравнять к нулю частные производные. Далее, решая полученную систему уравнений, находят значения факторов, оптимизирующие величину критерия оптимизации.

Для определения коэффициентов в канонической форме необходимо решить характеристическое уравнение:

$$f(B)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}b_{12}(b_{11}-D)\\ \frac{1}{2}b_{12}(b_{22}-B)\end{vmatrix}=B^2-(b_{11}+b_{22})B+\left(b_{11}b_1-\frac{1}{4}b_{12}^2\right)=0.$$

Угол поворота β определяется из выражения

$$tg2\beta=\frac{b_{ij}}{b_{ii}-b_{jj}}.$$

После канонического преобразования и определения вида поверхности отклика проводится ее анализ с помощью двухмерных сечений. Для этого, придавая различные значения критерию оптимизации в каноническом уравнении, строится серия кривых равного выхода (изолиний) в области допустимых значений варьирования независимых переменных. Рассмотрение двухмерных сечений дает наглядное представление о значениях критерия оптимизации.

По результатам исследований формирования потока семян и определения траекторий полета семян, обработки опытных данных строили графики зависимостей ширины потока семян *B*, толщины потока семян *T*, и дальности полета семян *L* от высоты установки отражателя *H* от дна борозды (рисунок П9, П10, П11).

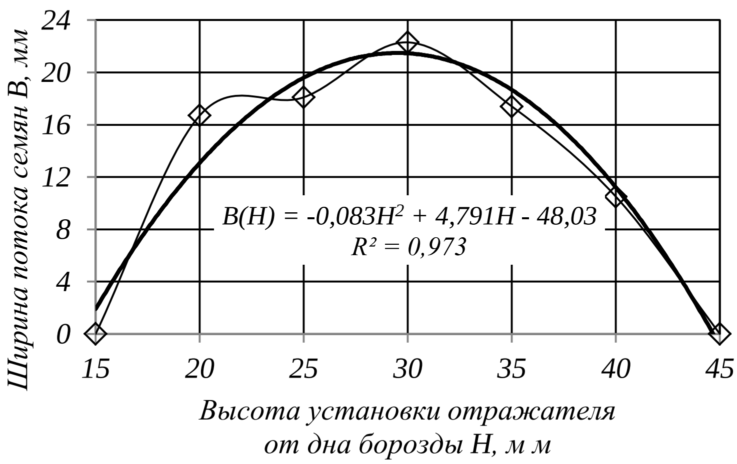


Рисунок П9 – Зависимость ширины потока семян (B) от высоты установки отражателя от дна борозды (H)

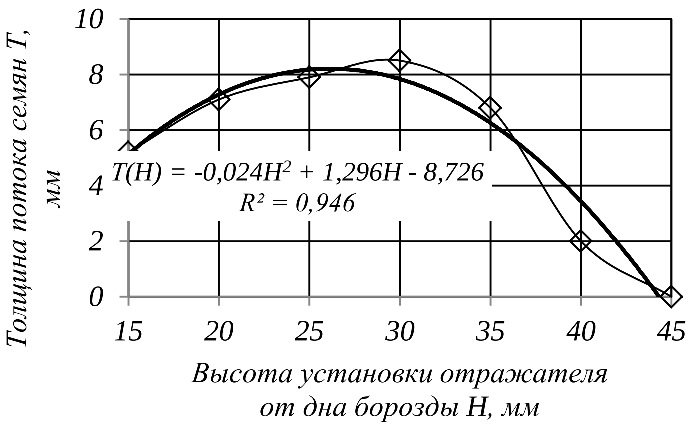


Рисунок П10 – Зависимость толщины потока семян (T) от высоты установки отражателя от дна борозды (H)

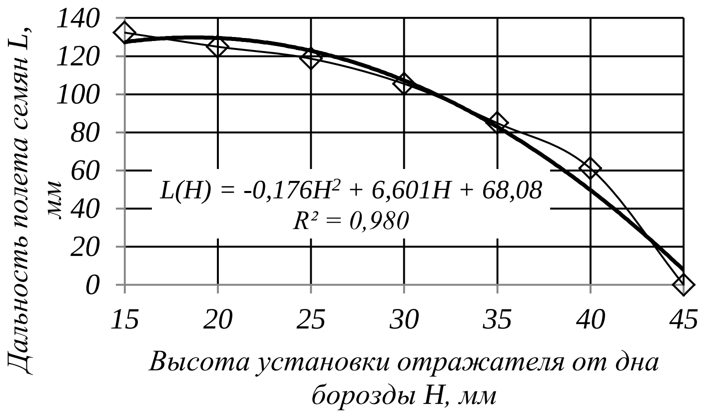


Рисунок П11 – Зависимость дальности полета семян (L) от высоты установки отражателя от дна борозды (H)

В ходе проведения исследований установили, что корреляционная связь ширины потока семян B и высоты установки отражателя H выражается уравнением вида

$$B(H) = -0,083H^2 + 4,791H - 48,03,$$

при индексе корреляции $R^2=0,973$.

Корреляционная связь толщины потока T и высоты установки отражателя от дна борозды H описывается выражением

$$T(H) = -0,024H^2 + 1,296H - 8,726,$$

при индексе корреляции $R^2 = 0,946$.

Высота установки отражателя H и дальность полета семян L связаны зависимостью

$$L(H) = -0,176H^2 + 6,601H + 68,08,$$

при индексе корреляции $R^2 = 0,980$.

Анализ полученных зависимостей показывает, что оптимальные значения исследуемых параметров, обеспечивающих формирование наилучшего потока семян *B*=20…35 мм и дальность их полета L=125…130 мм, достигаются при установке отражателя в пределах *H*=18…29 мм, то есть ниже горизонтального диаметра выходного отверстия семяпровода.

