Понятие средних величин и их значение в статистике

Наиболее распространенной формой статистических показателей, используемой в социально-экономических исследованиях, является средняя величина, представляющая собой обобщенную количественную характеристику признака в статистической совокупности в конкретных условиях места и времени. Показатель в форме средней величины выражает типичные черты и дает обобщающую характеристику однотипных явлений по одному из варьирующих признаков. Он отражает уровень этого признака, отнесенный к единице совокупности. Широкое применение средних объясняется тем, что они имеют ряд положительных свойств, делающих их незаменимыми в анализе явлений и процессов общественной жизни.

Важнейшее свойство средней заключается в том, что она отражает то общее, что присуще всем единицам исследуемой совокупности. Значения признака отдельных единиц совокупности варьируют под влиянием множества факторов, среди которых могут быть как основные, так и случайные.

Сущность средней в том и заключается, что в ней взаимопогашаются те отклонения значений признака, которые обусловлены действием случайных факторов, и учитываются изменения, вызванные действием факторов основных. Это позволяет средней отражать типичный уровень признака и абстрагироваться от индивидуальных особенностей, присущих отдельным единицам.

Для вычисления средних величин используется формула степенной средней:

$$\bar{x} = \sqrt[k]{\frac{\sum x_i^k \times f_i}{\sum f_i}},$$

где $\bar{x}$ – средняя величина исследуемого явления;

x_i – i-й вариант осредняемого признака ($i = 1n$);

f_i – вес i-го варианта.

Формулы средних величин, используемых в статистике, представлены в таблице 36.

Для вычисления среднего значения качественного признака (средняя урожайность, средняя себестоимость и т.д.), как правило используется средняя арифметическая или средняя гармоническая. Чтобы правильно выбрать формулу расчета, необходимо составить логическую формулу средней или исходное соотношение средней (ИСС):

$$ИСС = \frac{Объем\ осредняемого\ признака}{Объем\ совокупности}$$

Таблица 36 – Формулы средних величин, используемых в статистике

Значение k	Наименование средней	Формула средней	
		простая	взвешенная
-1	Средняя гармоническая	$\bar{x} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$	$\bar{x} = \frac{\sum f}{\sum \frac{f}{x}}$
0	Средняя геометрическая	$\bar{x} = \sqrt[n]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times ... x_n}$	$\bar{x} = \sqrt[\sum f]{x_1^{f1} \times x_2^{f2} \times x_3^{f3} \times ... x_n^{fn}}$
1	Средняя арифметическая	$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	$\bar{x} = \frac{\sum xf}{\sum f}$
2	Средняя квадратическая	$\bar{x} = \frac{\sum x^2}{n}$	$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f}}$

Свойство степенных средних возрастать с повышением показателя степени определяющей функции называется в статистике ***правилом мажорантности средних***.

Вид средней выбирается в каждом отдельном случае путем конкретного анализа изучаемой совокупности, он определяется материальным содержанием изучаемого явления, а также принципами суммирования и взвешивания. Характер имеющихся данных определяет существование только одного истинного среднего значения показателя.

Кроме степенных средних в статистической практике используются структурные средние величины, в качестве которых рассматриваются ***мода и медиана***.

Средняя арифметическая, ее свойства и способы вычисления

Средняя арифметическая, представляет собой частное от деления суммы индивидуальных значений признака на их количество. Средняя арифметическая бывает ***простой и взвешенной***.

Средняя арифметическая простая применяется в тех случаях, когда каждое индивидуальное значение признака встречается один или одинаковое число раз, то есть когда средняя рассчитывается по группировочным единицам совокупности.

Расчет средней арифметической простой:

$$\overline{x_{ap}} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum x}{n}$$

где $x_1, x_2, \ldots x_n$ – индивидуальные значения варьирующего признака; n – число единиц совокупности.

Пример. Имеется информация о стаже пяти рабочих, при этом стаж первого рабочего составил 5 лет, второго – 7, третьего – 4, четвертого – 10, пятого – 12 лет.

Определить средний стаж работы.

Решение. Поскольку в исходных данных значение каждого варианта встречалось только один раз, для определения среднего стажа одного рабочего следует применить формулу простой средней арифметической. В нашем примере средний стаж будет равен:

$$\overline{x_{ap}} = \frac{5+7+4+10+12}{5} = 7{,}6$$

Среднюю арифметическую взвешенную рассчитывают в тех случаях, когда отдельные значения исследуемой совокупности встречаются не один, а много, причем неодинаковое число раз, то есть представляют собой ряд распределения.