Результаты и анализ исследования по обоснованию оптимального типа и геометрической формы распределителя семян сошника с отражателем семян в семяпроводе

Обработанные данные проведенного исследования по выбору оптимального типа распределителя семян представлены в виде вероятностных кривых распределения семян по площади рассева для всех типов распределителей семян (рисунок П12, П13). По оси абсцисс указано количество семян в учетных квадратах 5×5 см, а по оси ординат – частоты их появления (в процентах). Для удобства сопоставления опытных значений коэффициенты вариации (ν), частота появления квадратов без семян (P_0) и частота появления квадратов с числом семян, равным 1 (P_1).

Рисунок П12 – Вероятностные кривые распределения семян по площади рассева в зависимости от типа распределителя семян

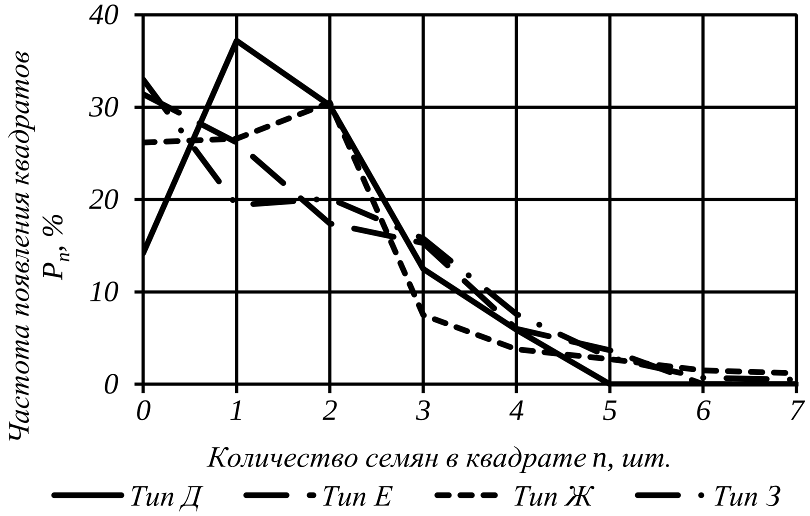


Рисунок П13 – Вероятностные кривые распределения семян по площади рассева в зависимости от типа распределителя семян

Таблица – Результаты исследований по выбору оптимального типа распределителя семян

Показатели	Тип распределителя семян								Оптимальное значение, при m=1,56
	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	
Частота квадратов с числом семян 0, %	26,2	24,6	22,8	21,8	14,2	31,4	26,2	33,0	не более 25%
Частота квадратов с числом семян 1, %	30,2	29,4	27,6	35,4	37,2	26,2	26,6	19,4	не менее 34%
Коэффициент вариации, %	94,4	83,9	81,4	84,7	61,7	94,4	92,3	90,4	0

Рассматривая данные таблицы, следует отметить, что допустимое количество пустых квадратов обеспечивали распределители семян типов *Б*, *В*, *Г* и *Д*, частота появления пустых квадратов которых соответственно равнялись 24,6%; 22,8%; 21,8% и 14,2%, при максимально допустимом значении 25%. Однако у распределителей семян типа *Б* и *В* наблюдался низкий показатель частот появления квадратов с одним семенем, соответственно 29,4% и 27,6%, тогда как оптимальное значение должно быть не менее 34%. Следовательно, можно сделать вывод о том, что тип *Б* и *В* нельзя считать оптимальным. Распределители семян типов *А*, *Е*, *Ж* и *З* также не удовлетворяли предъявляемым к ним требованиям. Наилучшие показатели имел распределитель семян типа *Д*, которому соответствовали наименьший коэффициент вариации, характеризующий распределение семян по площади рассева, – 61,7%, частота появления пустых квадратов 14,2% (при допустимом значении 25%) и квадратов с одним семенем – 37,2%. Кроме того, суммарная частота квадратов с числом семян одно и два равнялась 67,4%, то есть больше половины учетных квадратов находились в интервале среднего арифметического значения m=1,56. Таким образом, для дальнейших исследований целесообразно использовать распределитель семян типа Д.

Исследованиями также установлено, что изменение скорости движения сошника в диапазоне от 1,5 до 2,5 м/с не приводит к существенным изменениям равномерности распределения семян.

Результаты и анализ исследования по обоснованию оптимальных конструктивных параметров сошника с отражателем в семяпроводе

После обработки результатов многофакторного эксперимента по обоснованию оптимальных конструктивных параметров сошника для подпочвенно-разбросного посева зерновых культур с отражателем в семяпроводе получили адекватную математическую модель второго порядка, которая описывает зависимость вида $v=f(a, \alpha, H)$ в закодированном виде:

$$y=67,563-0,679x_1-0,724x_2+0,498x_3-0,609x_1x_2+0,811x_1x_3-$$
$$-6,334x_2x_3+ +5,221x_1^2+2,953x_2^2+5,657x_3^2.$$

Для определения значения факторов, обеспечивающих оптимальное значение коэффициента вариации, решали систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx_1} = 10{,}442x_1 - 0{,}609x_2 + 0{,}811x_3 - 0{,}679 = 0, \\ \dfrac{dy}{dx_2} = -0{,}609x_1 + 5{,}906x_2 - 6{,}334x_3 - 0{,}724 = 0, \\ \dfrac{dy}{dx_3} = 0{,}811x_1 - 6{,}334x_2 + 11{,}314x_3 + 0{,}498 = 0. \end{cases}$$

При решении данной системы определили, что оптимальные значения параметров после раскодирования равны: расстояние между распределителем семян и семяпроводом *a=8,8 мм*, угол наклона линии изгиба крыльев распределителя семян α*=74,9 град.*, высота установки отражателя на выходе из семяпровода *H=24,6 мм*.

После получения значений факторов необходимо было изучить поверхности отклика в зоне оптимальных значений факторов с помощью сечений поверхности отклика. Для этого приравняли к нулю фактор x_2 и подставили его в уравнение:

$$y=66,563-0,679x_1+0,498x_3+0,811x_1x_3+5,221x_1^2+5,657x_3^2.$$

Далее составили систему дифференциальных уравнений, которые представляют собой частные производные по каждому из факторов

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx_1} = 10{,}442x_1 + 0{,}811x_3 - 0{,}679 = 0, \\ \dfrac{dy}{dx_3} = 0{,}811x_1 + 11{,}314x_3 + 0{,}498 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, определили координаты центра поверхности отклика в закодированном виде: $x_1=0,069$, $x_3=-0,049$ (соответственно после раскодирования *a=9,2 мм* и *H=24,7 мм*).

После канонического преобразования уравнение приняло следующий вид:

$$Y-67,489=5,221x_1^2+5,657x_3^2 .$$

Угол поворота осей нашли как

$$tg2\beta = \frac{0{,}811}{5{,}221 - 5{,}657},$$

откуда β*=30,8* град.

Аналогично приравнивали к нулю фактор x_3 и подставляли его в уравнение, получили

$$y=67,563-0,679x_1-0,724x_2-0,609x_1x_2+5,221x_1^2+2,953x_2^2.$$

Решая систему дифференциальных уравнений, нашли координаты центра поверхности отклика:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx_1}=10,442x_1-0,609x_2-0,679=0, \\ \dfrac{dy}{dx_2}=-0,609x_1+5,906x_2-0,724=0. \end{cases}$$

Координаты центра поверхности отклика в закодированном виде имели значения: $x_1=0,39$, $x_2=0,219$. После раскодирования они составили: $a=9,4$ *мм* и $\alpha=75,8$ *град*.

После канонического преобразования уравнение приняло вид

$$Y\text{-}66,414=5,221x_1^2+2,953x_2^2.$$

Угол поворота осей составил:

$$tg2\beta=\frac{-0,609}{5,221-2,953}.$$

Откуда β=*7,5град*.

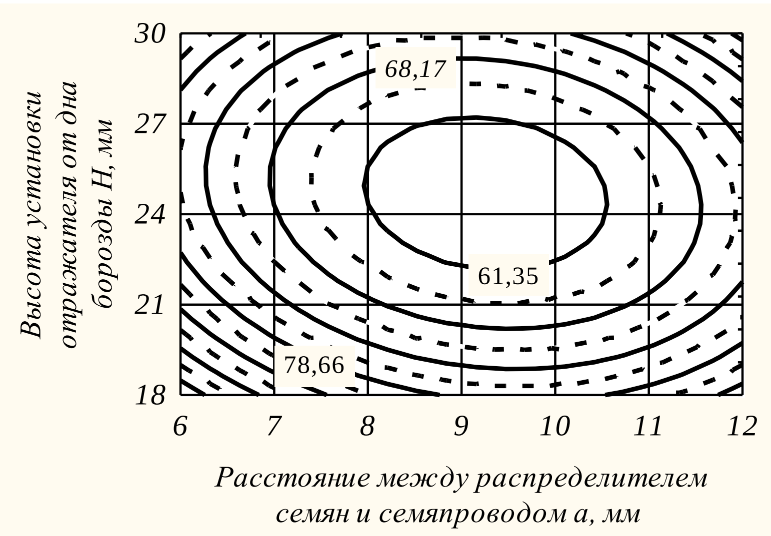


Рисунок П14 – Сечение поверхности отклика, характеризующее зависимость равномерности распределения семян зерновых культур (ν) от расстояния между распределителем семян и семяпроводом (а) и высоты установки отражателя от дна борозды (H)

В результате чего получили сечения поверхности отклика (рисунок П14, П15), устанавливающие зависимость коэффициента вариации (v), характеризующего распределение семян зерновых культур по площади рассева на заданной глубине от расстояния между распределителем семян и семяпроводом (a), а также угла наклона линии изгиба крыльев распределителя семян (α) и высоты установки отражателя от дна борозды (H).

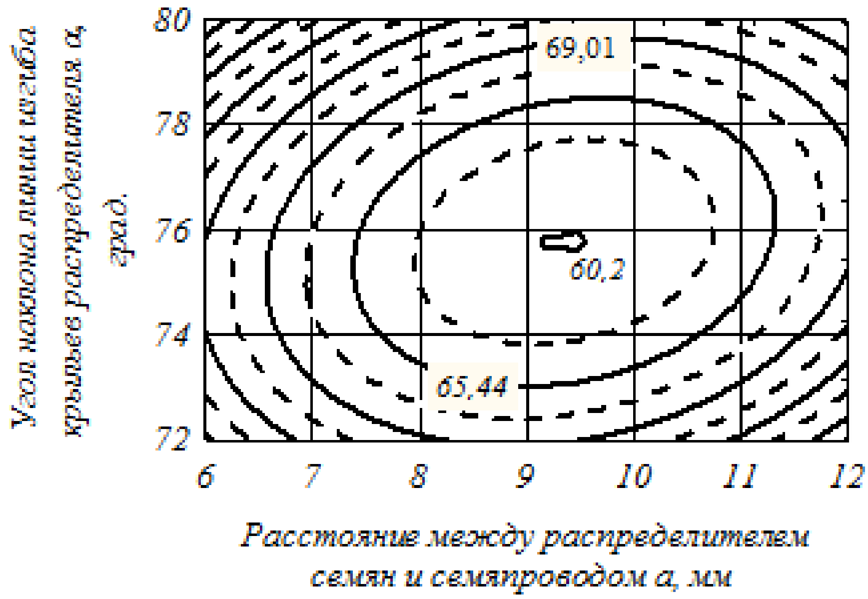


Рисунок П15 – Сечение поверхности отклика, характеризующее зависимость равномерности распределения семян зерновых культур (v) от расстояния между распределителем семян и семяпроводом (a) и угла наклона линии изгиба крыльев распределителя семян (α)

Анализируя графическое изображение двумерных сечений, можно сделать вывод, что оптимальные значения исследуемых факторов сошника с отражателем в семяпроводе находились в интервалах: a=8…10 мм, α=74…78 град., H=21…27 мм, при этом коэффициент вариации (v) составлял 59…62%.