Если индивидуальные значения признака (варианты) обозначить $x_1, x_2, \ldots x_n$, а числа, показывающие, сколько раз повторятся варианты (частоты), – $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n$, то средняя арифметическая взвешенная будет равна:

$$\overline{x_{ap}} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

Средняя арифметическая взвешенная равна сумме произведений варианта (x) на их частоты или веса (f), поделенной на сумму частот.

Пример. Рассчитать среднюю заработную плату работников в бригаде из 20 человек, оплата труда которых варьируется от 2800 до 4400 руб., где x_i – варианты осредняемого признака, f_i – частота, показывающая, сколько раз встречается *i*-е значение в совокупности.

Заработная плата работников бригады

Заработная плата, руб. (x_i)	2800	3200	3600	4000	4400	Итого
Число работников, чел. (f_i)	2	11	5	1	1	20

Решение. Применяя формулу средней арифметической взвешенной, получаем:

$$\overline{x_{ap}} = \frac{2800*2+3200*11+3600*5+4000*1+4400*1}{2+11+5+1+1} = 3225 \text{руб.}$$

В отдельных случаях веса могут быть представлены не абсолютными величинами, а относительными (в процентах или долях единицы). Тогда формула средней арифметической взвешенной будет иметь вид:

$$\overline{x_{ap}} = \frac{\sum xd}{\sum d}$$

где $d = \frac{f}{\sum f}$ – частность, то есть доля каждой частоты в общей сумме всех частот.

Если частоты подсчитывают в долях (коэффициентах), то $\sum d = 1$ и формула средней арифметической взвешенной имеет вид:

$$\overline{x_{ap}} = \sum xd$$

Вычисление средней арифметической интервального ряда

Иногда среднюю арифметическую величину исчисляют по данным интервального вариационного ряда (когда варианты признака, по которому определяется средняя, представлены в виде интервалов «от – до»). В этом случае в качестве значений признаков в группах принимают середины интервалов, в результате чего образуется дискретный ряд.

Пример. Определить средний размер капитальных затрат на одно предприятие по следующим данным:

Исходные данные		**Расчетные значения**	
Группы предприятий по размеру капитальных затрат, тыс.руб.	**Число предприятий, *f***	**Середина интервала, тыс.руб., *x***	***x*f***

До 3000	5	2900	14500
3000 – 3200	15	3100	46500
3200 – 3400	20	3300	66000
3400 – 3600	30	3500	105000
3600 – 3800	16	3700	59200
3800 и более	14	3900	54600
Итого	100	-	345800

Решение. Для исчисления средней в интервальном ряду необходимо прежде всего перейти от интервального ряда к дискретному путем замены интервальных значений их средними значениями (простая средняя между верхней и нижней границами каждого интервала) (см. расчет в табл., гр. 3).

Если имеются интервалы с так называемыми открытыми границами (в нашем примере первый интервал – до 3000 тыс. руб. или последний интервал – 3800 тыс. руб.), то для расчета средней условно определяют неизвестную границу интервала. Обычно в этих условиях берут значение последующего интервала (для первого) или предыдущего (для последнего).

После того как найдено среднее значение интервалов, расчет производится по средней арифметической взвешенной.

В нашем примере средний размер капитальных затрат на одно предприятие составит:

$$\overline{x_{ap}} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \frac{345800}{100} = 3458 \text{тыс.руб.}$$

Необходимо помнить, что средняя арифметическая интервального ряда менее точна, чем средняя арифметическая, исчисленная из конкретных вариантов, потому что при исчислении середин интервалов допускается некоторая условность.

Средняя арифметическая обладает рядом свойств:

1. Средняя арифметическая суммы варьирующих величин равна сумме средних арифметических величин:

Если $x_i = y_i + z_i$, то

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{\sum (y_i + z_i)}{n} = \frac{\sum y_i}{n} + \frac{\sum z_i}{n} = \bar{y} + \bar{x}$$

Это правило показывает, в каких случаях можно суммировать средние величины. *Если, например, выпускаемые изделия состоят из двух деталей y и z и на изготовление каждой из них расходуется в среднем y = 3 ч, z = 5 ч, то средние затраты времени на изготовление одного изделия (x) будут равны: 3 + 5 = 8 ч. то есть x*

$= y + z$.