Для использования уравнения в инженерных расчетах удобнее представить его в раскодированном виде:

$$v=1381{,}992-6{,}804a-40{,}038\alpha+18{,}143H-0{,}068a\alpha+0{,}045aH-$$
$$-0{,}352\alpha H+0{,}585a^2+0{,}328\alpha^2+0{,}159H^2.$$

Литература

1. Апаев, Р.Х. Агротехнические требования предъявляемые к предпосевной обработке почвы / Р.Х. Апаев, В.В. Шумаев // Вклад молодых ученых в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Международной научно-практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. -199-201.
2. Арефьев, А.В. Оценка значимости уравнения регрессии, его коэффициентов, коэффициента детерминации / А.В. Арефьев, В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов Всероссийской научно- практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2015. – С. 103-104.
3. Арефьев, А.В. Физико-механические свойства семян немчиновская-24 / А.В. Арефьев, В.В. Шумаев // Вклад молодых ученых в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – С. -193-194.
4. Бучма, А.В. Методика определения гранулометрического состава минеральных удобрений / А.В. Бучма, В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2012. С.- 104-105.
5. Бучма, А.В. Результаты по определению размеров гранулированных минеральных удобрений «Амофоска» / А.В. Бучма, В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2012. С.- 103-104.
6. Бучма, А.В. Сошник для ленточного разноуровневого внесения минеральных гранулированных удобрений и семян / А.В. Бучма, В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 3. – Пенза: РИО ПГСХА, 2013. – С. -67-68.
7. Гордеев, А.С. Моделирование в агроинженерии. Мичуринский государственный аграрный университет, 2007 – 220 с.

8. Кухмазов, К.З. Методы исследований и испытаний сельскохозяйственных машин и оборудования в условиях механизации сельского хозяйства Т. 1. Оценка безопасности и эргономичности конструкций сельскохозяйственной техники: учебное пособие / К.З. Кухмазов, А.И. Зябиров, В.В. Шумаев – Пенза: РИО ПГСХА, 2015. – 120 с.

9. Ларюшин, Н. П. Лабораторные исследования сошника сеялки-культиватора с бороздообразующим рабочим органом / Н.П. Ларюшин, А.В. Мачнев, В.В. Шумаев // Нива Поволжья. – 2008. – №3.– С. 32-33.

10. Ларюшин, Н. П. Лабораторные исследования сошника со сводообразующими косынками для подпочвенно-разбросного посева зерновых культур / Н.П. Ларюшин, В.В. Шумаев // Нива Поволжья. – 2014. – № 2 (31).– С. 70-75.

11. Ларюшин, Н. П. Полевые исследования сошника сеялки-культиватора ССВ-3.5 / Н.П. Ларюшин, А.В. Мачнев, В.В. Шумаев // Нива Поволжья. – 2009. – №1.– С. 74-76.

12. Ларюшин, Н. П. Сеялка сплошного высева с комбинированными сошниками / Н.П. Ларюшин, А.В. Мачнев, В.В. Шумаев // Тракторы и сельхозмашин. – 2011. – №2.– С. 11-12.

13. Ларюшин, Н.П Теоретические основы расчета рабочих органов посевных машин: монография/ Н.П. Ларюшин, А.В. Шуков, В.В. Шумаев – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – 228 с.

14. Ларюшин, Н.П Технология и средство механизации посева сельскохозяйственных культур комбинированным сошником разноуровневого внесения удобрений и распределения семян. Теория, конструкция, расчет: монография/ Н.П Ларюшин, В.В. Шумаев, А.В. Бучма.– Пенза: РИО ПГСХА, 2015. –181 с.

15. Ларюшин, Н.П. Исследование катушечного высевающего аппарата с увеличенным объемом желобков / Н.П. Ларюшин, В.В. Шумаев, А.В. Шуков // Нива Поволжья. – 2015. – № 3(36).– С. 108-113.

16. Ларюшин, Н.П. Обоснование горизонтального расстояния между рыхлительным зубом и лапой сошника / Н.П. Ларюшин, А.В. Мачнев, В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: Сб. материалов научной конференции. – Пенза: РИО ПГСХА, 2009. – С. 84-85.

17. Мавлюдов, И.Н. Педагогическая практика: методические рекомендации / И.Н. Мавлюдов, А.В. Поликанов, В.В. Шумаев – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – 31 с.

18. Математика: методические указания и задания к самостоятельной работе. Часть 1 / В.В. Шумаев, Т.Г.Федина. – Пенза: РИО ПГСХА, 2012. – 87 с.

19. Математика: методические указания и задания к самостоятельной работе / А.И. Бобылев, В.В. Шумаев. – Пенза: РИО ПГСХА, 2013. – 88 с.

20. Мачнев, А.В. Обоснование конструктивных схем сошников зерновых сеялок / А.В. Мачнев, В.В. Шумаев, А.М. Ларин // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: Сб. материалов Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.- 158-160.

21. Мачнев, А.В. Сеялка-культиватор ССВ-3,5 для ресурсосберегающих технологий посева зерновых культур / А.В. Мачнев, В.В. Шумаев, А.В. Шуков // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: Сб. материалов Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.- 189-191.

22. Мачнев, А.В. Современные посевные машины для посева по ресурсосберегающим технологиям / А.В. Мачнев, В.В. Шумаев, А.М. Ларин // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: Сб. материалов Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.- 146-148.

23. Муленков, Е.В. Анализ способов посева семян зерновых культур с одновременным внесением удобрений / Е.В. Муленков, В.В. Шумаев // Вклад молодых ученых в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Международной научно-практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. -186-188.

24. Муленков, Е.В. Математическая статистика при испытаниях сошников / Е.В. Муленков, В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов международной научно-

практической конференции.– Том 3 – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 145-146.

25. Муленков, Е.В. Методика проведения лабораторные исследования сошника со сводообразующими косынками / Е.В. Муленков, В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов международной научно-практической конференции.– Том 3 – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 80-82.

26. Муленков, Е.В. Новый сошник сеялки-культиватора для разбросного высева семян и удобрений / Е.В. Муленков, В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов международной научно-практической конференции.– Том 3 – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 53-56.

27. Муленков, Е.В. Результаты лабораторных исследований по определению оптимальных параметров сводообразующими косынок сошника / Е.В. Муленков, В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов международной научно-практической конференции.– Том 3 – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 88-90.

28. Нагуськина, Ю.В. Классификация сошников зерновых сеялок / Ю.В. Нагуськина, А.В. Шуков, В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов Всероссийской научно- практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2015. – С. 64-66.

29. Обоснование оптимальных параметров сошника для разноуровневого внесения удобрений и распределения семян / В.Н. Кувайцев, Н.П. Ларюшин, В.В. Шумаев, А.В. Бучма // Техника и оборудование для села. – 2014. – № 7.– С. 7-9.

30. Полевые исследования технологического процесса работы ячеисто-дискового высевающего аппарата / В.Н. Кувайцев, Н.П. Ларюшин, А.В. Шуков и др. // Нива Поволжья. – 2016. – №4 (41). – с. 102–108.

31. Полевые исследования технологического процесса работы ячеисто-дискового высевающего аппарата с цилиндрами на упругодеформируемом кольце / Н.П. Ларюшин, В.Н. Кувайцев,

С.Д. Загудаев и др.// Современные проблемы науки и техники. – 2013. – №4.– С. 366.

32. Посевные машины: Теория, конструкция, расчёт. Монография / Н.П. Ларюшин, А.В. Мачнев, В.В. Шумаев и др. – М.: Росинформагротех, 2010. – 292 с.

33. Прикладная математика: учебное пособие / В.В. Шумаев. – Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – 101 с.

34. Результаты лабораторных исследований высевающего аппарата / Н.П. Ларюшин, В.Н. Кувайцев, С.Д. Загудаев и др.// «Фундаментальные исследования». – №10-1. – 2013. – С. 140-144.

35. Результаты лабораторных исследований высевающего аппарата с цилиндрами на упругодеформируемом кольце / В.Н. Кувайцев, Н.П. Ларюшин, А.В. Шуков и др. // Нива Поволжья. – 2016. – № 2 (39).– С. 78-82.

36. Результаты полевых исследований экспериментальной сеялки ССВ-3,5 / В.Н. Кувайцев, Н.П. Ларюшин, В.В. Шумаев и др. // Техника и оборудование для села. – 2014. – № 9.– С. 14-17.

37. Славутский, Л.А. Основы регистрации данных и планирования эксперимента. Учебное пособие: Изд-во ЧГУ, Чебоксары, 2006, 200 с.

38. Сошник сеялки-культиватора для подпочвенного разбросного посева зерновых культур / Н.П. Ларюшин, А.В. Мачнев, В.В. Шумаев, И.Д. Салдаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: Сб. материалов 55-ой научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.-139.

39. Теоретические и экспериментальные исследования новых рабочих органов сеялки: Теория, конструкция, расчет. Монография / Н.П Ларюшин, В.Н. Кувайцев, А.В. Шуков, В.В. Шумаев. – Пенза: РИО ПГСХА, 2013. – 184 с.

40. Теоретические и экспериментальные исследования процесса посева семян зерновых культур комбинированным сошником сеялки-культиватора: Теория, конструкция, расчет. Монография / Н.П Ларюшин, А.В. Мачнев, В.В. Шумаев. – Пенза: РИО ПГСХА, 2012. – 125 с.

41. Теоретические исследования комбинированного сошника для одновременного разноуровневого внесения удобрений и

посева семян / Н.П. Ларюшин, В.Н. Кувайцев, А.В. Бучма, В.В. Шумаев // Нива Поволжья. – 2014. – № 1(30).– С. 82-88.

42. Теоретические исследования сошника для подпочвенно-разбросного посева с направителем-распределителем семян / Н.П. Ларюшин, В.А. Мачнев, А.В. Мачнев и др. // Нива Поволжья. – 2012. – №4.– С. 32-33.

43. Теоретические исследования сошника с бороздообразующим рабочим органом / Н.П. Ларюшин, А.В. Мачнев, В.В. Шумаев // Нива Поволжья. – 2010. – №1.– С. 58-61.

44. Теоретические исследования сошника со сводообразавателями / В.Н. Кувайцев, Н.П. Ларюшин, В.В. Шумаев // Нива Поволжья. – 2014. – № 3(32).– С. 61-66.

45. Теоретические исследования технологического процесса работы ячеисто-дискового высевающего аппарата с цилиндрами на упругодеформируемом кольце / Н.П. Ларюшин, В.Н. Кувайцев, С.Д. Загудаев и др. // Нива Поволжья. – № 3. – 2013. – С. 89-94.

46. Шуков, А.В. Выбор конструкций высевающего аппарата сеялки / А.В. Шуков, В.В. Шумаев // Образование, наука, практика: инновационный аспект: Сб. материалов международной научно-практической конференции посвящённой 60-летию ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА». - Пенза: РИО ПГСХА, 2011. С.- 96 – 99.

47. Шуков, А.В. Производственные испытания сеялки-культиватора ССВ-3.5 / А.В. Шуков, В.В. Шумаев // Образование, наука, практика: инновационный аспект: Сб. материалов международной научно-практической конференции посвящённой 60-летию ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА». - Пенза: РИО ПГСХА, 2011. С.- 94-96.

48. Шумаев, В.В. Анализ средств механизации внутрипочвенного внесения минеральных удобрений / В.В. Шумаев, А.В. Бучма, А.С. Бочкарёв // Инновационные идеи молодых исследователей для АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 3.- Пенза: РИО ПГСХА, 2012. С.- 69-72.

49. Шумаев, В.В. Движение падающего тела ударяющегося о наклонную плоскость / В.В. Шумаев, А.В. Бучма // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: сборник ма-

териалов Всероссийской научно-практической конференции. – Пенза: РИО ПГСХА, 2013. – С. -200-201.