2. Алгебраическая сумма отклонений индивидуальных значений варьирующего признака от средней равна нулю, так как сумма отклонений в одну сторону погашается суммой отклонений в другую сторону, то есть

$$\sum(x-\bar{x})=0 \text{, потому что}$$

$$\sum(x-\bar{x})=\sum x-\sum \bar{x}=\sum x-n\bar{x}=\sum x-n\frac{\sum x}{n}$$

Это правило показывает, что средняя является равнодействующей.

3. Если все варианты ряда уменьшить или увеличить на одно и то же число *a*, то средняя уменьшится или увеличится на это же число *a*:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}=\frac{\sum(x_i \mp a)}{\sum f_i}\pm a$$

4. Если все варианты ряда уменьшить или увеличить в *A* раз, то средняя также соответственно уменьшится или увеличится в *A* раз:

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}=\frac{\sum \frac{x_i}{A} f_i}{\sum f_i}\times A=\frac{\sum A x_i f_i}{\sum f_i}\div A$$

5. Если все частоты ряда разделить или умножить на одно и же число c/, то средняя не изменится:

$$\bar{x}=\frac{\sum x_i y_i}{\sum y_i}=\frac{\sum x_i \frac{f_i}{d}}{\sum \frac{f_i}{d}}=\frac{\sum x_i f_i d}{\sum f_i d}$$

Это свойство показывает, что средняя зависит не от размеров весов, а от соотношения между ними. В качестве весов могут выступать не только абсолютные, но и относительные величины.

Средняя гармоническая

В статистической практике бывают случай, когда при вычислении средней имеются данные об индивидуальных значениях признака (x) и его общем объеме в совокупности ($W = xf$), но неизвестны частоты (f). В таком случае среднее значение признака вычисляется по формуле *средней гармонической*.

Средняя гармоническая – представляет собой величину, обратную средней арифметической из обратных значений вариант.

$$\bar{x}_{гарм.взв.} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum W}{\sum \frac{W}{x_i}}$$

Пример. По данным таблицы требуется определить среднюю рентабельность капитала по двум акционерным обществам в целом.

№ АО	**Рентабельность акционерного капитала, % (*x*)**	**Получено прибыли, тыс.руб. (*W* = *xf*)**	**Акционерный капитал, тыс.руб. (*W*/*x*)**
1	40	6000	15000
2	35	3500	10000
Итого	-	9500	25000

Решение. Основой выбора формы средней является реальное содержание определяемого показателя:

Рентабельность, % = (Прибыль / Акционерный капитал) * 100

Средняя рентабельность равна отношению полученной предприятиями прибыли к сумме их акционерного капитала. В данном примере отсутствуют прямые данные об акционерном капитале, но его сумму можно определить косвенным путем, разделив полученную прибыль (*M*) на рентабельность капитала (*x*).

Средняя рентабельность акционерного капитала будет равна

$$\bar{x} = \frac{\sum M}{\sum \frac{M}{x}} = \frac{6000 + 3500}{\frac{6000}{0,4} + \frac{3500}{0,35}} = \frac{9500}{25000} = 0,38 \text{ или } 38\ \%.$$

В тех случаях, когда произведения *fx* одинаковы или равны единице (*W=1*), применяется средняя гармоническая простая, вычисляемая по формуле

$$\bar{x}_{гарм.} = \frac{\sum W}{\sum \frac{W}{x_i}} = \frac{1 + 1 + ... + 1}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + ... + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x}}$$

где *x* – отдельные варианты; *n* – их число

Пример. Фактический объем реализации продукции ОАО «Лада» за месяц составил 14 млн руб. При проверке было выявлено, что объем неучтенной продукции составил 15 %. Фактический объем реализации продукции ОАО «Мир» также составил 14 млн руб., а объем выявленной в результате проверки неучтенной продукции 25 %.

Определить средний процент неучтенной продукции для обоих предприятий.

Решение. Для решения этой задачи необходимо применить формулу простой средней гармонической:

$$\bar{x}_{гарм.} = \frac{2}{\frac{1}{15} + \frac{1}{25}} = 18{,}8\ \%$$

то есть средний процент неучтенной продукции для обоих предприятий составляет 18,8 %.