50. Шумаев, В.В. Исследование сошника сеялки-культиватора с бороздообразующим рабочим органом / В.В. Шумаев // Ресурсосберегающие технологии и технические средства для производства продукции растениеводства и животноводства: сборник материалов Международной научно-практической конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – С. 219-223.

51. Шумаев, В.В. Исследование функциональной и принципиальной схем сошника для разноуровневого внесения семян и удобрений / В.В. Шумаев, А.В. Шуков // Образование, наука, практика: инновационный аспект: Сб. материалов международной научно-практической конференции посвящённой 60-летию ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА». - Пенза: РИО ПГСХА, 2011. С.- 157-159.

52. Шумаев, В.В. Исследования влияния лапового сошника на равномерность посева /В.В. Шумаев, А.В. Мачнев, Н.П. Ларюшин// Инновации молодых учёных - агропромышленному комплексу: Сб. материалов научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2007. С.-119-121.

53. Шумаев, В.В. Исследования сошника для подпочвенно-разбросного посева зерновых культур с сводообразующими косынками / В.В. Шумаев // Образование, наука, практика: инновационный аспект: Сб. материалов международной научно-практической конференции посвящённой 60-летию ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА». - Пенза: РИО ПГСХА, 2011. С.-164-168.

54. Шумаев, В.В. Исследования сошника разноуровневого внесения удобрений / В.В. Шумаев // Вклад молодых ученых в аграрную науку: сборник материалов Международной научно-практической конференции. - Кинель: РИЦ СГСХА, 2015. – С. 320-324.

55. Шумаев, В.В. Исследования сошника с сводообразующими косынками для подпочвенно-разбросного посева зерновых культур / В.В. Шумаев // Вклад молодых ученых в аграрную науку: сборник материалов Международной научно-практической конференции. - Кинель: РИЦ СГСХА, 2015. – С. 324-329.

56. Шумаев, В.В. К выбору типа бороздообразующего рабочего органа сошника сеялки-культиватора / В.В. Шумаев // Роль почвы в сохранении устойчивости агроландшавтов: Сб. материалов материалов Всероссийской науч.-практ. конф., посв. памяти профессора Г.Б. Гальдина. - Пенза: РИО ПГСХА, 2008. С.-110-111.

57. Шумаев, В.В. К определению сгруживания почвы при работе двугранного клина / В.В. Шумаев, А.В. Бучма // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – С. -134-136.

58. Шумаев, В.В. К определению тягового сопротивления стрельчатой лапы сошника зависящее от динамического давления пласта / В.В. Шумаев // Образование, наука, практика: инновационный аспект: Сб. материалов международной научно-практической конференции посвящённой 60-летию ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА». - Пенза: РИО ПГСХА, 2011. С.-168-171.

59. Шумаев, В.В. Кинематические аспекты движения зубьев и лап/ В.В. Шумаев, А.С. Петряев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса: Сб. материалов научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2009. С.-126-127. (0,18)

60. Шумаев, В.В. Классификация способов внесения минеральных удобрений и их классификация / В.В. Шумаев, А.В. Бучма, А.С. Бочкарёв // Инновационные идеи молодых исследователей для АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 3.- Пенза: РИО ПГСХА, 2012. С.- 66-69.

61. Шумаев, В.В. Комбинированный агрегат для посева и обработки почвы с новыми сошниками / В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2012. С.- 105-108.

62. Шумаев, В.В. Конструкция и анализ работы сошниковой группы сеялок / В.В. Шумаев, А.В. Шуков, А.Н. Калабушев // Актуальные проблемы аграрной науки и пути их решения: сборник научных трудов. - Кинель: РИЦ СГСХА, 2016. – С. 323-327.

63. Шумаев, В.В. Лабораторные исследования сошника с сводообразующими косынками для подпочвенно-разбросного посева зерновых культур / В.В. Шумаев, А.В. Арефьев// Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Пенза: РИО ПГСХА, 2013. – С. -183-185.

64. Шумаев, В.В. Логарифмическая спираль−стандарт биологических объектов разной природы / В.В. Шумаев, Т.Г. Федина, С.С. Соболев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: Сб. материалов 55-ой научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.-164.

65. Шумаев, В.В. Математическая трактовка конечных однородных деформации в двух измерениях / В.В. Шумаев, Т.Г. Федина, А.А. Додонова // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: Сб. материалов 55-ой научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.-179-182.

66. Шумаев, В.В. Математические зависимости при испытаниях на сжатие / В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов Всероссийской научно- практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2015. – С. 57-58.

67. Шумаев, В.В. Математические исследования влияния конструкции комбинированного сошника для ресурсосберегающих технологий на себестоимость продукции / В.В. Шумаев // Машиностроение России: инновационно- технологические и организационно-экономические проблемы развития: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции / МНИЦ ПГСХА. - Пенза: РИО ПГСХА, 2013. – С. 98-101.

68. Шумаев, В.В. Математические модели кинетики биосинтеза продуктов метаболизма как функции от удельной скорости роста / В.В. Шумаев, Т.Г. Федина, М.С. Двойникова // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: Сб. материалов 55-ой научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.-184.

69. Шумаев, В.В. Математический аппарат при определении активного слоя винтовой катушки сеялки для ресурсосберегаю-

щих технологий с целью снижения себестоимости продукции / В.В. Шумаев // Машиностроение России: инновационно- технологические и организационно-экономические проблемы развития: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции / МНИЦ ПГСХА. - Пенза: РИО ПГСХА, 2013. – С. 102-105.

70. Шумаев, В.В. Математическое моделирование при определение нормы внесения минеральных удобрений / В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов международной научно-практической конференции.– Том 3 – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 147-148

71. Шумаев, В.В. Математическое моделирование проекта распределения земельных участков / В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов международной научно-практической конференции.– Том 3 – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 156-158.

72. Шумаев, В.В. Методика проведения лабораторных испытаний нанеравномерность внесения гранулированных минеральных удобрений / В.В. Шумаев, А.В. Бучма // Инновационные идеи молодых исследователей для АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 3. – Пенза: РИО ПГСХА, 2013. – С. -69-70.

73. Шумаев, В.В. Методика проведения лабораторных испытаний на равномерность высева /В.В. Шумаев, А.В. Мачнев, Н.П. Ларюшин// Инновации молодых учёных - агропромышленному комплексу: Сб. материалов научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2007. С.-121-123.

74. Шумаев, В.В. Некоторые параметры влияющие на равномерность распределения семян / В.В. Шумаев, Т.Г. Федина, И.Д. Салдаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: Сб. материалов 55-ой научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.-166.

75. Шумаев, В.В. Некоторые физико-механические свойства семян картофеля / В.В. Шумаев, А.В. Шуков // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: Сб. материалов

Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.- 191-192.
76. Шумаев, В.В. О возможности использования дифференциальной схемы внесения семян и удобрений в почву / В.В. Шумаев, А.В. Шуков // Образование, наука, практика: инновационный аспект: Сб. материалов международной научно-практической конференции посвящённой 60-летию ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА». - Пенза: РИО ПГСХА, 2011. С.-161-164.
77. Шумаев, В.В. О необходимости одновременного посева и внесения минеральных удобрений / В.В. Шумаев, А.В. Бучма, А.С. Бочкарёв // Инновационные идеи молодых исследователей для АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 3.- Пенза: РИО ПГСХА, 2012. С.- 64-66.
78. Шумаев, В.В. Обоснование выбора конструкции бороздообразующего рабочего органа / В.В. Шумаев, А.Г. Трёкин // Научный потенциал студенчества - агропромышленному комплексу: Сб. материалов научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2008. С.-208-209.
79. Шумаев, В.В. Обоснование ширины бороздообразующего рабочего органа сошника сеялки-культиватора/ В.В. Шумаев, А.С. Петряев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса: Сб. материалов научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2009. С.-125.
80. Шумаев, В.В. Обоснование ширины зоны распространения деформации почвы рыхлительным зубом / В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2012. С.- 163-164.
81. Шумаев, В.В. Определение неравномерности высева удобрений между клиньями в сошнике для разноуровневого внесения удобрений и семян / В.В. Шумаев, А.В. Бучма // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – С. -128-131.
82. Шумаев, В.В. Определение сил действующих на нож при горизонтальном резе / В.В. Шумаев // Вклад молодых ученых в

инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – С. -151-154.

83. Шумаев, В.В. Определение угла наклона сводообразователей / В.В. Шумаев // Вклад молодых ученых в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – С. -159-161.

84. Шумаев, В.В. Оптические свойства полупроводников / В.В. Шумаев, А.Д. Согуренко // К 65-летию ФГБОУ ВО Пензенская ГСХА: сборник научных трудов профессорско-преподавательского состава. – МНИЦ ПГСХА. - Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 149-151

85. Шумаев, В.В. Посевные машины для ресурсосберегающих технологий в растениеводстве / В.В. Шумаев, В.Н. Трифонов // Студенческая наука – аграрному производству: Сб. материалов 52-й научной конференции студентов инженерного факультета «Пензенской ГСХА». - Пенза: РИО ПГСХА, 2007. С.-162-164.

86. Шумаев, В.В. Посевные машины для ресурсосберегающих технологий в растениеводстве / В.В. Шумаев, А.В. Бучма // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2012. С.- 108-109.

87. Шумаев, В.В. Результаты влияния некоторых физико-механических свойств почвы на тяговое сопротивление сошника / В.В. Шумаев, А.Г. Трёкин // Научный потенциал студенчества - агропромышленному комплексу: Сб. материалов научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2008. С.-209-210.

88. Шумаев, В.В. Результаты исследований по обоснованию оптимального типа распределителя удобрений сошника разноуровнего внесения удобрений и распределения семян / В.В. Шумаев // Образование, наука, практика: инновационный аспект: сборник материалов Международной научно-практической конференции, посвященной Дню российской науки. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2015. – С. 17-19.

89. Шумаев, В.В. Ресурсосбережение при проектирование и изготовление сельскохозяйственной техники/ В.В. Шумаев // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромыш-

ленного комплекса России: сборник материалов Всероссийской научно- практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2015. – С. 59-60.

90. Шумаев, В.В. Сеялка-культиватор ССВ – 3.5 с новыми сошниками / В.В. Шумаев // Инновационные разработки молодых ученых – развитию агропромышленного комплекса: сборник научных трудов IV Международной конференции. – Том 1 - Ставрополь: ФГБНУ ВНИИОК, 2015. – С. 363-366.

91. Шумаев, В.В. Сошник для внесения удобрений и посева семян / В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в аграрную науку: материалы международной научно-практической конференции. - Кинель: РИЦ СГСХА, 2016. – С. 382-383.

92. Шумаев, В.В. Сошник для работы на влажных почвах / В.В. Шумаев // Образование, наука, практика: инновационный аспект: сборник материалов Международной научно-практической конференции, посвященной Дню российской науки. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2015. – С. 39-40.

93. Шумаев, В.В. Сошник для работы на лёгких почвах / В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в аграрную науку: материалы международной научно-практической конференции. - Кинель: РИЦ СГСХА, 2016. – С. 380-382.

94. Шумаев, В.В. Сошник для разбросного высева семян и удобрений / В.В. Шумаев, А.В. Мачнев // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: Сб. материалов Всероссийской научно-практической конференции молодых учёных. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.- 192-193.

95. Шумаев, В.В. Сошник разбросного высева семян и удобрений для лёгких почв / В.В. Шумаев // Образование, наука, практика: инновационный аспект: сборник материалов Международной научно-практической конференции, посвященной Дню российской науки. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2015. – С. 36-38.

96. Шумаев, В.В. Теоретические исследования полёта семени с распределителя / В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Пенза: РИО ПГСХА, 2013. – С. -177.

97. Шумаев, В.В. Теоретическое определение тягового сопротивления сошника с бороздообразующим рабочим органом /

В.В. Шумаев // Ресурсосберегающие технологии и технические средства для производства продукции растениеводства и животноводства: сборник материалов Международной научно-практической конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2014. – С. 215-219.

98. Шумаев, В.В. Технологии минимальной обработки почвы при выращивании зерновых с использованием сеялок прямого посева / В.В. Шумаев, А.В. Бучма, А.С. Бочкарёв // Инновационные идеи молодых исследователей для АПК России: сборник материалов Всероссийской научно-практической конференции. – Том 3.- Пенза: РИО ПГСХА, 2012. С.- 63-64.

99. Шумаев, В.В. Трение и налипание в сельскохозяйственной практике и пути их снижения / В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: Сб. материалов научной конференции. – Пенза: РИО ПГСХА, 2009. – С. 87.

100. Шумаев, В.В. Усовершенствование методов и средств посева зерновых культур с раздельным внесением семян и удобрений / В.В. Шумаев, А.В. Шуков // Образование, наука, практика: инновационный аспект: Сб. материалов международной научно-практической конференции посвящённой 60-летию ФГБОУ ВПО «Пензенская ГСХА». - Пенза: РИО ПГСХА, 2011. С.-159-161.

101. Шумаев, В.В. Физические основы функционирования датчика положения дроссельной заслонки / В.В. Шумаев, А.В. Поликанов // К 65-летию ФГБОУ ВО Пензенская ГСХА: сборник научных трудов профессорско-преподавательского состава. – МНИЦ ПГСХА. - Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 148-149

102. Шумаев, В.В. Физические основы функционирования датчика положения дроссельной заслонки / В.В. Шумаев, А.В. Поликанов // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: сборник материалов международной научно-практической конференции.– Том 3 – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 38-39.

103. Шумаев, В.В. Формулы, описывающие эмпирические кривые при испытаниях на сжатие / В.В. Шумаев, Т.Г. Федина, Л.С. Чечкина // Инновационные идеи молодых исследователей для агропромышленного комплекса России: Сб. материалов 55-ой

научной студенческой конференции. - Пенза: РИО ПГСХА, 2010. С.-161.

104. Шумаев, В.В. Экспериментальное обоснование параметров сошника для разноуровневого внесения удобрений распределения семян / В.В. Шумаев // Инновационные разработки молодых ученых – развитию агропромышленного комплекса: сборник научных трудов IV Международной конференции. – Том 1 - Ставрополь: ФГБНУ ВНИИОК, 2015. – С. 366-369.

105. Шумаев, В.В. Экспресс оценка физико-механических свойств почвы по её твёрдости / В.В. Шумаев // Вклад молодых учёных в инновационное развитие АПК России: Сб. материалов научной конференции. – Пенза: РИО ПГСХА, 2009. – С. 85.

106. Шумаев, В.В. Электропривод почвенного канала и его особенности / В.В. Шумаев, А.В. Поликанов // К 65-летию ФГБОУ ВО Пензенская ГСХА: сборник научных трудов профессорско-преподавательского состава. – МНИЦ ПГСХА. - Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. 151-153

107. Янгельдин, Ф.Х. Определение липкости почвы на примере среднесуглинистого чернозема / Ф.Х. Янгельдин, В.В. Шумаев // Вклад молодых ученых в инновационное развитие АПК России: сборник материалов Международной научно-практической конференции. – Том 2. – Пенза: РИО ПГСХА, 2016. – С. -177-179.

Содержание

Предисловие………………………………………………… 3
1 Методология научных исследований……………………. 4
1.1 Развитие научного знания…………………………... 4
1.1.1 Особенности научного знания………………………… 4
1.2 История науки……………………………………….. 27
1.2.1 История науки в технике…………………………… 27
1.2.2 История развития техники…………………………… 39
1.3 Структура научного знания………………………… 44
1.3.1 Эмпирическое знание……………………………... 44
1.4 Методология и методы научного познания……….... 58
1.4.1 Методология и метод……………………………… 58
1.4.2 Классификация методов…………………………... 60
2 Методы обработки и представления данных
в научных исследованиях………………………………... 68
2.1 Элементы математической статистики……………… 68
2.1.1 Выборка и ее распределение………………………… 68
2.1.2. Вариационные ряды………………………………… 69
2.1.3. Эмпирическая функция распределения…………… 73
2.1.4. Эмпирическая плотность распределения………….. 74
2.1.5. Графическое изображение статистических
данных……………………………………………………… 75
2.1.6. Числовые характеристики выборки……………...... 76
2.1.7. Вычисление числовых характеристик выборки…... 82
2.2. Статистические оценки…………………………….. 86
2.2.1. Точечные оценки…………………………………….. 88
2.2.2. Интервальные оценки……………………………….. 93
2.3 Проверка статистических гипотез…………………… 94
2.3.1. Классический метод проверки гипотез……………. 95
2.3.2. Сущность метода……………………………………. 95
2.3.3. Алгоритм проверки нулевой гипотезы…………….. 96
2.3.4. Проверка гипотез о законе распределения………… 97
2.3.5. Проверка гипотезы о нормальном распределении

генеральной совокупности по критерию Пирсона………. 97
2.4 Основы теории планирования эксперимента ………... 104
2.4.1. Основы планирования многофакторного
эксперимента…………………………………………… 115
2.5 Аналитическое моделирование процессов
и имитационные модели ………………………………... 119
2.5.1 Определение и понятие системы и ее
элементов.. 123
2.5.2. Основы линейного программирования……….......... 139
Литература……………………………………………….. 233

Василий Викторович Шумаев
Алексей Владимирович Поликанов
Алексей Валентинович Мачнев
Алексей Александрович Орехов
Татьяна Геннадьевна Дорофеева
Али Ильясович Зябиров

МЕТОДЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Учебное пособие

Компьютерная верстка В.В. Шумаева

Подписано в печать 1.07.2016 г. Формат 60×84 1/16
Бумага Гознак Print Отпечатано на ризографе
Усл. печ. л. Тираж 500 экз. Заказ №

РИО ПГСХА

440014, г. Пенза, ул. Ботаническая, 30